

# Matematika

## Függvények - egyenletek

### HF Munkafüzet

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu  
2020/2021

---

Név



# FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK A: LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

I) Halmazok

II) Függvények

1) Rendezett párok, rendezett párokból álló halmazok, Descartes szorzat

Descartes szorzat:  $A = \{-1; 0; 2\}$   $B = \{-1; 3\}$ . Írd föl Venn-diagrammal az  $A \times A$ ;  $B \times B$ ,  $A \times B$  és a  $B \times A$  elemeit. Melyek azok a rendezett párok, amelyek többször is előfordulnak? Miért van ez?

$A = \{0;2;5\}$   $B = \{1;5\}$  A lehetséges Descartes szorzatok:  $A \times A$ ;  $A \times B$ ;  $B \times A$ ;  $B \times B$  Hány elemük van? Minek lehetnek elemei a következő rendezett párok:

$$|A \times A| =$$

$$|A \times B| =$$

$$|B \times A|$$

$$|B \times B| =$$

$$(0;5) \in$$

$$(1;0) \in$$

$$(5;2) \in$$

$$(5;5) \in$$

Rajzold fel elemekkel azt a két legkevesebb elemű A és B halmazt, melyekre igaz, hogy:

$$(1;3) \quad (2;4) \quad (3;4) \quad \text{és} \quad (4;5) \in A \times B.$$

Aki 5-ös akar lenni: Mit mondhatunk A és B viszonyáról, ha  $(A \times B) \setminus (A \times A) = \emptyset$ .

2) Definíció – függvények

Függvény-e a következő hozzárendelés:

$f()$ : Gyerekhez hozzárendeljük az édesanyját

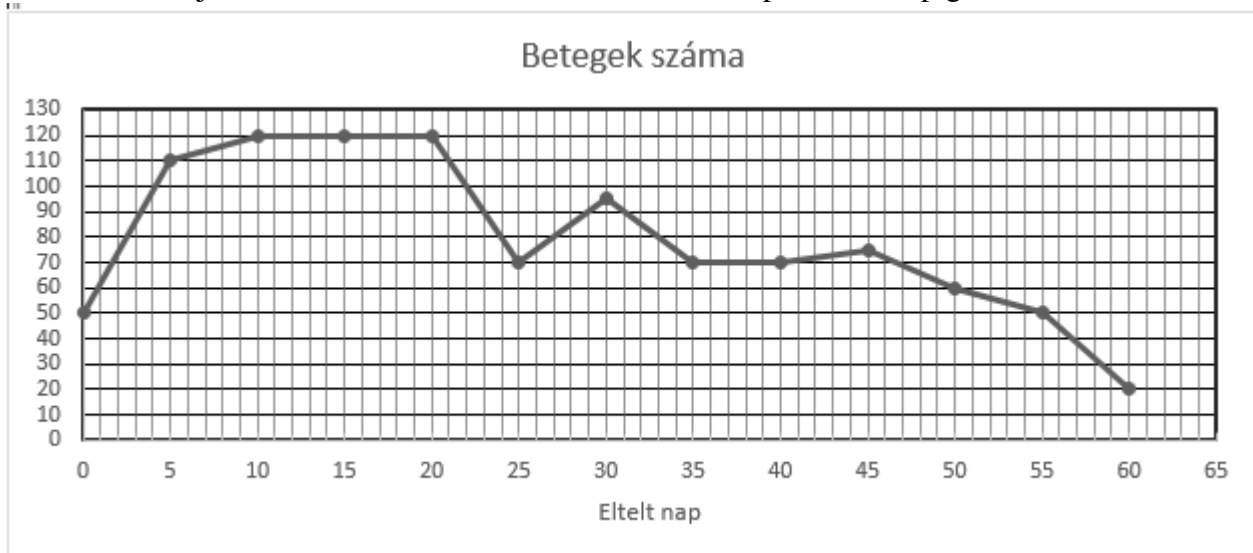
$g()$ : Édesanyához a gyerekét

$h()$ : Gyerekhez egy nagyapját

$j()$ : Egy boltban a Túró Rudihoz az árát.

$k()$ : Egy boltban 200 Ft-hoz az érte kapható terméket.

Grafikon mutatja a kisvárosban a fertőzöttek számát a 0. naptól a 60. napig.



Mely napokon voltak a legtöbben betegek?

Mely időszakban gyógyultak meg a legtöbben?

Hány napig tartott ez az időszak, amikor a legtöbben voltak betegek?

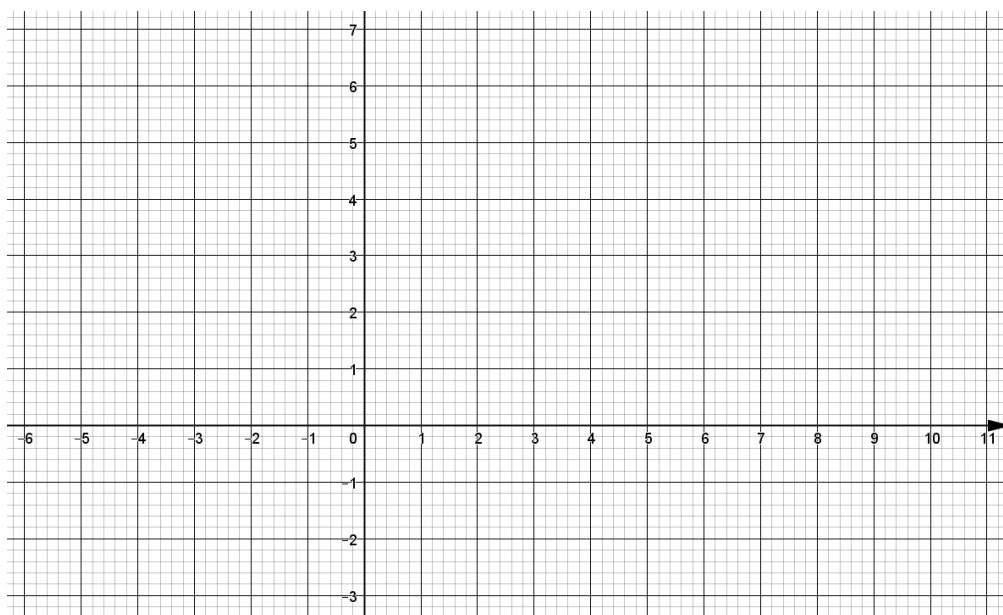
Összesen hány napig tartott, amikor a betegek száma nőtt?

Adott a következő függvény:  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}; x \mapsto \frac{x}{2} + 1$

Töltsd ki a táblázatot, majd ábrázd koordináta-rendszerben!

$x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x/2 + 1$																

Ábrázd a  $P(x;f(x))$  pontokat a koordináta-rendszerben!



Adott az  $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2x+1$

Mit rendel a következő független változókhoz:

$$x_1 = -3; x_2 = 0; x_3 = 3;$$

$$f(-3) = \quad \quad \quad f(0) = \quad \quad \quad f(3) =$$

Melyik független változóhoz rendeli a következő függvényértékeket:

$$y_1 = -3; y_2 = 0; y_3 = 2$$

$$f(x) = -3 \quad \quad \quad f(x) = 0 \quad \quad \quad f(x) = 2$$

$$x =$$

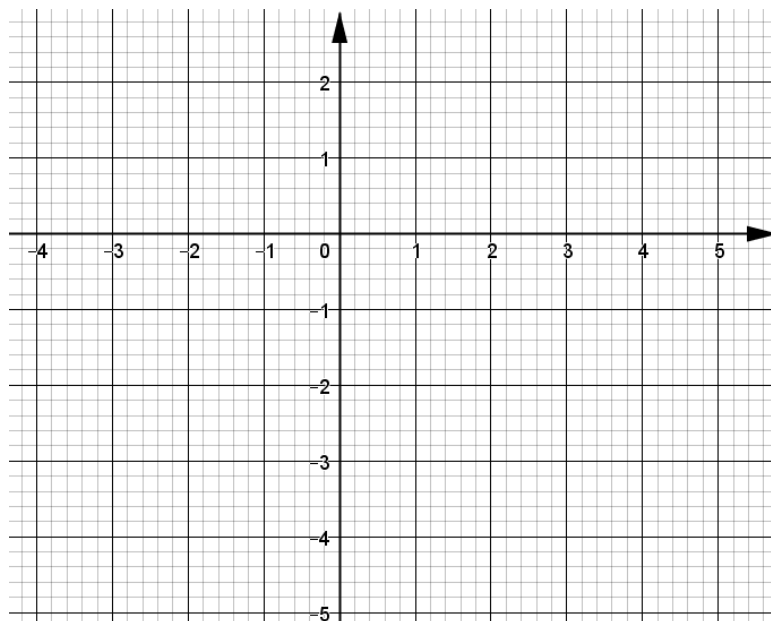
$$x =$$

$$x =$$

### 3) Szemléltetés

Adott a következő fv.:  $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{x}{2} - 3$  Rajzold föl a „gépet” Tölts ki az értéktáblázatot, majd rajzold fel a koordináta-rendszerben az értéktáblázat pontjait!

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2,2	2,8	3	3,6	4	4,2	5
x/2-3														



### III) Fogalmak, definíciók

- 1) Elnevezések, leírás
- 2) Független változó - argumentum függő változó (függvény érték) - helyettesítési érték
- 3) Értelmezési tartomány; értékkészlet

Határozd meg a következő hozzárendelésű valós-valós függvények értelmezési tartományát:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{x+3}{2x-1}$$

$$h(x) = \frac{x}{(x-2)(2x+1)}$$

$$m(x) = \frac{5}{x^2 - 2x + 1}$$

### 4) Gyakorlás

Töltsd ki az értéktáblázatot. Az ősképek keresés mindig egyenletmegoldás!

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 4x - 1$$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

$x$							
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2

$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{x}{5} + 3$$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$							

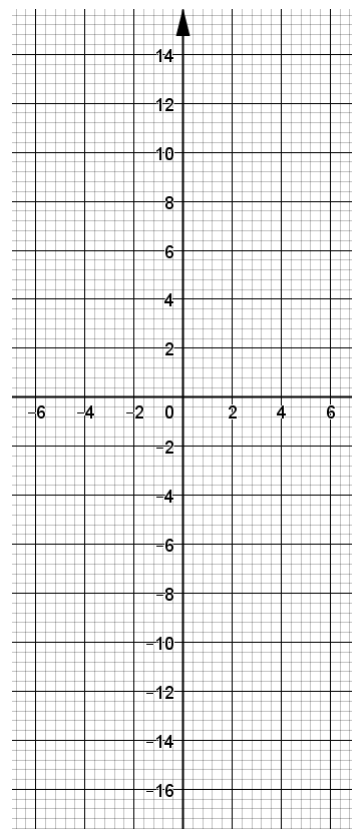
$x$							
$g(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2

Add meg az értelmezési tartományt –  $D_h$  –, töltsd ki az értéktáblázatot (oda-vissza), majd ábrázold az értéktáblázatból kiolvasott pontokat!

$$h(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto y = \frac{15}{x-1} \quad D_h:$$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$15/(x-1)$							

$x$	3	4	5	6	7	8	9	10
$15/(x-1)$								



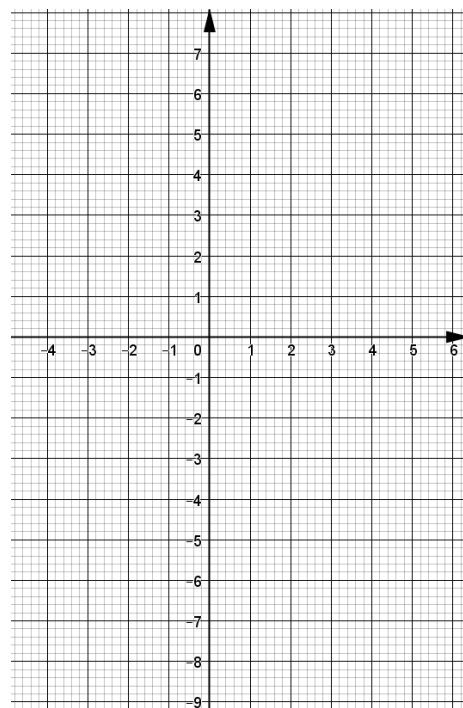
Mihez rendeli a fv. a  $-50$  értéket:  $h(x) = -50 \quad x = ?$

Add meg az értelmezési tartományt –  $D_i$  –, töltsd ki az értéktáblázatot (oda-vissza), majd ábrázold az értéktáblázatból kiolvasott pontokat!

$$i(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; i(x) = -1,5x+1 \quad D_i:$$

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$-1,5x+1$										

$x$						
$-1,5x+1$	4	2	1	0	-1	-4



- 5) Injektivitás (kölcsonösen egyértelműség)  $\Rightarrow$  invertálhatóság  
 Számold ki a függvényértékeket:

$x \mapsto -\frac{3}{2}x$       $x \mapsto x^2 + 2$       $x \mapsto \frac{3}{x}$       $x \mapsto -2x + 5$       $x \mapsto x^2 - 3x - 6$

Számold ki az ősképeket (egyenletmegoldás)!

$x \mapsto -\frac{3}{2}x$       $x \mapsto x^2 + 2$       $x \mapsto \frac{3}{x}$       $x \mapsto -2x + 5$       $x \mapsto x^2 - 3x - 6$

Töltsd az alábbi táblázatot (keresd ki az  $y$  értékek ősképet – ha van!)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2x + 3$   
 (Ha felírod az inverz fv-t, a „visszafelé” fv-t, akkor gyorsabb...)

$x$								
$y$	-8	-6	-1	0	1	2	3	5

Töltsd az alábbi táblázatot (keresd ki az  $y$  értékek ősképet – ha van!)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{x+10}{x-4}$   
 (Ha felírod az inverz fv-t, a „visszafelé” fv-t, akkor gyorsabb...)

$x$								
$y$	-13	-6	-1	0	1 (!)	2	3	6



$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = 2x+4$ . Töltsd ki a táblázatot, de a „visszafelé” keresés előtt próbáld meg felírni az „inverz” függvényt, a „visszafelé függvényt!

$x$	-3	-1	0	1	3	4	8	10
$y$								

$x$								
$y$	-8	-6	-1	0	1	2	5	16

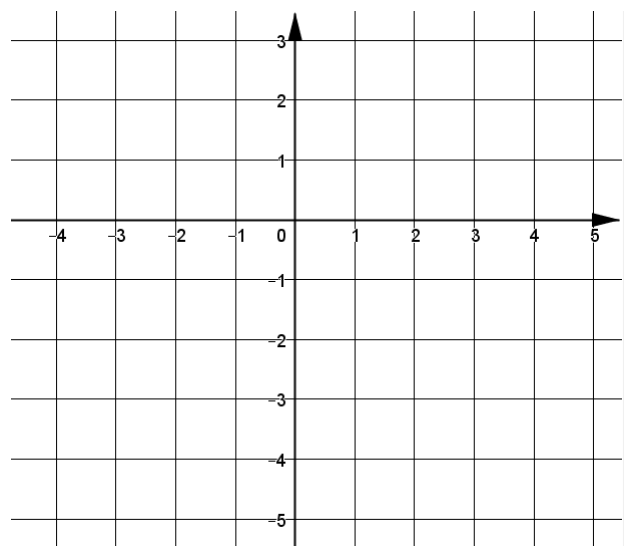
### 6) Függvények grafikonjai

Ábrázold a következő pontokat a koordináta-rendszerben (írd is oda a nevüket).

$A(1;2)$   $B(0;3)$   $C(-4;0)$   $Q(0;0)$

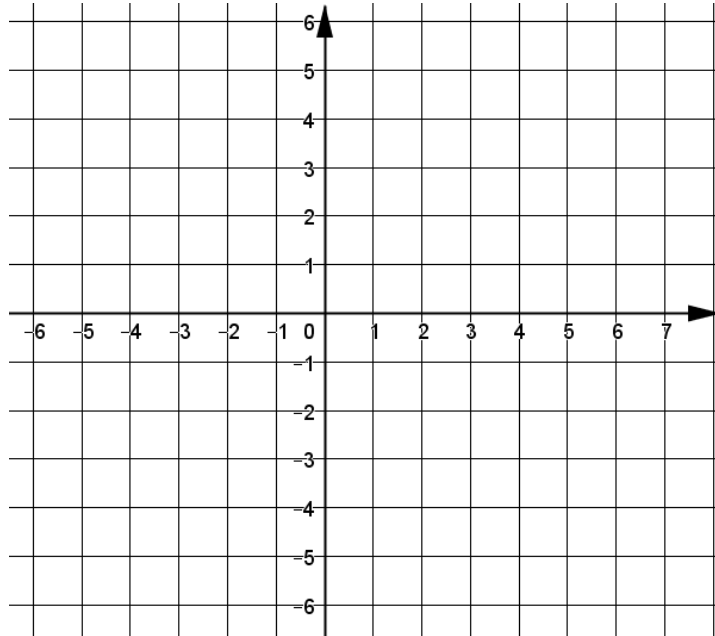
$D(0;-5)$   $E(-3;-4)$   $F(4;2)$

Ábrázold azokat a pontokat, amelyek első koordinátája  $-2$ , a második bármi, akár nem egész szám is lehet.

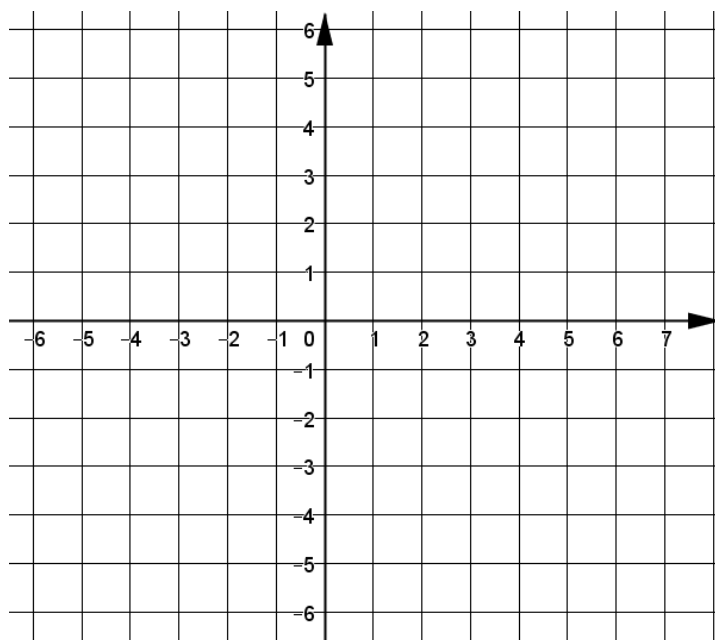


Ábrázold (ha kell vonal, ha kell sáírozás) azokat a pontokat, melyek:

- a) Kékkel: az 1. koordinátája  $-4$ ; a másik koordináta bármi lehet:  $P(-4;y)$
- b) Zölddel: a 2. koordinátája  $3$ ; az első bármi lehet:  $P(x;3)$
- c) Pirossal: két koordinátája megegyezik  $P(x;x)$
- d) Feketével: a két koordináta összege  $4$ , vagyis  $P(x;4-x)$



- e) \* az 1. koordinátája kisebb mint második.  $P(x;y)$  ahol  $x < y$
- f) \*  $P(x;y)$ , ahol  $\min(x;y) = 1$  (a kettő koord. közül a kisebbik 1)
- g) \*  $P(x;y)$ , ahol  $\max(|x|;|y|) \leq 2$  (vagyis a két koordinátának veszem az abszolút értékét, és a nagyobb érték is még kisebb, mint 2. Először csak úgy próbálkozz a koordináta-rendszerben, rá fogsz jönni, hogy hol vannak ezek)

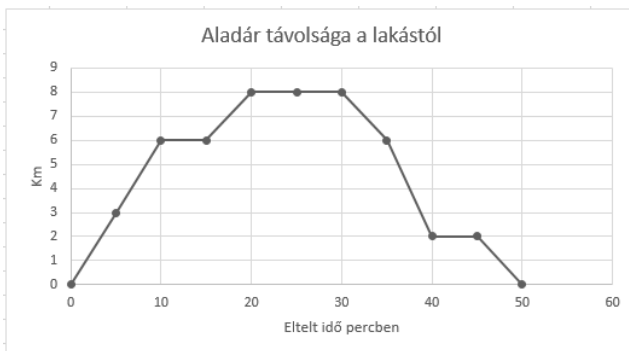


Adott a következő fv.:  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = x^2 - 4$  Adjuk meg a függvény grafikonjának a következő  $x$  értékekhez tartozó pontjait:  $x = -5; -4; -3; -2; -1; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4$ .

Például:  $x = -5$ , ekkor:  $P(x; g(x)) \equiv P(-5; g(-5)) \equiv P(-5; 21)$ , mert a  $g(\ )$  fv.  $-5$ -höz  $21$ -et rendel.

Aladár kerékpározni otthonról a barátjához, majd hazament.

- Milyen távol lakik a barátja?
- Hány perc alatt ért oda?
- Mannyit pihent útközben odafelé?
- Mennyi időt töltött a barátjánál?
- Mikor ment a leggyorsabban?
- Hány métert tett meg átlagosan 1 perc alatt, amíg haza nem ért?



A grafikon egy kerékpáros útját mutatja.

Vízszintes tengely: eltelt idő percben.

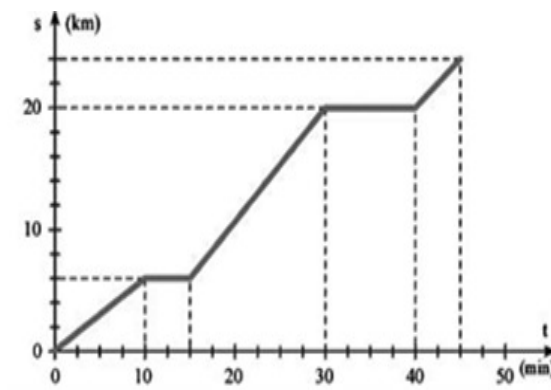
Függőleges tengely megtett út.

Hányszor, mikor és mennyi időt pihent a kerékpáros?

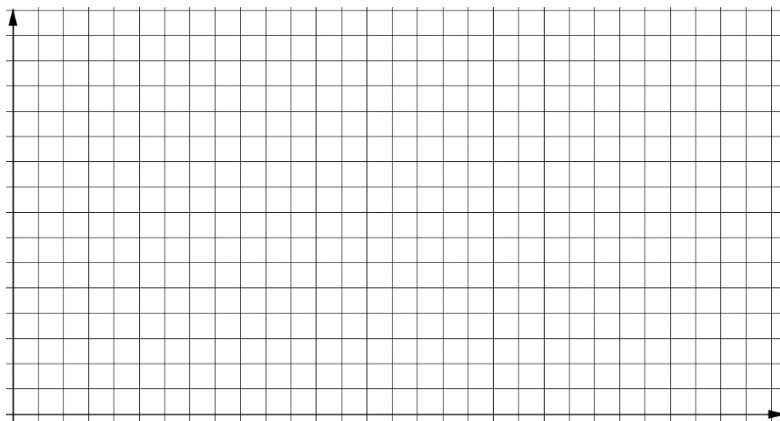
Mikor ment a leggyorsabban?

Mikor a leglassabban?

Hány km/perc, illetve km/h-val ment először?



Rajzolj egy olyan grafikont, amikor a kerékpáros első 20 percben szépen lassan fárad, utána pihen 5 percet. Majd elindul egy emelkedőre: ahol állandó sebességgel megy 10 percet. A tetőről fékezés nélkül gurul 2 percet, majd még 10 percet teker néha lassan néha gyorsabban. Így megtesz megint 24 km-t. Vagyis az grafikon tengelyei ugyanolyanok, mint az előbb.



A tengelyek nevét és az adatokat te írod fel!

Határozd meg, hogy a következő három függvény képe hol metszi a tengelyeket, vagyis mely pontokban. (Az  $y$  tengelyt akkor, amikor az  $x = 0$  pl.:  $(0;7)$ , az  $x$  tengelyt akkor, amikor az  $y = 0$ , pl.  $(-3;0)$ )

A három függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = 3x - 2$$

$$g(x) = -2x - 3$$

$$h(x) = 4x$$

#### IV) Lineáris (elsőfokú és konstans), illetve lineárisá tehető függvények

##### 1) Mitől függ a változás – vagyis a „meredekség”

A gépekbe „bedobok” egy számot, majd utána egy 2-vel nagyobbat. (Ha nehéznek érzed, akkor legyen a szám először 5, utána 7)

$$f(): y = -3x + 1$$

$$g(): y = -2x/5 - 3$$

$$h(): y = 4x + 5$$

$$i(): y = x - 1$$

$$j(): y = 2x - 1$$

$$k(): y = 0,5x + 6$$

$$m(): y = x + 2$$

$$n(): y = -3x - 4$$

$$p(): y = 2x + 2$$

$$q(): y = -x + 1$$

Melyikeknél lesz pozitív változás – (vagyis többet dob ki a gép):

Melyikeknél lesz negatív változás – (vagyis kevesebbet dob ki a gép):

Melyiknél lesz a legnagyobb pozitív változás:

Melyiknél lesz a legnagyobb negatív változás:

Melyik növekszik, de a legkevésbé:

Melyik csökken, de a legkevésbé:

Mitől függ a változás mértéke:

Melyeknél a legmeredekebb a változás:

2) **Def:** Az  $x \mapsto mx + b$ , ahol  $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbf{R}$ , hozzárendelési szabályú függvényeket elsőfokú függvényeknek hívjuk.

3) Lineáris fv.-nél két pontjából már ábrázolható a fv. grafikonja!

**Egyszerűsítsd** a következő törteket:

$$\frac{3x - 6}{5x - 10} =$$

$$\frac{50x^2 - 8}{8 - 20x} =$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

$$\frac{9x^2 - 6x + 1}{2x - 6x^2} =$$

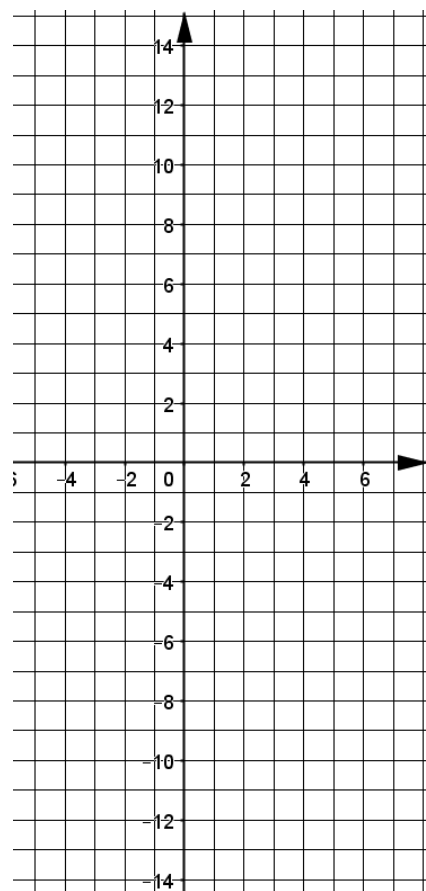
$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} =$$

Adott a következő négy függvény:

$$f():\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = x \quad g():\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; g(x) = 2x \quad h():\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = \frac{x}{2} + 1 \quad i():\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = -2x + 1$$

Töltsd ki az alábbi értéktáblázatot mindegyikkel, majd ábrázd őket négy színnel a koordináta-rendszerben. (Elég két-két pontjukra egyenest illesztened!)

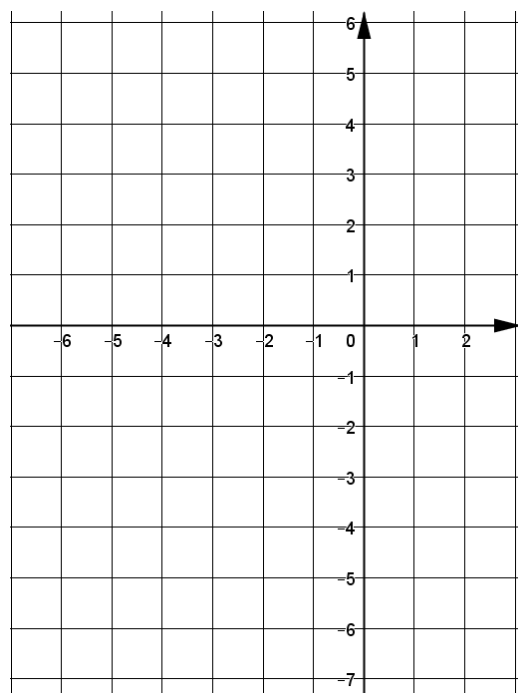
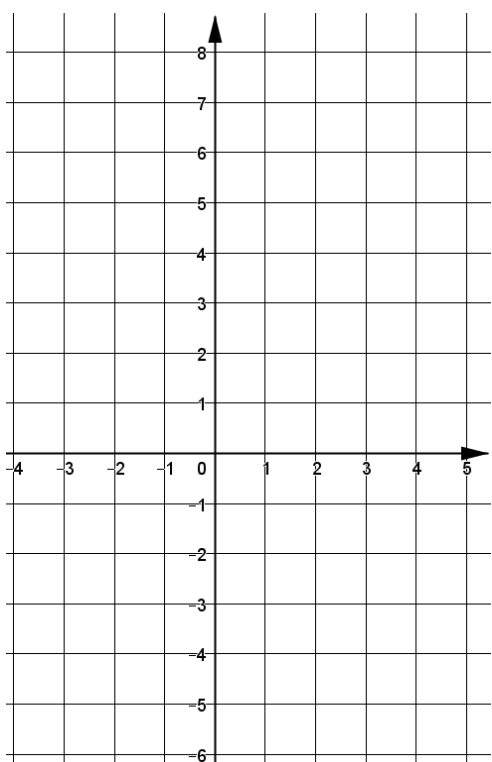
$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$											
$g(x)$											
$h(x)$											
$i(x)$											



Lent, a baloldali koordináta-rendszerben rajzold meg annak a függvénynek a grafikonját, mely átmegy az  $A(2,1)$  ponton, és az  $m$  meredeksége: a)  $m = 1$  kékkel b)  $m = 3$  pirossal c)  $m = \frac{1}{2}$  zölddel

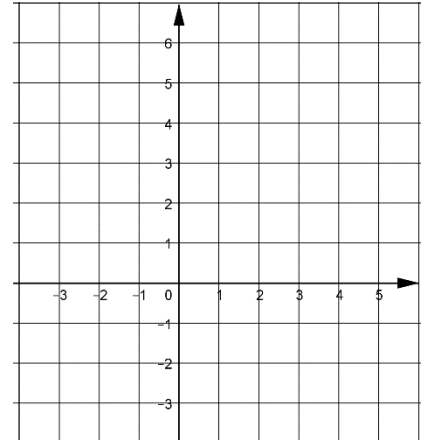
Lent, a jobboldali koordináta-rendszerben rajzold meg annak a függvénynek a grafikonját, mely átmegy az  $A(-3;1)$  ponton, és a meredeksége

a)  $m = -1$  kékkel b)  $m = -2$  pirossal c)  $m = -\frac{2}{3}$  zölddel



$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = -x+1$$

Típus, értelmezési tartomány ( $D_f$ ), zérushely, y tengelymetszet, meredekség, fixpont; majd ábrázold!

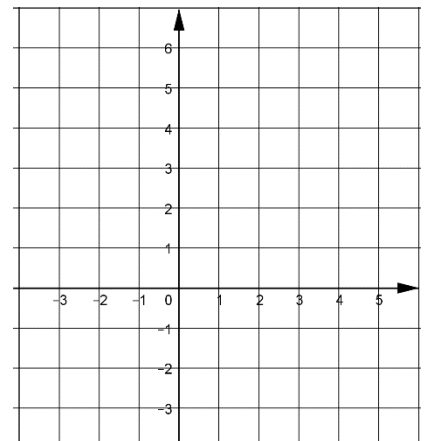


Töltsd ki:

$x$	-10	-5	0	10				
$f(x)$					-4	0	-50	50

$$\text{Ajánlott: } g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{2}{3}x - 1$$

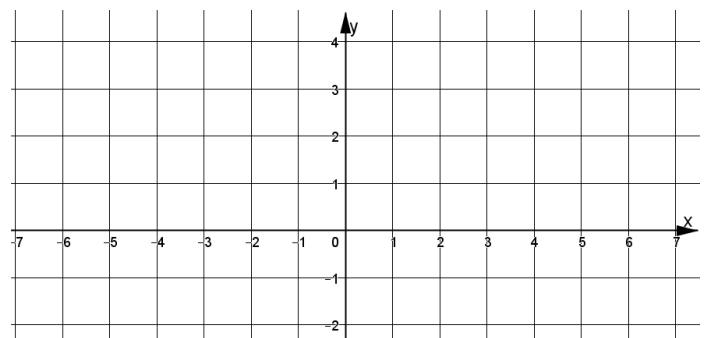
Típus, értelmezési tartomány ( $D_g$ ), zérushely, y tengelymetszet, meredekség, fixpont; majd ábrázold!



$$h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}(2x+2) + \frac{1}{3}(x-2)$$

(Először hozd lineáris függvény alakra a hozzárendelést!)

Típus, értelmezési tartomány ( $D_h$ ), zérushely, y tengelymetszet, meredekség, fixpont; majd ábrázold!



Add meg annak a lineáris fv-nek a hozzárendelési szabályát, mely grafikonja illeszkedik az  $A(-3;4)$  és a  $B(300;4)$  pontra:

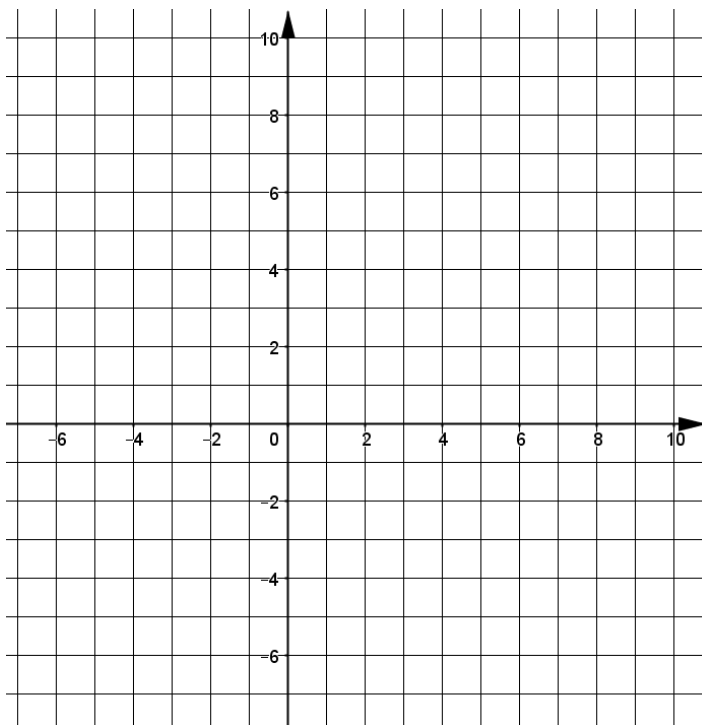
$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

Ábrázold közös koordináta-rendszerben: (először lineáris alakra kell hozni...) (elég két-két pont, és ráilleszteni a grafikont)

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+4)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(x-3) + \frac{x}{3}$$

$$h(x) = -\frac{3x-1}{2} - \frac{3}{2}$$



4) A meredekség újra

Mely pontokban metszik a tengelyeket a következő hozzárendelésű fv-ek grafikonjai:

$$y = 3x - 10$$

$$y = -2x$$

$$y = 50x + 10$$

Különböző színekkel rajzold meg azoknak a lineáris függvényeknek a grafikonját, amelyek átmennek az adott ponton, és a meredekségük is adott – és írd rá a nevüket!

$$f(): A(0;0) \quad m = 1$$

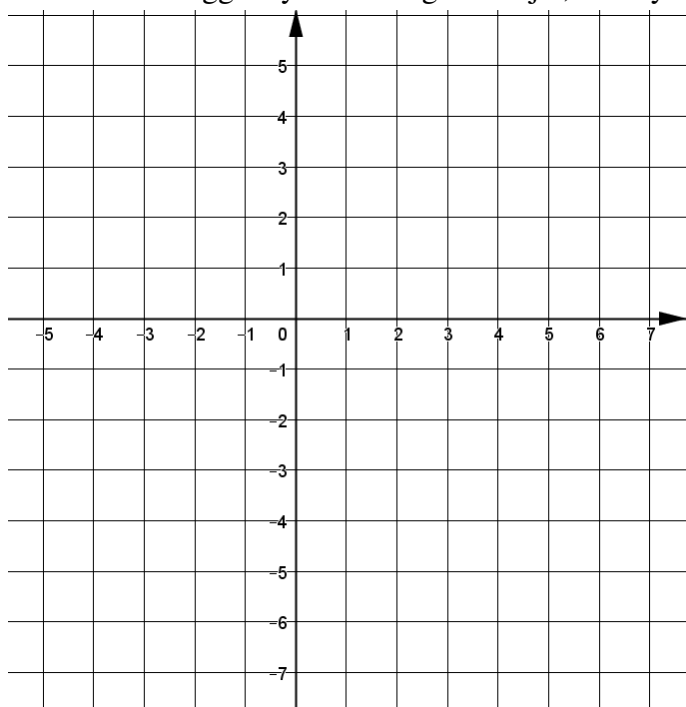
$$g(): B(0;0) \quad m = -1$$

$$h(): C(-1;-2) \quad m = 3$$

$$i(): D(-1;-2) \quad m = \frac{1}{3}$$

$$j(): E(2;1) \quad m = -3$$

$$k(): E(2;1) \quad m = -\frac{1}{3}$$



Határozd meg a következő hozzárendelésű függvények meredekségét!

$$a(x) = \frac{2x-4}{-5} + 2$$

$$b(x) = (3x-5)(2x+1) - 6(x-1)(x+1)$$

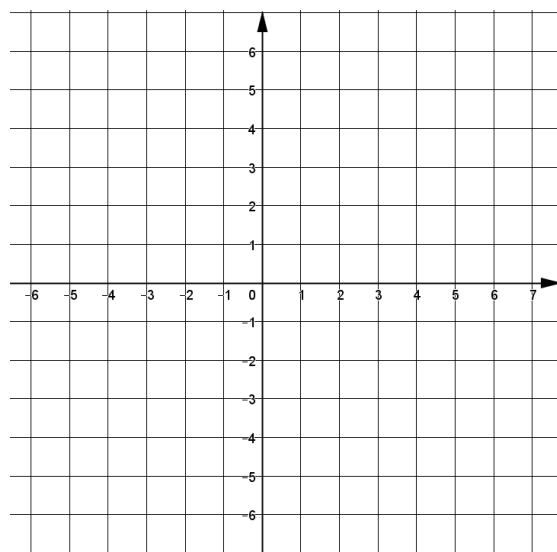
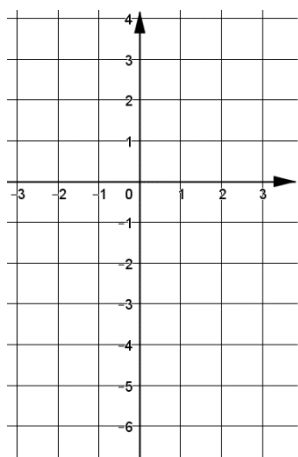
$$c(x) = \frac{6x^2 + 3x}{10x+5} + 2$$

Nem köt.:  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x-1$  Töltsd ki az értéktáblázatát, és ábrázold a pontokat!

$x$	-1	0	1			
$f(x)$				-5	0	2

$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{2}{3}x + 1$ . Töltsd ki a függvény értéktáblázatát, és ábrázold a pontokat!

$x$	-6	0	3			
$g(x)$				-4	0	2



Mennyi a meredeksége a következő lineáris függvényeknek, melyek grafikonja átmegy az adott két ponton!

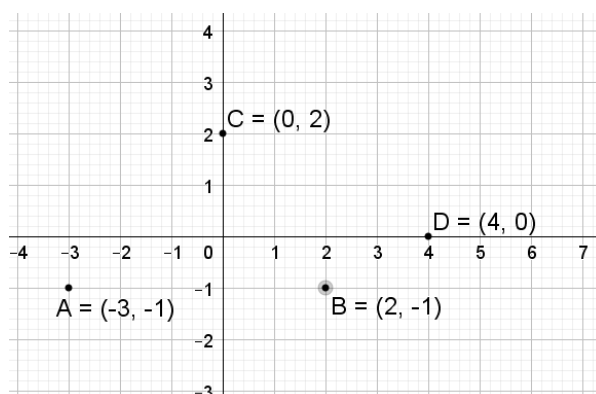
$$f(): A \text{ és } C \quad m =$$

$$g(): A \text{ és } D \quad m =$$

$$h(): A \text{ és } B \quad m =$$

$$i(): C \text{ és } B \quad m =$$

$$j(): C \text{ és } D \quad m =$$



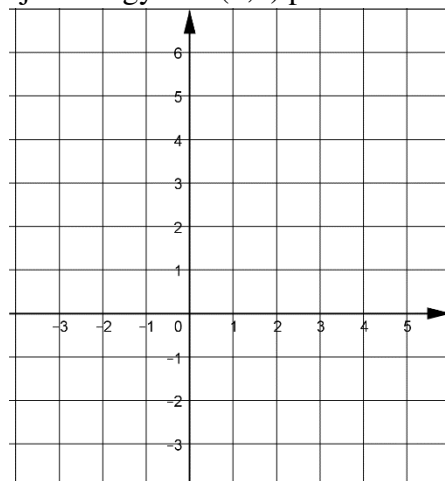


5) Grafikonról történő leolvasások, függvény hozzárendelési szabály visszakeresése

Add meg azt az  $f( )$  lineáris fv-t, mely meredeksége 2 és grafikonja átmegy az  $F(0;3)$  ponton.  
(Ha akarsz, rajzolsz.)

Add meg azt a  $g( )$  lineáris fv-t, mely meredeksége  $-\frac{2}{3}$  és a  $G(2;-1)$  pont illeszkedik grafikonjára.

Add meg azt a  $h( )$  lineáris fv-t, mely grafikonja áthalad  $H(-2;-1)$  és  $I(3;0)$  pontokon.



Add meg annak a lineáris fv-nek a hozzárendelési szabályát, mely áthalad az

a)  $(0;-4)$  és a  $(-3;0)$

b)  $(-1;-5)$  és az  $(1;-1)$  koordinátájú pontokon.

Add meg annak a  $g( )$  lineáris fv-nek a hozzárendelési szabályát, amelyre:  $g(3) = 5$ ,  $g(-2) = 12$

Írd föl annak a lineáris fv-nek a definícióját, mely átmegy az  $A(0;500)$   $B(-400;0)$  ponton!

Egészíts ki az adott pontok koordinátáit úgy, hogy illeszkedjenek a  $f( ):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = -\frac{3x}{2} + 2$  fv. grafikonjára!

$A(0; \quad )$

$B(-6; \quad )$

$C(\quad ; 0)$

$D(\quad ; 5)$

Adott  $g( ):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = -2$  függvény. Add meg annak az  $f( )$  fv-nek a definícióját, mely grafikonja a  $g( )$  függvényével párhuzamos, és átmegy a  $(-1;2)$  ponton!

Nem kötelező: Adott egy  $P(3;y)$  pont, az  $f( ) : -2x+5$  hozzárendelésű és a  $g( ) : 3x+b$  fv. Mennyi legyen a  $b$ , hogy a  $P$  pontban messék a grafikonjaik egymást?

Egyszerűsítsd a következő törtet:

$$\frac{90a^2 + 30a^4}{5a^3 + 15a} =$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3} =$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{8 - 2x^2} =$$

$$\frac{9x^2 - 25}{9x^2 - 30x + 25} =$$

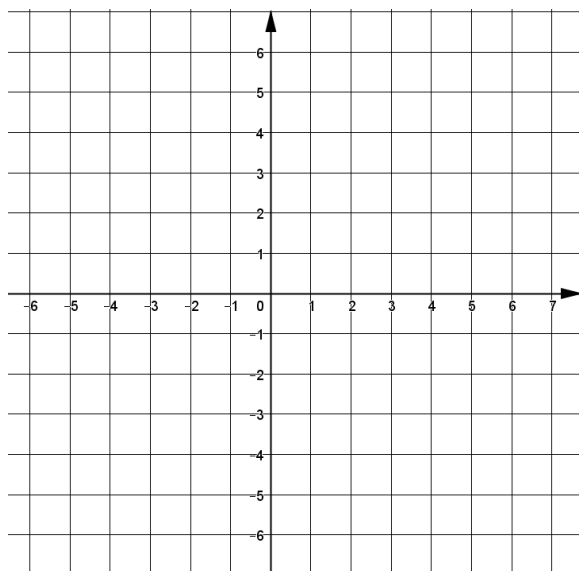
Írd le szavakkal és jelekkel a szigorún monoton növekedő és a szigorúan monoton csökkenő fv-ek definícióját!

### 6) Függvényjellemzések

Nem köt: Add meg annak az  $f( )$  lineáris fv-nek a hozzárendelési szabályát, melyre igaz, hogy  $f(-5) = 3$  és  $f(245) = 753$

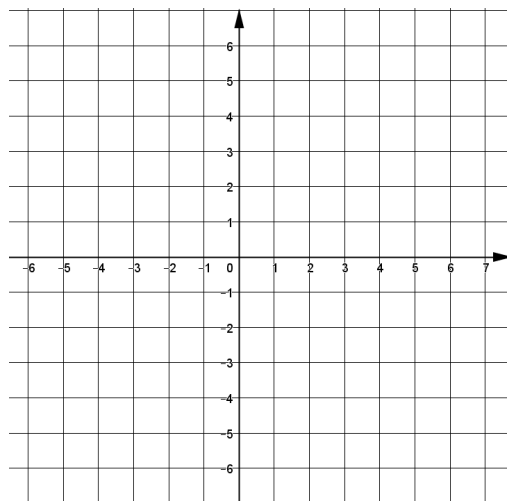
Jellemezd és ábrázold a következő függvényt úgy, ahogy az órán tettük:

$$f( ) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$$



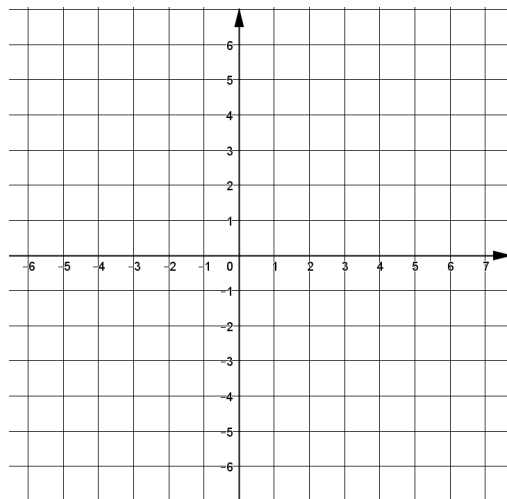
Jellemezd, majd ábrázold a következő függvényt úgy, ahogy az órán tettük:

$$g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x$$



Jellemezd, majd ábrázold a következő fv-t úgy, ahogy az órán tettük:

$$g(\cdot): [-2;6] \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = -\frac{x}{2} + 1$$




Adott egy  $f(\cdot)$  függvény grafikonja.

Mi az értelmezési tartomány?  $D_f =$

Mi a max érték amit fölvesz? Max.érték:

Hol veszi fel? Max hely:

Az 1-et mely helyeken veszi fel:  $x_1 =$   $x_2 =$

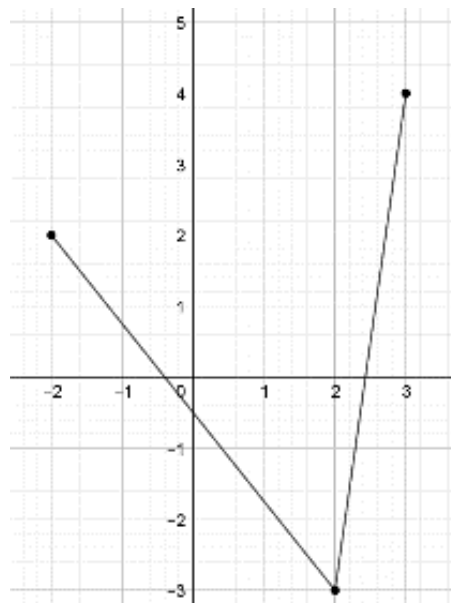
A -1-et mely helyeken veszi fel?  $x_1 =$   $x_2 =$

A 3-at mely helyeken veszi fel?  $x =$

Mi a minimum- értéke a függvénynek:

vagyis a minimális érték, amit felvesz? Min. ért.:

Mi az értékkészlete?  $R_f =$



Adott egy  $f()$  függvény grafikonja.

Mi az értelmezési tartomány?  $D_f =$

Mi a max érték amit fölvesz? Max.érték:

Hol veszi fel – vagyis. Max hely:

Az 1-et mely helyeken veszi fel:  $x_1 =$   $x_2 =$

A -1-et mely helyeken veszi fel?  $x_1 =$   $x_2 =$

A 3-at mely helyen veszi fel?  $x =$

A -4-ben mennyit vesz fel?  $y =$

A 2-ben mennyit vesz fel,

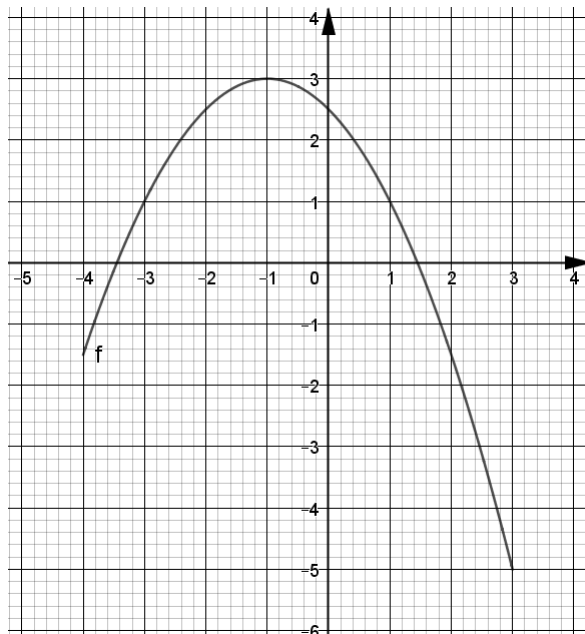
vagyis 2-ben a helyettesítési érték:  $f(2) =$

Mi a minimum- értéke a függvénynek:

vagyis a minimális érték, amit felvesz?

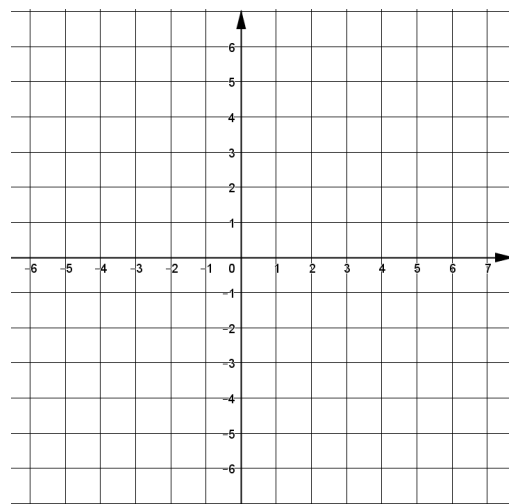
Min. ért.:

Mi az értékkészlete?  $R_f =$



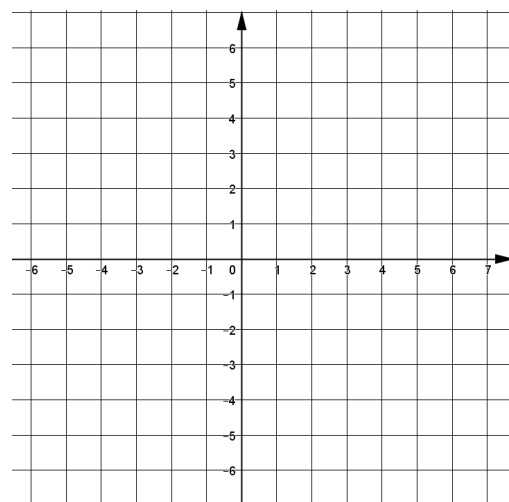
Jellemezd és ábrázold a következő fv-t úgy, ahogy az órán tettük:

$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \frac{2x}{3} - 2$$



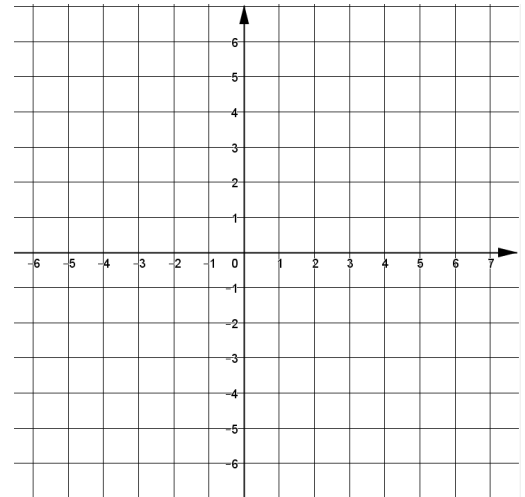
Jellemezd és ábrázold – mindent úgy, ahogy az órán! Ellenőrizd a symbolab.com-on!

$$g(): [-1; 2] \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x + 2}$$

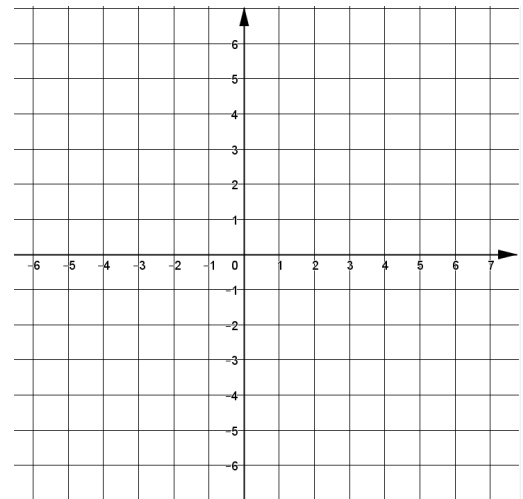
Jellemezd és ábrázold – mindent ahogy az órán! Ellenőrizd a symbolab.com-on!

$$g : [-1;3] \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \frac{4x^2 - 9}{6x + 9}$$

Jellemezd és ábrázold – mindent úgy, ahogy az órán! Ellenőrizd a symbolab.com-on!

$$h : [-4;2] \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = \frac{3x^2 - 12x + 12}{2x - 4}$$

Add meg az értelmezési tartományt, majd úgy írd föl a következő hozzárendeléseket, hogy azokon látszódjék, hogy lineárisak (mx+b alak):

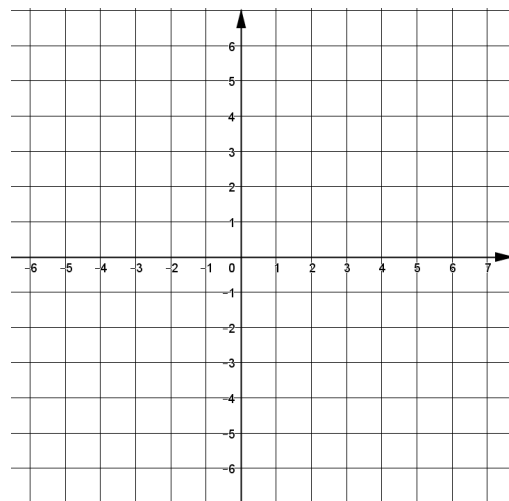
$$y = \frac{3x-1}{5} - \frac{2x+1}{3}$$

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} - 4$$

$$y = \frac{3-3x^2}{2x-2}$$

Jellemezd és ábrázold a  $h(x)|_{[-1;2]}$  **leszűkített** függvényt - mindent úgy, ahogy az órán! Ellenőrizd a symbolab.com-on

$$h(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{8x^2 - 2}{2x + 1}$$




7) Melyik hozzárendelési szabály lineáris, vagy tehető lineáris?

Melyik hozzárendelési szabály lineáris. Amelyik olyan, írd le úgy a hozzárendelési szabályt, hogy látszódjék a meredekség! (Segítség: ha a Symbolab-be beütöd: pl.  $y = x(2-x)$ , akkor kirajzolja a grafikont, és látod, hogy lineáris-e!)

$$3(x-4)$$

$$x(x+1)$$

$$(2x+1)-(x-3)$$

$$\frac{5}{x} + 4$$

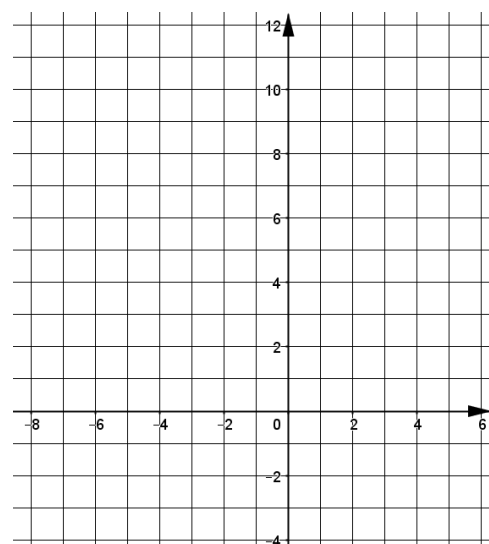
$$5x+x$$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

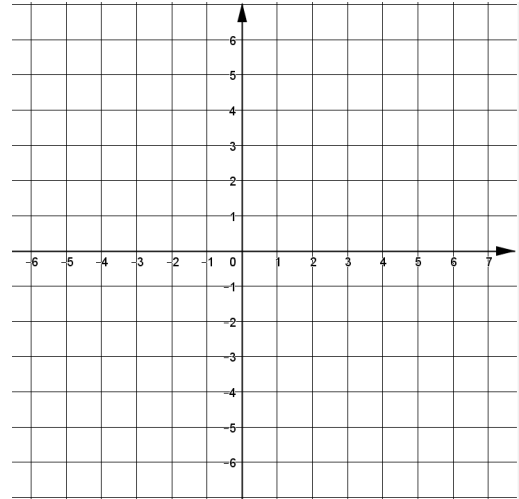
$$\frac{x^2 - x}{x}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x}$$

Nem kötelező: Jellemezd és ábrázold:  $f(x)|_{[-8;4]}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{2x^3 + 12x^2 - 14x}{3x^2 - 3x}$




Adott 2 pont:  $A(5;-4)$   $B(-3;2)$  és egy  $C(4;2)$  pont. Írd föl azt a lineáris fv-t, amely grafikonja áthalad a  $C$  ponton, és párhuzamos az  $A$  és  $B$ -n áthaladó egyenessel!



8) Függvény szorzása

Adott az  $f( ) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x - 3$ .

Szavakkal írd le, hogy mi történik a meredekséggel, ha a következő fv-t nézem:  $g( ) = -3 \cdot f( )$

9) Az egyenes arányosság

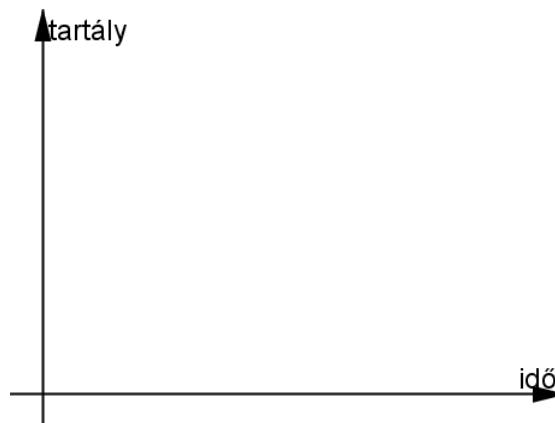
Írd mellé, hogy ha egyenes arányosság, akkor „Igen”, egyébként „Nem” (ha életből vett, akkor „ideális” eset)

- Egy karácsonyfa ára és magassága között.
- Aliz cicáinak száma és Aliz életkora között.
- Gábor otthon eltöltött ideje és az iskolában eltöltött ideje között.
- Táblás csokoládé tömege és a csoki íze között.
- Egy csúszda hossza és a rajta végigcsúszó csiga haladási ideje között.
- Egy könyv elolvasott és el nem olvasott lapjainak száma között.
- Egy ember testsúlya és életkora között.
- A családtagok száma és a család élelmiszerre költött pénzének mennyisége között.
- Az interneten töltött idő és elhülyülés között.
- A sütemények száma és a felhasznált liszt mennyisége között
- Egy épület magassága és kora között.
- A lakásban elfogyasztott víz mennyisége és a vízszámla végösszege között.
- Tyúkok száma és a tojt tojások száma között?

Egy kocsikereke egy fordulattal 0,75 m utat tesz meg. a) Milyen kapcsolat van a fordulatok száma és a megtett út között? b) Hányat fordul a kerék 50 m-en, és hányat 3,2 km-en?

Egy csapból 5 óra alatt 2 tartály telik meg.

10 óra alatt mennyi? 1 óra alatt mennyi? 18 óra alatt mennyi? Készíts táblázatot – óránként, és ábrázold koordináta-rendszerben; az egységeket magad határozod meg – nem szükséges egyformának lenniük!



Óra	1	1,5	2	2,5	4	10	12,5
Tartály							

225° hány radiánnak felel meg?

Ha 12 kg kristálycukor 18 Euro, akkor 60 kg hány Euro?

Ha 18 kg méz 160 Euro, akkor 50 Euro-ért hány kg-ot kapok?

$\frac{7\pi}{3}$  radián hány foknak felel meg?

Karinthy Frigyes: Tanítom a kisfiamat „– Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el – mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa...”



# FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK B: LINEÁRIS, ILLETVE LINEÁRISRA - VAGY AZOK SZORZATÁRA VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK

## I) Egyszerűbb lineáris egyenletek

### 1) Alap

Mondd végig hangosan a zárójelfölbontást, majd vonj össze, és oldd meg az egyenletet:

$$-(3x+5)+2(x-4)+(7x-3-5x) = 6(3x-5)-(11x+3)-2(-2x-1)$$

$$3(5x-2)-2(3x-4) = 5-3(-2-4x)$$

$$-2(3x+1)+3(4-3x) = 4(2-5x)+2(3x+4)$$

$$12(3-11x)-5(10-8x) = -4(3-5x)-11(1+11x)$$

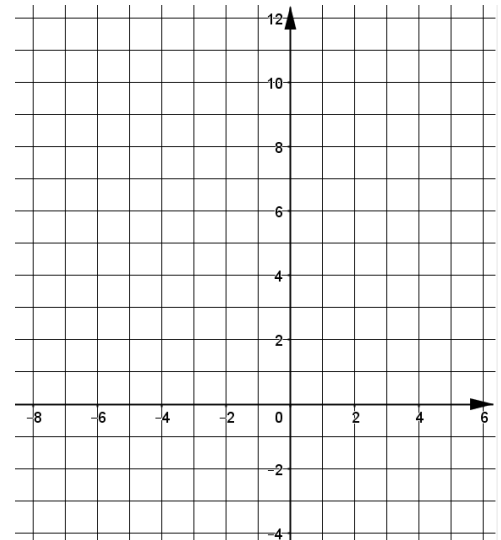
$$-(5x+3)+x-3(5-2x) = 2(5x-1)-3(2x+4)$$

$$14(9-15x)+12(18x-12) = 5x-(3+2x)-(3x-3)$$

$$3x = 8x$$

**(Figyelj, mert itt még két oldalon van  $x$ ...)**

Jellemezd és ábrázold:  $f(): [-4;3] \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{3x(2x-3)^2}{-5x(2x-3)}$

Írd föl azt a lineáris fv-t, mely grafikonja a következő két pontra illeszkedik.  $A(4; -3)$   $B(-2;-1)$ .

2) Egyenletek fő megoldási menete:

Apa most 25 évvel idősebb a két fia életkora összegénél.

4 évvel ezelőtt a fiúk életkora összegének ötszörösénél 1 évvel volt idősebb. Hány évesek most?

Egy szám első jegye 4-gyel nagyobb, mint a második, és a második fele a harmadiknak. Ha a számból kivonom az utolsó jegye elhagyásával kapott kétjegyűt, akkor 758-at kapok. Mi ez a szám?

3) Néhány gyakorlás

$$2(7x - 5) - (4x + 3) = -2(5 - 3x) - 3(1 - 2x)$$

$$14x + 5 = -23x + 5$$

$$5(2x-3)+4(5x+2) = -2(7-3x)-7(x-1)$$

$$2(13-5x)-4(6-2x) = -2(5x+3)-4(7-5x)$$

4) Látszólag másodfokú egyenletek:

$$(1+x)(3x+4)-(2x+1)(x-3) = x(x-4)+23$$

$$(2-3x)(2x+1)-(1-x)(5x+2) = -(x-3)(x+3)+1$$

5) Zárójelzés!

$$(4-x)(5-3(2-2x)) = (2x-1)(2x+1)-10x(x+2)$$

$$-2(x+3)^2 = (1-x)(x+1)-(x+4)(x+3)$$

$$-(2-x)^2-3(x-3)(x+3)+2 = 2x(2-3x) - (x+2)(5-2x) -3(3-x)$$

Ha egy szám duplájához 7-et adok, akkor ugyanannyit kapok, mintha a nála 10-zel kisebb számot öttel osztanám. Melyik ez a szám? (EGYENLET!)

## II) Főbb típusok

### 1) Törtes lineáris egyenletek

A végeredmény elég kanonikus alakban:

$$\text{LNKO: } (475, 570) =$$

$$(5700, 570, 3400) =$$

$$\text{LKKT: } [475, 570] =$$

$$[5700, 570, 3400] =$$

Hány db. osztója van a 144 000-nek? Nézd meg a 7. o füzetben, értsd meg újra. Tudd... Hátha megkérdeznék róla...

\* Hány 0-ra végződik a 100! (= 1·2·3·4·...·99·100)

„Kanonikus alakot kérek”: ne legyen se zárójel, se tört, és csak prímek legyenek, növekvő sorrendben, pozitív vagy negatív kitevővel!

$$\frac{(14 \cdot 2^2)^{-1} \cdot \frac{5}{11^{-2}}}{10^{-5} \cdot 18^{-4} \cdot 33^{-1}} =$$

Nem köt.: „Kanonikus alakot kérek”: ne legyen se zárójel, se tört, és csak prímek legyenek, növekvő sorrendben, pozitív vagy negatív kitevővel!

$$\frac{(196^{-2} \cdot 35^3)^{-1} \cdot \left(\frac{24^{-1}}{121^{-2}}\right)^3}{10^{-5} \cdot 324^{-4} \cdot 77^{-4}} =$$

Írd fel a következő két szám összes közös osztóját:  $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$   $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13^5$ . Először valamit ki kell számolni, majd fa struktúra!

$$\frac{4}{5}(3x+4) - \frac{3}{7}(2x-3) = 5$$

$$\frac{1}{5}(3x-1) - \frac{3}{4}(2x+6) = \frac{1}{2}(3x-7)$$

$$\frac{3-2x}{2} - \frac{4x+1}{5} = 1 - \frac{15x-3}{10}$$

$$x - \frac{3x+2}{6} = \frac{4x-7}{10} - \frac{5-3x}{15} + 1$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{2x-3}{2} - \frac{5-2x}{5} = \frac{5x-1}{5} + \frac{x}{2} - 2$$

$$\frac{2(4x-1)}{3} - 2x = \frac{2x-8}{4} - \frac{5(x-2)}{6}$$

Javasolt:

$$\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{7}{12}x - \frac{3}{10}\right) = \frac{7}{5}$$

Javasolt:

$$\frac{3x}{8} - \left(\frac{5}{3} + \frac{1-x}{6}\right) = \frac{7}{8}$$

$$\frac{2(0,03-0,1x)}{0,01} - 5,5 = \frac{0,03-0,2x}{0,02} - 7,5$$

2) Több zárójel

$$-(-(-2(x+3)+10)) = 4-2x$$

$$-2(5-3(2x-4)) = 3(5x-2(3x+4))$$

$$(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3) = 26$$

$$\frac{2-2x}{5} - \frac{-x+3}{4} = \frac{3x}{2} - \frac{7x+3}{5}$$

3) Magasabb fokú, de 0-ra redukálás után lineáris tényezők szorzatára visszavezethető egyenletek:

$$(3x-6)(5-2x) = 0$$

$$4x^2 \cdot \left( \frac{5x-1}{3} - 2x \right) (5-3x) = 0$$

$$(3x-5)^2 = 0$$

Egy oldalra, majd szorzattá...:

$$(2x-3)^2 = 16$$

$$x^3 = 0$$

Egy oldalra, majd szorzattá...:

$$6x^2 = 3x$$

Tudd fejből felbontani a zárójelet, vagyis csak a végeredményt írd le!

$$(3x-1)^2 =$$

$$(2-5x)^2 =$$

$$(x-2)(x+2) =$$

$$(4x-3)(4x+3) =$$

$$(x+y-1)(x+y+1) =$$

$$(19-5x)^2 =$$

$$(3x^2+1)^2 =$$

$$(5-11x)^2 =$$

$$(13x^2-15x)(13x^2+15x) =$$

**Emlékezz:**

**MÁSOD, VAGY MAGASABB FOKÚ EGYENLETEK ÚGY OLDUNK MEG, HOGY EGY OLDALRA RENDEZZÜK (0-RA REDUKÁLJUK), MAJD SZORZATTÁ ALAKÍTJUK.**

**EGY SZORZAT AKKOR ÉS CSAK AKKOR 0, HA VALAMELYIK TÉNYEZŐJE 0.**

$$12x = 8x^2$$

$$6x^3 = 18x^2$$

$$3x^2 = 75$$

$$625 = 16x^4$$

$$25 = (2x-3)^2$$

$$(3x-7)^2 = 64$$

$$2x^3 = 4x^2 + 30x$$

$$\frac{3-5x}{2} - \frac{5x-2}{5} = -\frac{13x-7}{4}$$



$$3x^2 = 15 - 12x$$

$$3x^2 = 507$$

$$2x^2 - 68x = -578$$

$$2x(5 - 3x) = 3x(2x + 4)$$

$$(3 - x)^2 = (x - 5)^2$$

$$3x^2 + 5x = 7x^2 - 13x$$

$$x^2 - 6x - 72 = 0 \quad \text{Aki 5-ös akar...: } (2x - 3)(x - 5) - (6 - 4x)(x + 5) = 2x - 3$$

Nem kötelező  
 $(2x-6)(2x+1)-(x-3) = (9-3x)(x+2)$

Nem kötelező  
 $(3x-5)(2x-1)-(5x-3)(3x-5)+(x+4)(5-3x) = 0$

$$(4x-1)(2x+3)-(2x+3)(5-3x) = (2x+3)(7x+1)$$

$$8x^3-18x = 4x^4-9x^2$$

- 4) A nevezők kezelése: kikötések, közös nevezők, szorzattá alakítások, egyszerűsítések  
 Számláló és nevező szorzattá alakítása, Értelmezési tartomány (kikötés), majd egyszerűsítés!

$$\frac{2x^2-8}{2(x-3)-x+4} =$$

$$\frac{3-3x^2}{2x^2+4x+2} =$$

Nem köt.:  $\frac{8x^3-8x^2+2x}{12x^3-3x} =$

Algebrai törtes egyenletek – A KIKÖTÉSEKET NE FELEDD! – AKI NEM EGYSZERŰSÍT...

$$\frac{12-3x}{x} = -5$$

$$\frac{4x-2}{3x+1} = 2$$

$$\frac{x^2+8}{x+4} = 2$$

Nem köt.:  $\frac{x^2-16}{x+4} = 3x-2$

$$\frac{8x^2-18}{2x+3} = 3$$

$$\frac{5x^2-10x+5}{6x^2-6} = 1$$

A KIKÖTÉSEKET NE FELEDD! -- AKI NEM EGYSZERŰSÍT, ANNAK ANNYI...

$$\frac{x^2-1}{x-1} + 2 = \frac{4x^2-1}{2x-1} + 3x$$

$$\frac{7}{3x-1} - 2 = \frac{6x-12}{2-6x}$$

$$\frac{x-10}{7-x} - 4 = \frac{10+2x}{x-7}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{7}{5x+5} - \frac{3}{10x+10} = \frac{11}{120}$$

$$2 - \frac{3x}{3x-2} = \frac{2x-9}{2x-5}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{2x^2-50}{x-5} = 20;$$

A KIKÖTÉSEKET NE FELEDD! -- AKI NEM EGYSZERŰSÍT, ANNAK ANNYI...

$$\frac{x^2}{4-x^2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{8}{x+2}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{4}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$$

$$2 + \frac{x-5}{2x+1} = \frac{5x+3}{2x+7}$$

$$\frac{2x-4}{2x+4} - \frac{x-2}{x+2} = 3$$

A KIKÖTÉSEKET NE FELEDD! -- AKI NEM EGYSZERŰSÍT, ANNAK ANNYI...

$$\text{Nem köt.: } \frac{18x+2}{x-4} - \frac{15x+1}{x+5} = 3$$

$$-\frac{x+1}{3-x} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{9x-3}{x^2-9}$$

$$\frac{8x-3}{6x-3} \cdot \frac{3x-4}{4x-5} = 1$$

$$\frac{x+3}{x+5} : \left( \frac{2}{3} - \frac{x+3}{x+5} \right) = -2$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{6}{x(2x-3)} + \frac{2}{x} = \frac{2}{2x-3}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{1}{8x+4} + \frac{1}{10x+5} = \frac{1}{4}$$

A KIKÖTÉSEKET NE FELEDD! -- AKI NEM EGYSZERŰSÍT, ANNAK ANNYI...

$$\frac{1-2x}{6-2x} - \frac{3x-4}{3-x} = 4$$

$$10x^3 - 25x^2 = 90x - 225$$

Nem köt.:  $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} = 0$

$$6x^3+48 = 12x^2+24x$$

5) Alapvető hibák egyenletmegoldásnál

$$\frac{3}{x+3} - \frac{4}{x-5} = -\frac{25}{x^2-2x-15}$$

Nem köt.:  $\frac{2-6x}{4-x} = 1 - \frac{3x+4}{8-2x}$

$$\frac{3(x-5)}{x-7} : \frac{3x-2}{2x-14} = 3$$

6)  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b^1 + a^{n-3} \cdot b^2 + a^{n-4} \cdot b^3 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a^1 \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Alakítsd szorzattá – mennél több tényezővé...

$$x^3 - 1 =$$

$$x^4 - 1 = (\text{„In medio est virtus” – többféleképp is!})$$

$$a^5 - 1 =$$

$$x^6 - 1 = (\text{többféleképpen is!})$$

$$x^3 - 8 =$$

$$x^5 - 1 =$$

$$125x^3 - 1 =$$

$$8y^3 - 27 =$$

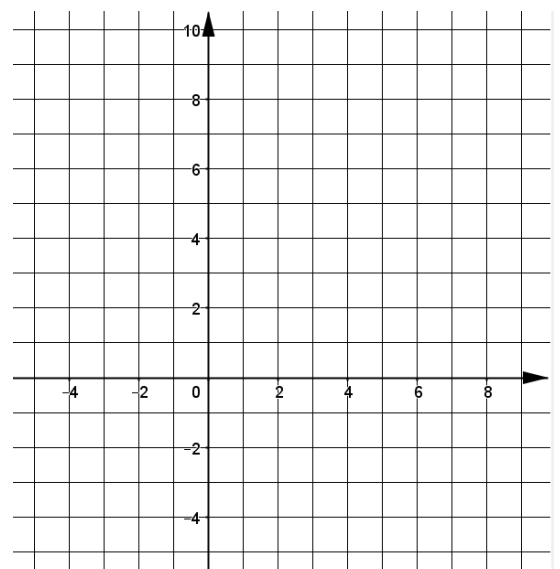
$$16x^4 - 625 = (\text{„In medio est virtus”})$$

$$125y^3 - 8 =$$

### III) Grafikus megoldás

1) Oldd meg grafikusán

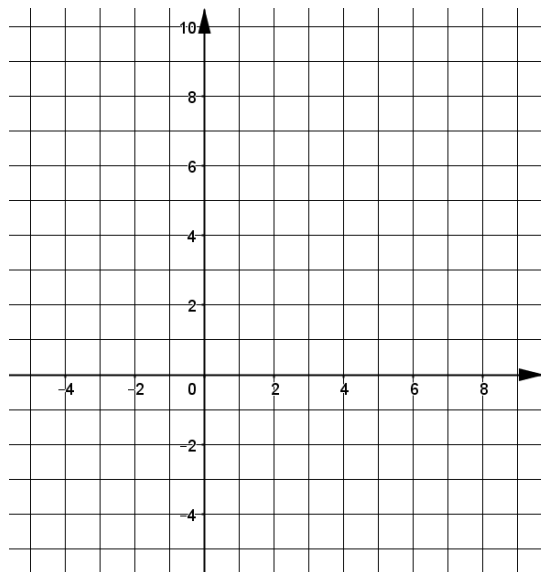
$$-\frac{x}{4} + 2 = 3x - 3$$



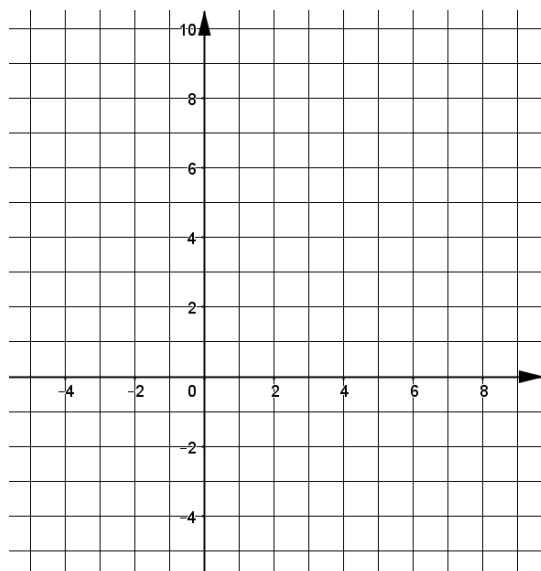


- 2) Általában  
 3) Gyakorlatban

Oldd meg grafikusán:  $3x-5 = 6$



Oldd meg grafikusán:  $\frac{2x}{7} + 2 = \frac{3x}{2} - 1$



Egy oldalra rendezve, szorzattá alakítással oldd meg:

$$x^2+14 = 9x$$

$$2x^2-3x = 2$$

$$2x^2 = 15-7x$$

$$x^4+16 = 8x^2$$

IV) Mikre jó az egyenletek – pl.: néhány szöveges egyenlet

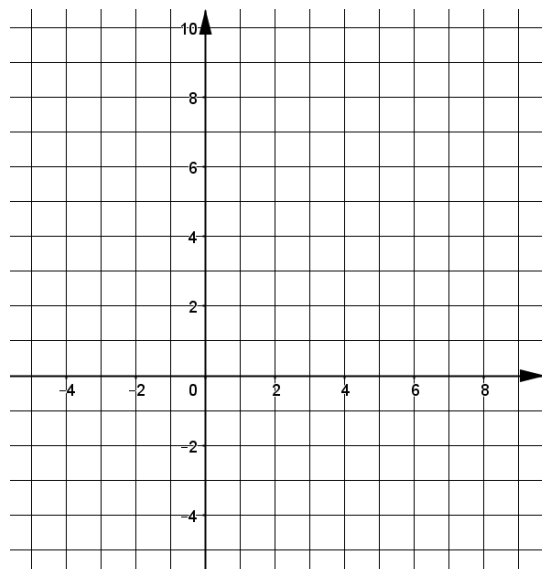
Egy 27 éves apának 3 éves a fia. Hány év múlva lesz az apa háromszor annyi idős, mint a fia?

A büfé kedvezményes árai: „Üdítő + Süti” = 470 Ft. „Üdítő + Pizza szelet” = 530 Ft. „Süti + Pizza” = 560 Ft. Mibe kerülnek külön-külön?

Egy kétjegyű számban a tízesek helyén álló szám 4-gyel kisebb az egyesek helyén álló számjegynél. Ha a számjegyekhez egyet adunk, és utána a számjegyeket felcseréljük, akkor az így kapott és az eredeti szám összege 121. Melyik az eredeti szám?

$$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{3(3x-1)}{x^2-9}$$

Oldd meg az egyenletet grafikusan:  $2x-3 = 2 - \frac{x}{2}$



Mekkorák a  $\Delta$  szögei, ha az egyik szöge  $20^\circ$ -kal nagyobb a másodiknál, és a harmadik szöge pedig  $10^\circ$ -kal kisebb az elsőnél?

Ajánlott:

$$(x+2)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) = -13$$

Egy falu lakossága  $5\%$ -kal nőtt. Így már 126-an vannak. Hány fő volt eredetileg?

60 kg  $25\%$ -os sóoldatunk van. Hány liter (kg) tiszta vizet kell hozzáönteni, hogy  $12\%$ -os oldatot kapjunk?

A boltban  $35\%$ -os (tömeg %) és  $56\%$ -os permetlé van. Azonban  $40\%$ -os oldatra van szükség, mert ez az engedélyezett sűrűség, és ebből 21 kg kell. Hogyan keverje ki az eladó a szükséges oldatot?

Ha egy számot  $20\%$ -kal megnövelek, akkor a  $80\%$ -ánál 24-gyel nagyobb számot kapok. Mi ez a szám?

## Kompetencia-mérések példái

### Torta

Egy tortához 80 dkg liszt, 4 tojás, 30 dkg cukor kell.

Mennyi liszt, tojás, cukor kell: 7 tortához, illetve 20 tortához

Ha van 2 kg cukrom, és ahhoz veszek lisztet és tojást: miből mennyi kell?

Ha van 10 kg liszt, 50 tojás és 4 kg cukor, és a lehető legtöbb tortát sütöm, akkor melyik fogy el, és miből mennyi marad?

Egy autó tankjában 45 liter benzin volt. Az első napi utazás után megmaradt a  $\frac{8}{9}$ -ed része. A második napon elfogyott a maradék 35%-a. Hány liter benzin maradt a tartályban a második nap végén?

5 gyerek 2 óra alatt 80 szendvicset készít. Hányat tudna 12 gyerek 3 óra alatt készíteni?

## V) Ismétlés

### 1) Egyenletek

$$\text{Nem köt.: } \frac{3x}{2x^2 - 4x + 2} + \frac{7x}{12x - 6x^2 - 6} + \frac{1}{3 - 3x} = -\frac{1}{1 - x^2}$$

$$12x^4 - 3x^2 = 3x - 12x^3$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{2}{x} + \frac{5x-1}{x^2+3x} - \frac{x+1}{3x^2+9x} = \frac{\frac{4}{x}}{2+\frac{6}{x}}$$

$$\frac{2x-3}{3x^2-6x+3} - \frac{x+1}{2x-x^2-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2-2x}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{\frac{3x-2}{5x-3}}{\frac{1}{3} - \frac{x}{15x-9}} = \frac{4x+3}{8x-6}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{2}{4x^2+12x+9} + \frac{6}{4x^2-4x+1} = \frac{8}{4x^2+4x-3}$$

2) Egyszerűsíts (Előtte értelmezési tartomány!)

$$\frac{2x-2}{3x^2-6x+3} =$$

$$\frac{4x^2-4}{3x+3} =$$

3) Egyenletek

$$\frac{5x^2-20}{-2x^2+8x-8} - \frac{3x}{10-5x} = -2$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{5}{3x^2-12x+12} = \frac{7}{2x^2-3x-2} - \frac{22}{12x^2+12x+3}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{2}{4x^2-2x} + \frac{3}{x} = -\frac{2}{4x-2}$$

$$\frac{x+2}{3x-1} + \frac{2x+1}{x+5} = -1$$

4) Egyszerűsíts:

$$\frac{4x^2-4x+1}{4x-2} =$$

5) Szöveges gyakorló

Egy háromszög szögeinek aránya: 2:3:4.  
Hány fokosak a szögek?

Egy gépkocsira összesen 3840 kg téglát raktak fel. Az egyik fajtájú téglát tömege darabonként 4,75 kg, a másiké 1,70 kg. Hány téglát tettek fel a kocsira fajtánként, ha összesen 1046 téglát volt a kocsin?

Egy fakereskedő 1 500 erdei köbméter tűzifát vett, 100 euróért köbméterét. Ez szétválogattatta, majd egy részét tűzifaként eladta 10%-os árvesztéssel, de a másik részét rönkfaként tudta eladni 60%-os nyereséggel. Így 7 600 euró haszonra tett szert. Hány köbméter tűzifát és hány köbméter rönköt adott így el?

Két rekeszben összesen 90 kg alma van. Mennyi alma van az egyes rekeszekben, ha tudjuk, hogy az első rekesz almáinak 25%-a a második rekesz almáinak 20%-a?

6) Százalékszámítás

20 gombapörkölt közül 12 friss, 5 romlott, a maradék mérgező.

A gombapörkölteket hányad része friss? \_\_\_\_\_ egyszerűsítve: \_\_\_\_\_ százalékban: \_\_\_\_\_

A gombapörkölteket hányad része romlott? \_\_\_\_\_ egyszerűsítve: \_\_\_\_\_ százalékban: \_\_\_\_\_

A gombapörkölték hányad része mérgező? \_\_\_\_\_ százalékban: \_\_\_\_\_

A 70 pogácsából csak 14 maradt meg. Hány százalék fogyott el?

Tavaly 200 tyúkunk volt, idén 23%-kal több, azaz \_\_\_\_\_% tavalyhoz képest.

A 180 összpontszámból 162-őt értél el, ami \_\_\_\_\_százalék.

### Változás

Hány százalékkal nőtt valami, ha 120-ról 192-re nőtt?

Hány százalékkal csökkent valami, ha 190 helyett ma már csak 76?

Valaminek az ára megnőtt 45%-kal, így ma már 319 euro. Mennyi volt tavaly?

Valaminek az ára lecsökkent 22%-kal, így csupán 936 \$. Mennyi volt tavaly?

Megnőtt az eredetileg 170 forintos kenyér ára 20%-kal, de azután a nagy tiltakozásra lecsökkenték 20%-kal. Mennyi most az ára?

### Gyakorlás

200-nak a 10%-a: \_\_\_\_\_, 25%-a: \_\_\_\_\_ 40%-a: \_\_\_\_\_ 75%-a: \_\_\_\_\_

Mi az a szám, aminek a 25%-a 40? \_\_\_\_\_ És aminek a 60%-a 120? \_\_\_\_\_

Hány százalékot számolunk, ha valaminek a...

kétötödét vesszük? \_\_\_\_\_ 0,02-szeresét vesszük? \_\_\_\_\_ háromnyolcadát vesszük? \_\_\_\_\_



0,123-szorosát vesszük? \_\_\_\_\_

hat ötödét számoljuk? \_\_\_\_\_

0,4-szeresét vesszük? \_\_\_\_\_

1,12-szeresét vesszük? \_\_\_\_\_

**VI)A következő példák a fejezet (Fv-ek – egyenletek B.) végéig 5-ösöknek valók**

$n \in \mathbf{N}$ .  $p$  prím. Oldjuk meg:  $n^4 + n^2 + 1 = p$ . Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

$x, y, z \in \mathbf{N}$ . Oldd meg:  $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 1463$

Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

$p$  és  $q$  pozitív prímek.  $p|q^2-1$  és  $q|p^2-1$ . Mi a két prím? Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

$a, b \in \mathbf{N}$   $2ab + a - 4b - 32 = 0$  Vigyázz, ezt nem lehet szorzattá alakítani. Mégis, valamiféle szorzatra szükség van!

Egy Milka csoki 3 euróba kerül. A csomagolásában van egy kis kártya. 10 kártyáért lehet kapni egy Milka csokit, amiben persze továbbra is ott van egy kártya. Kész idegbaj. Most már tényleg tudni szeretnénk, hogy valójában hány €-ba kerül egy tábla Milka csoki tisztán?

Valaki pozitív egészeket ír egy lapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek.

Az A és a B városból (távolságuk 20 km, egyenes út van köztük) elindul egy gyalogos és egy kerékpáros. A gyalogos 5 km/h-val, a kerékpáros 20 km/h-val halad. Induláskor egy dög légy a gyalogos orráról elindul a kerékpáros orráig 40 km/h-val, majd vissza a gyalogoshoz és így tovább. Hány km-t tesz meg szegény dög légy, míg összehalál a gyalogos és a kerékpáros – és légydög lesz az orrukon.

Egy körre fölrajzoltunk 2020 fehér és egy piros pontot. Az összes lehetséges sokszögek közül, melyek csúcsait ezek a pontok alkotják, melyikből van több: amelyeknek van piros csúcsa, v. amelyeknek nincs? Vagy tán egyenlő? Vagy egyik sem? Vagy ma nincs véleményed?

Nyuszika 10 nyusziugrással van előrébb Vuk-tól. „Fogócskázna.” Míg Vuk 3-at ugrik, addig Nyuszika 5-öt. Vuk ugrása azonban 2-szer nagyobb, mint Nyusziaké. Hány Vugrás után lesz Nyusziakából tepsifüles (Vuk vacsora)?

Hány olyan 6 jegyű páros szám van, amelyben pontosan 1 db. 5-ös számjegy szerepel. És amelyben legalább egy db. 5-ös számjegy van? És amelyikben egy számjegy sincs? Na?

Egy vázában 75 fehér és 150 fekete babszem van, (mellette „talonban” rengeteg fekete). Találomra kiveszünk kettőt. Ami köztük fekete, azt lerakjuk a váza mellé, a maradékot (ha van) visszatesszük. Ha mindkettő fehér: azokat messze eldobjuk és berakunk helyettük egy feketét. Hogyan változik a vázában a babszemek száma? Milyen színű lesz az utolsó babszem? Ha fehér, szeret, ha fekete, nem szeret – vagy fordítva.

**FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK C:  
LINEÁRIS, VAGY LINEÁRIS TÉNYEZŐKBŐL ÁLLÓ  
EGYENLŐTLENSÉGEK  
ILLETVE NEVEZETES SZORZATOK**

I) Bevezetés

1) Számegyenes

Oldd meg:

$$3x(2x-3) - \frac{x(4x-3)}{2} = x(2x-5)$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{x-1}{3x-3} - \frac{4-x}{2x-2} = 1$$

$$\frac{5x-1}{5x+1} - \frac{2x-3}{2x+3} = 0$$

Döntsd el: (az azonos típusok egyenlő súlyúak) - **Igaz, Hamis, Lehet** (lehet igaz is, hamis is)

Ha három körte nehezebb öt almánál, akkor 1 körte nehezebb 1 almánál.

Ha négy körte nehezebb 7 almánál, akkor 3 alma könnyebb 1 körténél.

Egy szám  $-2$  szerese kisebb a számnál.

Egy szám háromszorosa nagyobb a számnál.

Egy negatív szám  $2$ -szerese nagyobb a számnál.

Egy szám ötöde kisebb a számnál.

Egy nem  $0$  szám nagyobb a reciprokánál.

Egy nem  $0$  szám kisebb a reciprokánál.

Egy egynél nagyobb pozitív szám kisebb a négyzeténél.

Van olyan negatív szám, ami nagyobb a négyzeténél.

Ha Péternek és Pálnak együtt több ötöse van, mint Jánosnak és Lászlónak együtt, akkor Péternek több ötöse van, mint Lászlónak.

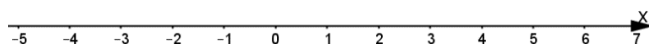
$$x \geq -x$$

Határozd meg azokat az  $x$ -eket **intervallummal**, utána **jelöld számegyenesen!**

A számegyenesen egy-két ponton ellenőrizd, amit műveltél...

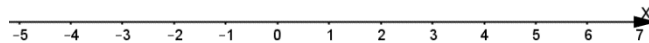
$$-4 < x \leq -1$$

$x \in$



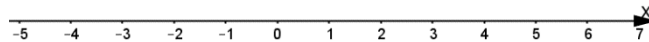
$$x \geq 3 \wedge x < 5$$

$x \in$



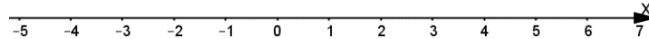
$$x \geq 3 \vee x < 5$$

$x \in$



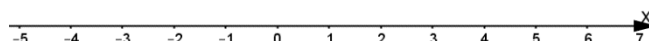
$$3 < x \wedge 5 \leq x$$

$x \in$



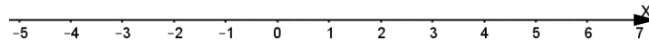
$$5 < x \vee 6 \leq x$$

$x \in$



$$2 \leq x \vee (x < 0 \wedge -3 \leq x)$$

$x \in$



II) Lehetséges, „nyakló nélkül” végrehajtható átalakítások az egyenlőtlenségeknél, illetve célok (egy oldal, szorzat stb.)

1) A lényeg: ekvivalens átalakítások legyenek

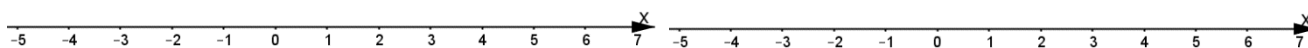
Add meg az egyenlőtlenség megoldásait a természetes számok halmazán:  $9x \leq 36$

Nem kötelező: Add meg az egyenlőtlenség megoldásait a természetes számok halmazán:  $3x \leq 20$

Add meg intervallummal a megoldást és ábrázold számegyenesen:

$$4x-3 < 7$$

$$4x+12 \geq 0$$

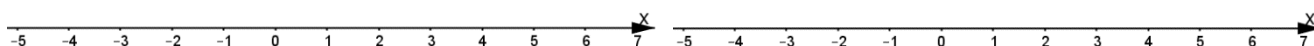


2) „Beszorított”, „kettős egyenlőtlenségek” kezelése

Oldd meg, utána add meg intervallummal, illetve számegyenesen a megoldást:

$$-7 \leq 3x-2 < 10$$

$$-7 < 3-2x \leq 11$$



Írd át a párjára:

halmazelméleti jel  $\Leftrightarrow$  reláció- és logikai jel. pl.:  $x \in ]-3;4]$   $\Leftrightarrow -3 < x \leq 4$

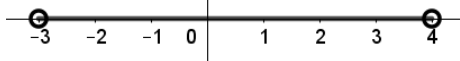
$x \in [-4;3[ \cup ]2;8[ \Leftrightarrow$

$x \in ]-\infty;-2] \cup ]0;\infty[ \Leftrightarrow$

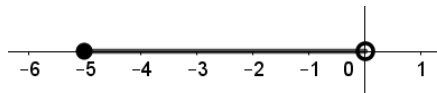
$\Leftrightarrow x < 3 \vee x > 7$

$\Leftrightarrow x < 1 \wedge x \geq -5$

3) Írd föl intervallummal:



$x \in$

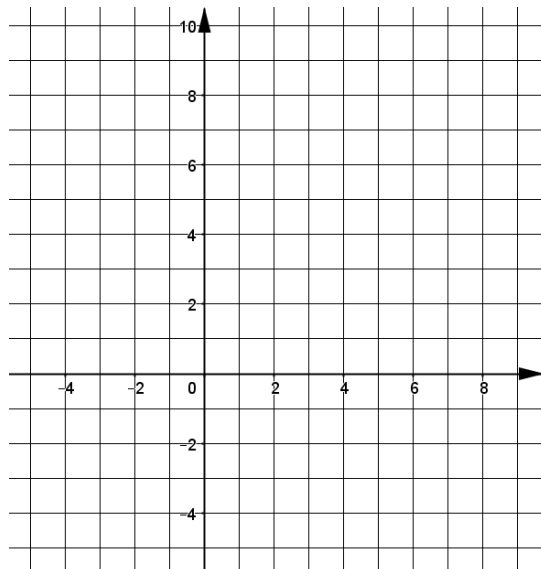


$x \in$

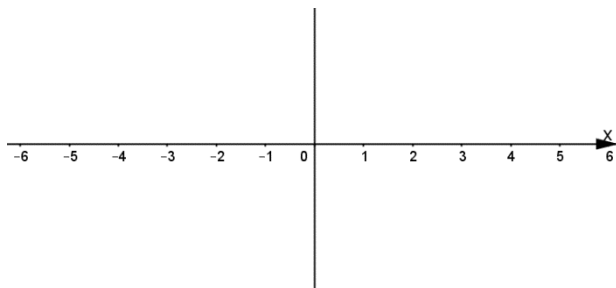
4) Nagyon kényelmes „magasabb fok”: egy oldalra rendezve, szorzattá alakítva:

Vizsgáld meg, hogy a következő fv. melyik intervallumon vesz föl  $\ominus$ , 0, illetve  $\oplus$  értéket:

$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x - 5$

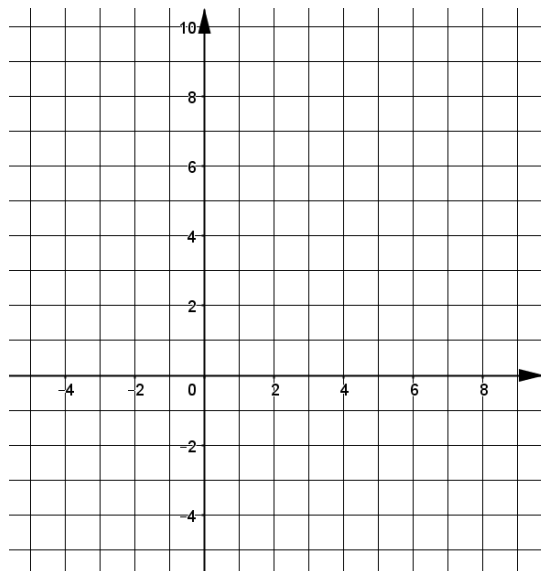


Ábrázold is az előjelgrafikont itt:

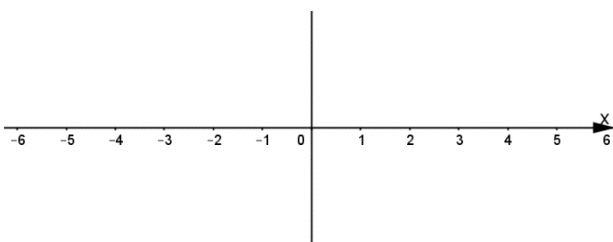


Vizsgáld meg, hogy a következő fv. melyik intervallumon vesz föl  $\ominus$ , 0, illetve  $\oplus$  értéket:

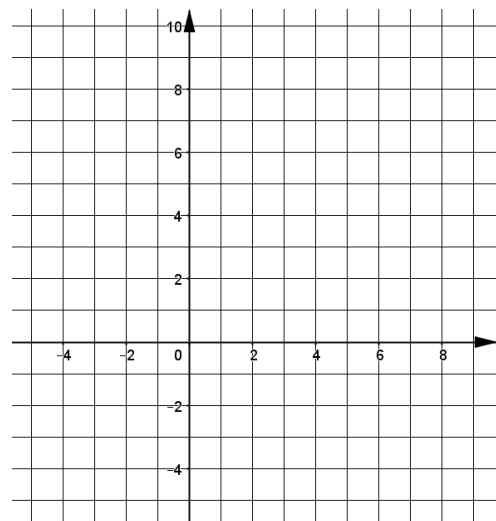
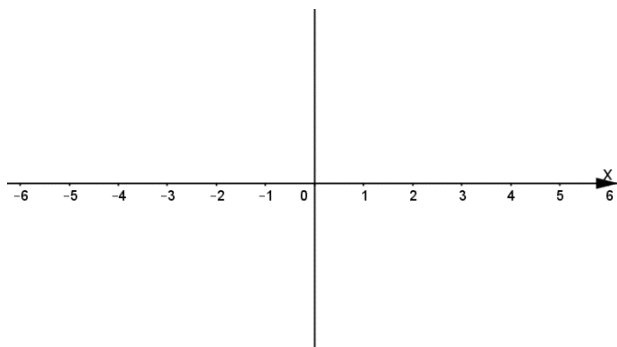
$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -9(x-3) - 2(15-3x)$  (Érdekes előtte normálisan „lineáris fv. alakra hozni”!)



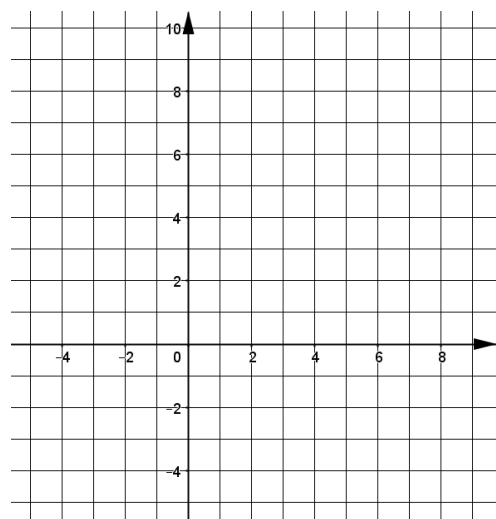
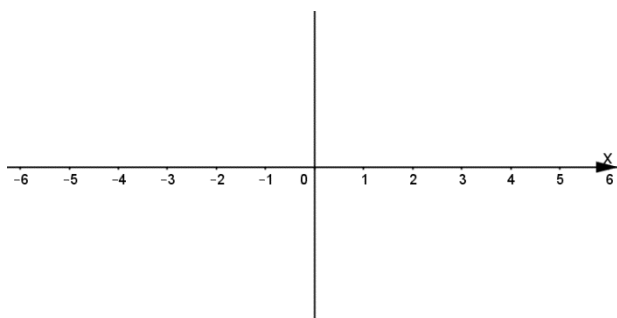
Ábrázold is az előjelgrafikont itt:



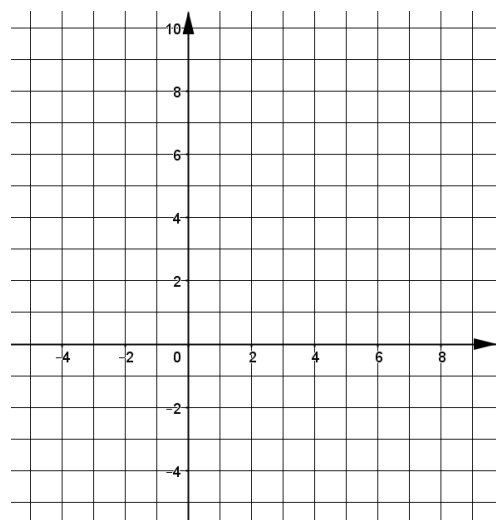
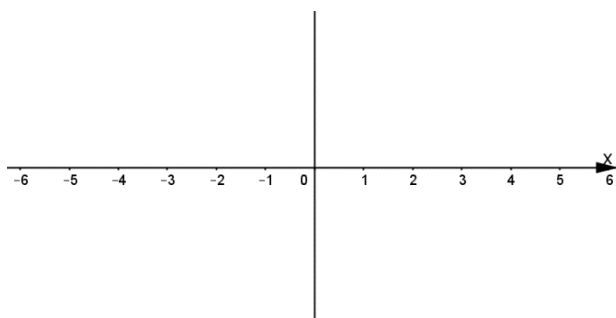
Oldd meg úgy, hogy fv-t és előjelgrafikont ábrázolsz:  $(2x-5)\left(\frac{3x}{2}+6\right) \geq 0$



Oldd meg úgy, hogy fv-t és előjelgrafikont ábrázolsz:  $\left(\frac{x}{3}-1\right)(2x+6) < 0$

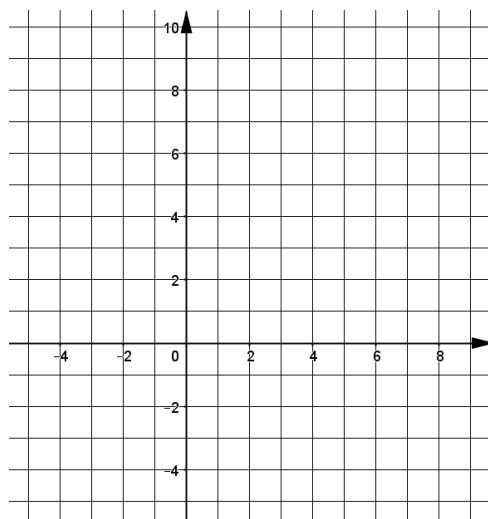
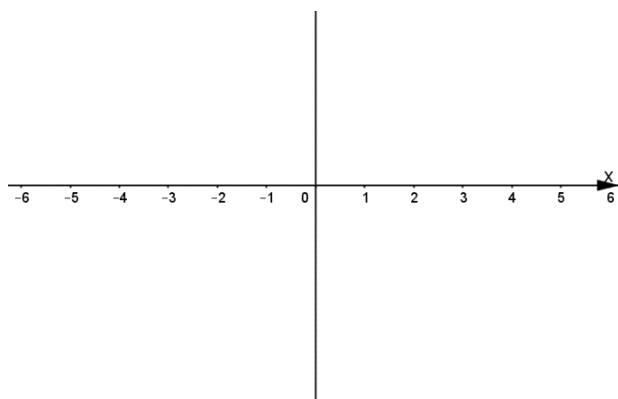


Nem kötelező. Oldd meg úgy, hogy fv-t és előjelgrafikont ábrázolsz:  $(8-2x)\left(\frac{2x}{3}+2\right) > 0$



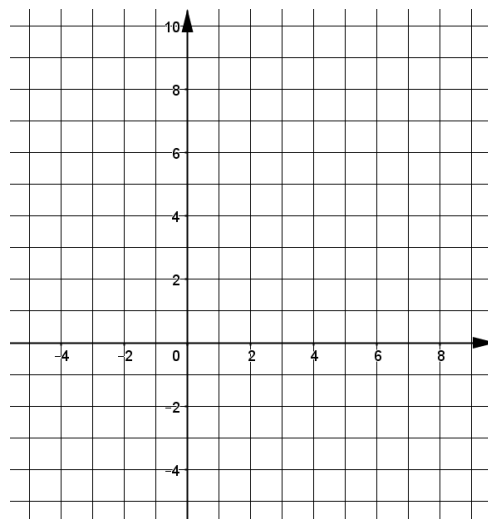


Nem kötelező: Oldd meg úgy, hogy fv-t és előjelgrafikont ábrázolsz:  $(3x-7)(5-x)(3+x) < 0$

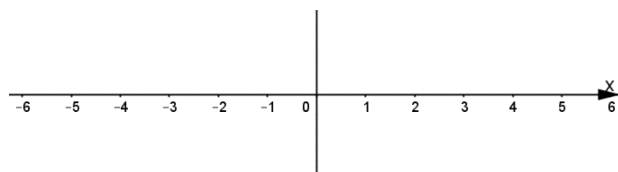


5) Rajzold föl a függvényt és az előjelgrafikont

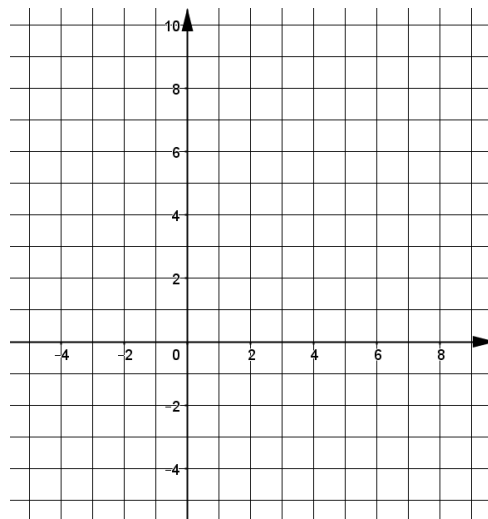
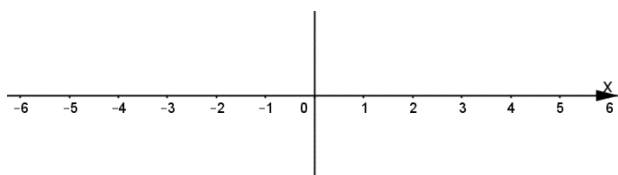
$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 3x - 1$



$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2x + 3$



$h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{1}{2}x - 2$



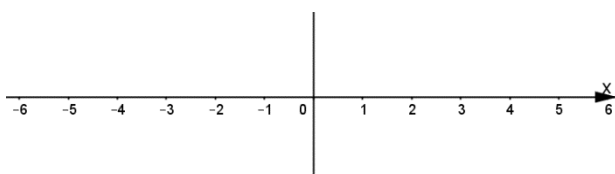
Oldd meg előjelgrafikont használva!

$$x(2x-4) > 0$$

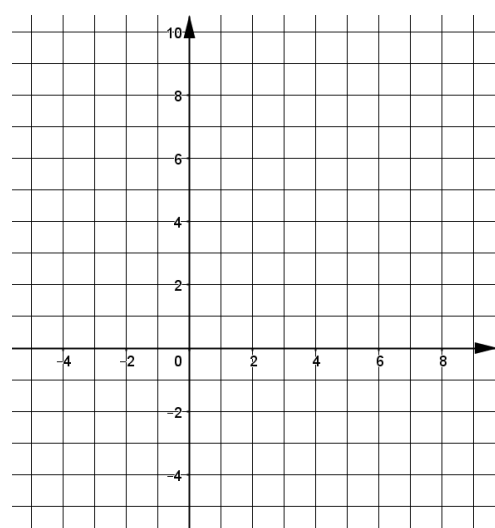
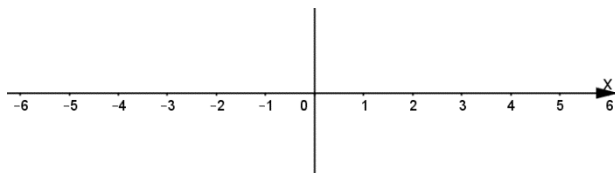
$$(1-x)(x-4) \leq 0$$

Rajzold le a függvényt és az előjelgrafikont!

$$h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{2}{3}x - 2$$



$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = -2x$$



Oldd meg előjelgrafikont használva!

$$(2x+3)(3-x) < 0$$

$$-25x^2 + 9 \geq 0$$

$$2x^2 > 5x + 3$$

III) Az egyenlőtlenségek megoldásának buktatói és gyakorlás. EKVIVALENCIA jel!

1) Negatív számmal történő osztás-szorzás: szabad, néha **kell**, de óóóóvatosan!

$$-5x < 15$$

$$-3x \geq -18$$

$$\frac{3x-2}{8} - \frac{x+5}{4} \geq \frac{15-5x}{20}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{3(x-11)}{5} > 6$$

2) Ismeretlent tartalmazó tényezővel, vagy ismeretlennel történő osztás, szorzás: nagyon veszélyes:  
I. II. III. részre esik szét általában – INKÁBB NE!!!

Egy oldalra rendezés, „szorzattá alakítás” (összevonás: egy tört legyen) majd előjelgrafikon!

$$\frac{7}{x-5} \geq -2$$

Oldd meg:

$$\frac{5x-3}{3} - \frac{2x-1}{2} \leq \frac{2x-3}{6}$$

$$\text{Nem köt.: } 4(x-3) - 3(3-2x) > 3+6x$$

Egy oldalra rendezés, „szorzattá alakítás” (összevonás: egy tört legyen) majd előjelgrafikon!

$$\frac{12x-4}{5x-4} < 2$$

$$\frac{7x+2}{2x-1} \leq 4$$

Nem köt.:  $\frac{x}{x+2} \geq 2$

3) Reciprok: SOHA SOHA SOHA SOHA SOHA

Egy oldalra rendezés, „szorzattá alakítás” (összevonás: egy tört legyen) majd előjelgrafikon!

$$\frac{1}{x} < 1$$

$$\text{Oldd meg: } \frac{2}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{x} \leq -1$$

$$\frac{21}{x-3} > 7$$

#### IV) Gyakorlás

$$\frac{4}{3}(3x-1) - \frac{1}{5}(15x-2) \leq -1$$

$$\frac{x-2}{2} - \frac{x}{3} > \frac{2x-5}{5}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{5x-1}{2} - \frac{4x}{3} \leq \frac{2x+3}{4} - \frac{3-2x}{6}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{2x-1}{2} - \frac{x-6}{3} \geq -\frac{x-9}{6}$$

$$5x^2 + 4(x-1)^2 > (2-3x)^2 + 3$$

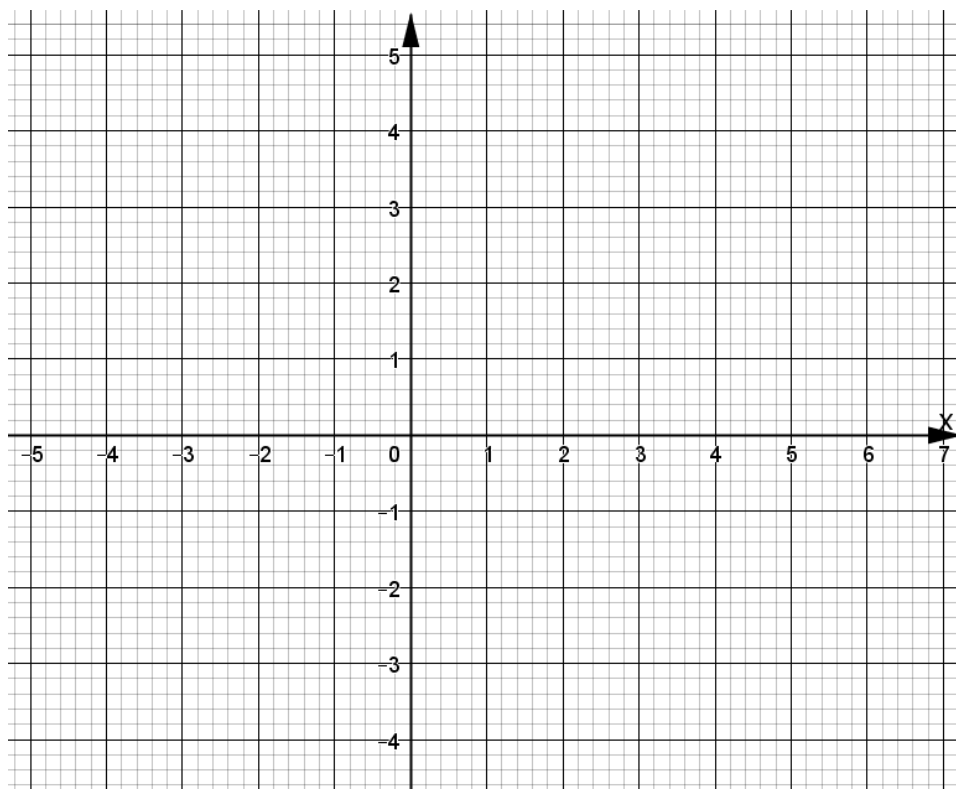
$$\frac{3x-4}{2} - \frac{x-3}{3} > \frac{7x}{6} - 2$$

$$(5x-2)^2 + 10x < (3-5x)^2$$

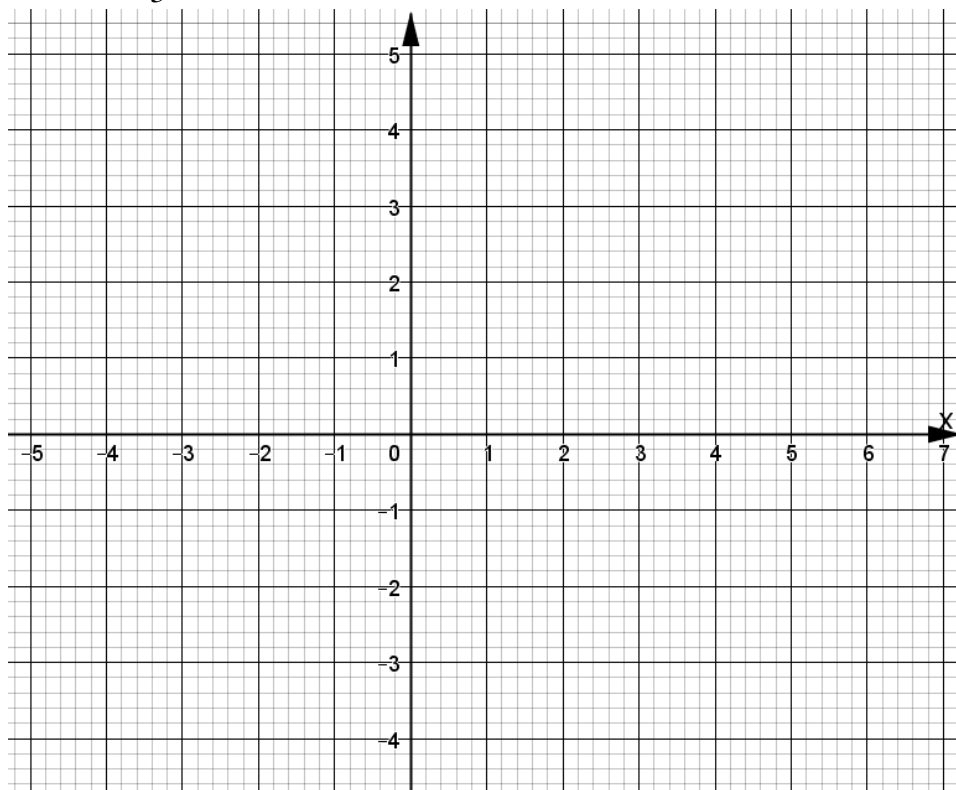
V) Grafikus megoldás

1) Oldd meg grafikusan:

$$\frac{2x}{3} - 1 \geq -2x + 1$$

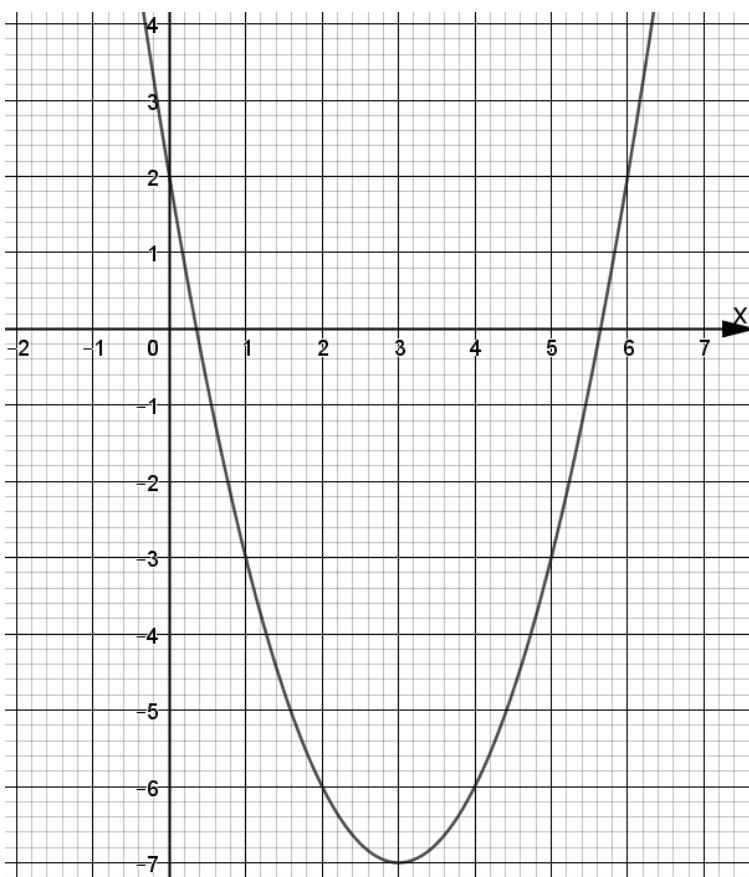


Nem kötelező: Oldd meg grafikusan:  $\frac{2x}{3} + 1 \geq 3x - 3$

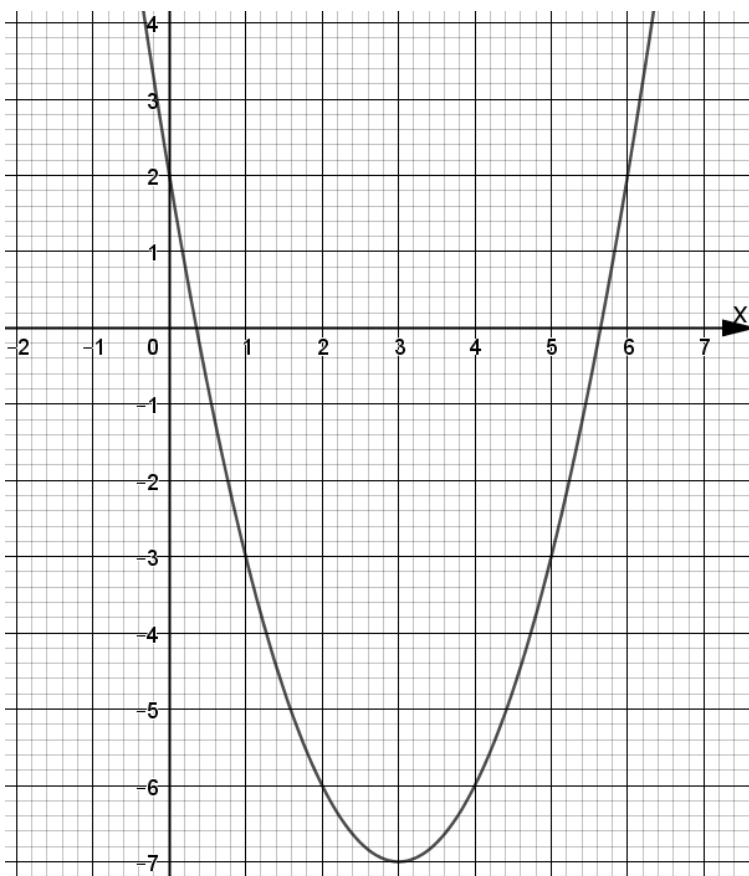


Oldd meg grafikusan (a bal oldal grafikonja adva!)

$$x^2 - 6x + 2 \geq -x + 2$$

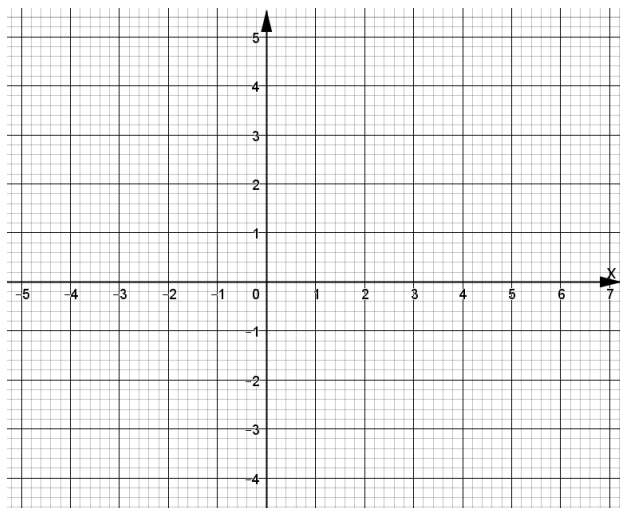


$$x^2 - 6x + 2 < \frac{x}{2} - 3$$

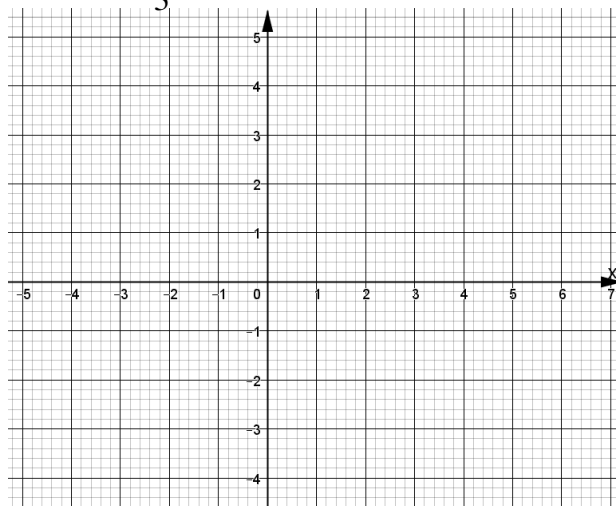


2) Gyakoroljuk a grafikus megoldást!

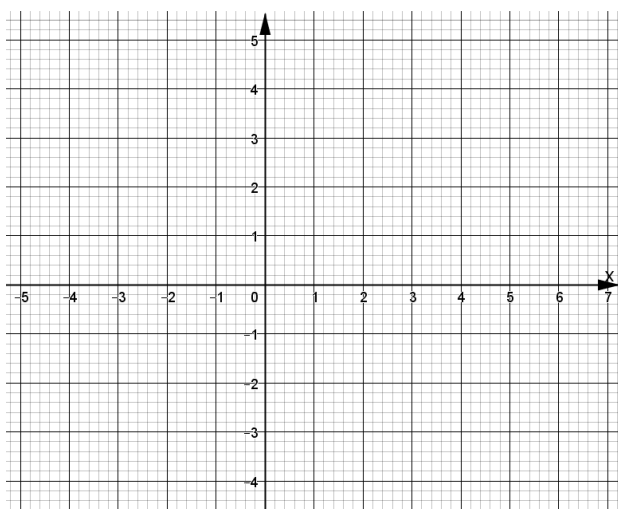
$$2x-3 \leq -x+2$$



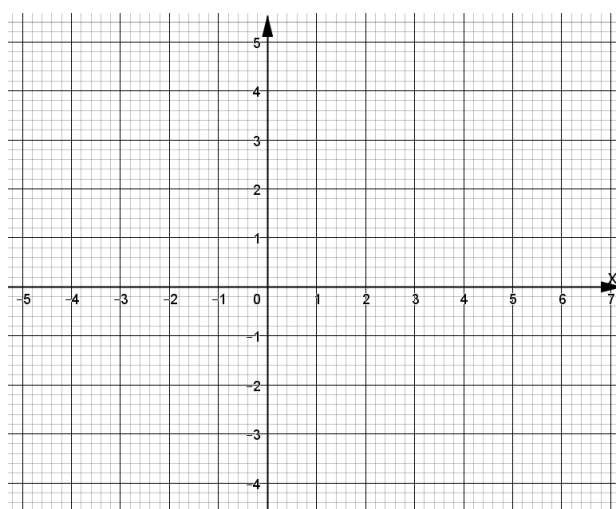
Nem köt.  $-\frac{1}{3}x+1 \leq 2x-4$



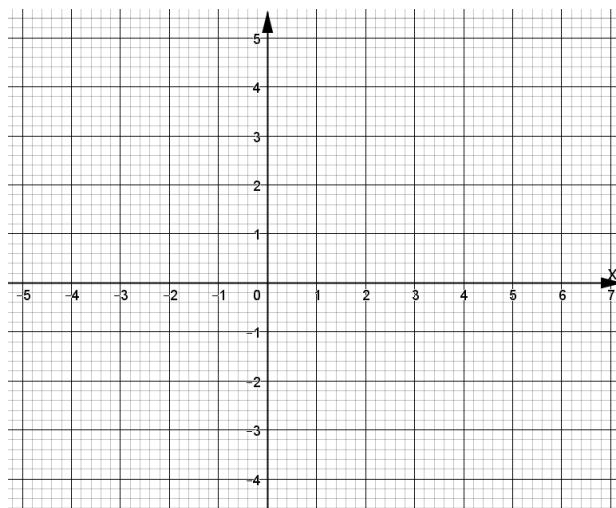
Nem köt.:  $x+4 < x-3$



Nem köt.:  $2x+1 > x+4$



Oldd meg grafikusan:  $2x-1 \leq 3-\frac{x}{2}$





VI) Szorzatok

1) Alap -- ELŐJEL GRAFIKON!

$$-3x(2x+3)(x-4) > 0$$

$$-5x(3x-2)(-x+4) > 0$$

**Egy oldalra rendezés (0-ra redukálás), majd szorzattá alakítás – majd előjel grafikon!**

$$10x^2 > 40$$

$$\text{Nem köt: } x^2 + x \leq 6$$

$$\text{Nem köt: } (3x-4)(5-x) < 0$$

$$\text{Nem köt: } (x+2)^2 - 2 < 2x+5$$

(Vedd észre, hogy mindig milyen a 3. tényező... Óvatosan dolgozz...)

$$(3x-2)(2x-3)(-x^4-4) \leq 0$$

**Egy oldal – majd szorzattá alakítás – majd előjel grafikon!**

$$-3x^3+12x \geq 0$$

$$\text{Nem köt.: } (x+2)^2 \leq x+4$$

$$(x-3)(4x^2-9) \geq 0$$

$$2x^2 \leq 1-x$$

$$\text{Nem köt.: } (-3x-9)(4-2x)(5-5x) < 0$$

$$\text{Nem köt.: } x^2+3x+2 > 5x+5.$$

$$12x \geq 3x^3$$

$$\text{Nem köt.: } 5x+3 \geq 2x^2$$

**Egy oldal – majd szorzattá alakítás – majd előjel grafikon!**

Nem köt.:  $(x+2)^2 - 2 < 2x+5$

Nem köt.:  $x^2+4x > 5$

$4x^3+27 \geq 9x+12x^2$

Nem köt.:  $x^2 \leq 2x-1$

Nem köt.:  $(3x-8)(6-2x)(5+x) < 0$

Nem köt.:  $-2x^2+5x+3 \geq 0$

$-8x^3 < -18x$

Nem köt.:  $9x^3 < 4x$

VII) Törtés egyenlőtlenségek

1) Alap

Nem köt.:  $(36-4x^2)(x-3) \leq 0$

$$4x^3 + 20x^2 \leq x + 5$$

$$* 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \geq 0$$

5-ösök: Elég a végeredményt leírni:  $(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

2) Egy oldalra rendezünk, szorzattá alakítunk...

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 3$$

Nem köt.:  $\frac{x+2}{2x+4} \geq 0$

$$\frac{(3x-6)(x+2)}{2x+1} \leq 0$$

5-ösök:  $\frac{x^2-4}{x^2+5} \leq 0$

3) Gyakorlás

$$\text{Nem köt.: } \frac{2x-4}{2-x} \geq 0$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{x^2-2x+1}{x^2-4} \geq 0$$

4) Összetettebb

$$\frac{2x+3}{x-1} \geq 2$$

$$* \frac{(x-3)(1-x)(x-1)(3-x)}{x^2-16} \geq 0$$

$$\frac{5x-5}{4x-3} < 2$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{3-2x}{-5x-3} \leq 0$$

5)

$$\frac{2x-1}{3x-3} \geq 3$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{4x^2-5x-1}{(x-2)(2x+1)} \leq 2$$

6)

$$\frac{5x+2}{3x-1} \leq 2$$

$$\text{Nem köt. } \frac{2}{x+2} \leq \frac{5}{x-5}$$

7)

$$\frac{2x+3}{x-3} \geq \frac{2x-5}{x-5}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{5-3x}{-x^2+4x-4} \geq 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-2}{x+1}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{3x^2-12}{(2x-4)(x+5)} \leq \frac{2x-6}{4x+20}$$

Nem köt.:  $\frac{x+1}{x(x+2)} + \frac{x-1}{(x+3)(x+2)} < \frac{2}{x+2}$

\*  $\frac{3}{2x-1} \leq -1 + \frac{5}{2x+3}$

8)

$$\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x-2}{x+3}$$

Nem köt.:  $\frac{3}{2x-1} \geq \frac{5}{3-x}$

Nem köt.:  $\frac{2x}{2x-1} > \frac{x-3}{3-x}$

VIII) Teljes köb, 4. hatvány, Pascal  $\Delta$  és még két új típus:  
Írd föl a Pascal-háromszög első 6 sorát!

$$(a+b)^3 =$$

$$(x+y)^4 =$$

Ezeket fejből is tudod leírni

$$(x+y)^3 =$$

$$(x-1)^3 =$$

$$(a-b)^3 =$$

$$(x-5)^3 =$$

$$(x+1)^3 =$$

$$(x-2)^3 =$$

Segít a Pascal  $\Delta$ .

$$(3x-4)^3 =$$

$$(2x-3)^3 =$$

$$(x-1)^4 =$$

$$(x-3)^4 =$$

$$(2y+5)^3 =$$

$$(2x+3)^4 =$$

$$(5x-2)^4 =$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$(3a-2b+c)^2 = (3a-2b+c)(3a-2b+c) =$$

$$(2x-3y-5)^2 = (2x-3y-5)(2x-3y-5) =$$

\* Alakítsd szorzattá az  $a^4+4$  -et. (segítség: adj hozzá és vonj ki  $4a^2$ -et!)

$$\text{Végezd el: } (a-2)(a^2+2a+4) =$$

$$\text{Végezd el: } (2x-3)(4x^2+6x+9) =$$



Alakítsd szorzattá

$$x^3 - y^3 =$$

$$y^3 - 1 =$$

$$x^3 - 2^3 =$$

$$x^3 - 27 =$$

$$6x^3 - 6 =$$

Figyelj: „In medio est virtus”:  $a^6 - b^6 =$

Végezd el:  $(a+2)(a^2-2a+4) =$

Végezd el:  $(2x+3)(4x^2-6x+9) =$

Alakítsd szorzattá:

$$4x^3 - 4 =$$

In medio est virtus:  $x^6 - 64 =$

$$4x^3 - 8x^2 - 9x + 18 =$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 =$$

Végezd el:

$$(2a-3)^3 =$$

Alakítsd szorzattá:

$$x^3 + y^3 =$$

$$a^3 + 8 =$$

$$y^3 + 27 =$$

$$3x^3 + 375 =$$

„In medio est virtus”:  $320x^6 - 5 =$

Végezd el kutyü nélkül:  $\frac{502^2 - 498^2}{501^2 - 499^2} =$

Oldd meg (egy oldal, szorzat, előjelgrafikon...):

$$75x \leq 12x^3$$

$$\frac{3x+8}{2x+3} < 2$$

# FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK D: LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK ÉS SZÖVEGES TÍPUSFELADATOK

## D) Halmazok

### 1) Bevezetés

Egy egyenlőszárú  $\Delta$  kerülete 26 egység. Ha az egyik oldal felezőpontjára tükrözzük a háromszöget, akkor a kapott paralelogramma kerülete 32 egység. Mekkora az oldalak? Rajzolj! (Vigyázat, többféle eredmény is lehet!)

\* Egy derékszögű  $\Delta$  kerülete 30 egység. A beírt kör sugara 2 egység, és az egyik befogó 7 egységgel nagyobb, mint a másik. Mekkora az oldalak?

Péter 10-es és 20-as kopejkákat (pénzegység) gyűjt.

a) Hány 10 és 20 kopejkása lehet, ha összesen 1000 kopejkája van? Írj 3 példát rá!

b) Hány 10 kopejkása van, ha 5-tel több 20-asa van, mint 10-ese, és összesen 1000 kopejkája van?

Kell  $P(x;y) \in S \rightarrow 3x+2y = 6$

(Rajzold föl azokat a pontokat a koordináta-síkban, amelyek  $(x;y)$  koordinátái megoldásai az egyenletnek!)

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

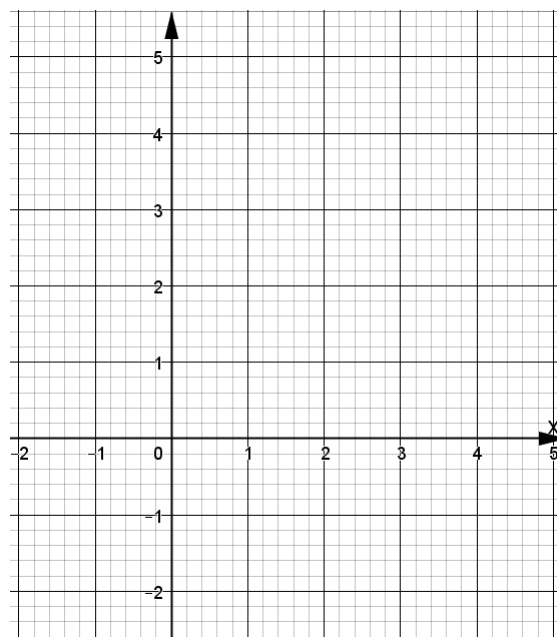
Olvass is le két ilyen pontot, és helyettesítsd be a koordinátákat az összefüggésbe!

$A(0; \quad)$

$3 \cdot (0) + 2 \cdot (\quad) =$

$B(3; \quad)$

$3 \cdot (3) + 2 \cdot (\quad) =$



Nem köt.: Kell  $P(x;y) \in S \rightarrow 3x-5y = 10$  (Rajzold föl azokat a pontok a koordináta-síkban, amelyek  $(x;y)$  koordinátái megoldásai az egyenletnek!)

$$f():\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

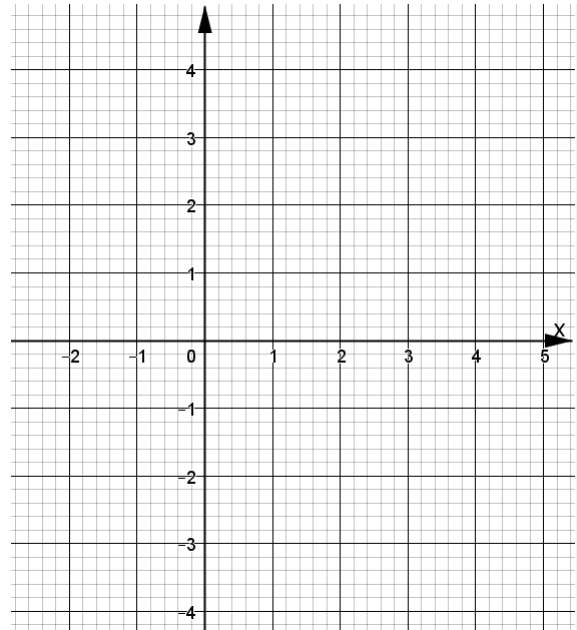
Olvass is le két ilyen pontot, és helyettesítsd be a koordinátákat az összefüggésbe!

$$A(-2; \quad)$$

$$3 \cdot (\quad) - 5 \cdot (\quad) =$$

$$B(4; \quad)$$

$$3 \cdot (\quad) - 5 \cdot (\quad) =$$



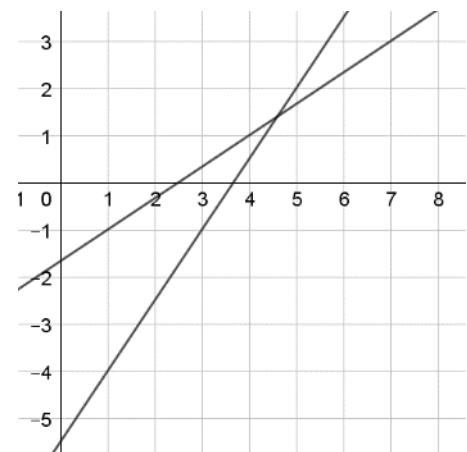
Az alábbi egyenletrendszerben fejezd ki mindkét egyenletnél  $y$ -t az  $x$ -ből, írd föl a két függvényt, és írd rá a grafikonra melyik-melyik. Olvasd le a grafikonról az  $(x;y)$  megoldás számpárt, és visszahelyettesítéssel ellenőrizz. Legyen kb. jó!

$$\begin{aligned} 2x-3y &= 5 \\ \underline{3x-2y} &= 11 \end{aligned}$$

$$f():\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

$$g():\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

Helyettesítsd be mindkét egyenletbe a megoldás számpárt!



2) Algebrai módszerek: 1: A behelyettesítő módszer

$$\begin{aligned} 6x-6y &= 24 \\ \underline{2x-3} &= -3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 2 \\ \underline{6y} &= 2x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7,6 \\ \underline{-5x + y} &= \underline{-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - 2y &= 12 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} &= -\frac{13}{10} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+2}{3} &= \frac{4-y}{2} + 1 \\ \frac{x-5}{5} + \frac{y-3}{5} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

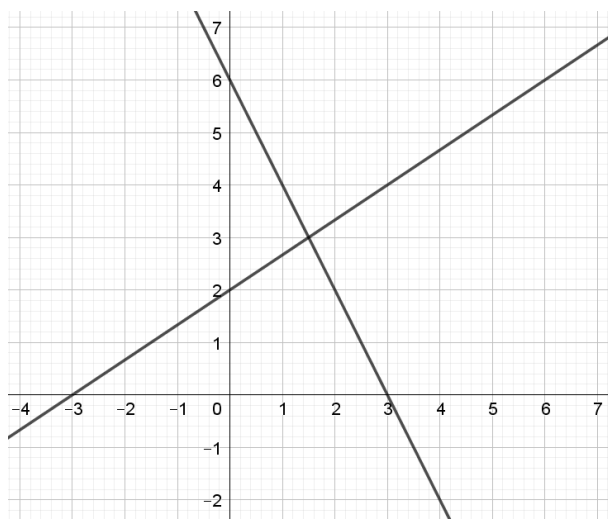
5-ösök...: Mi legyen az  $a$  és a  $b$  szám, hogy ha azt szeretnénk, hogy az egyenletrendszernek

- egy megoldása legyen (ilyen sok lehet)
- egy megoldása se legyen (itt az  $a$  csak egy szám lehet, a  $b$  azonban sokféle).
- végtelen sok megoldása legyen (ilyen egy pár lehet)

$$\begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ \underline{2x + ay} &= \underline{b} \end{aligned}$$

Gondoltam két számra. Ha a nagyobbikból kivonom a kisebbet, 30-at kapok. Ha a nagyobbik feléhez hozzáadom a kisebbet, akkor nagyobbiknál eggyel kisebb szám hetedét kapom. Melyek ezek? Írd fel  $x$ -et és  $y$ -t felhasználva az egyenletrendszert és oldd meg!

Az ábrán egy lineáris egyenletrendszer grafikus megoldása látható. Írd föl az egyenletrendszert, majd oldd meg algebrailag. (Le kell olvasni a grafikonról az egyenletekből gyártott lineáris fvk hozzárendelési szabályait!)



### 3) Algebrai módszerek 2: Egyenlő együtthatók módszere

Apa és Fia együtt 60 évesek. 15 év múlva a Fiú fele annyi idős lesz, mint akkor az Apa. Hány évesek most? Apa =  $x$ , Fiú =  $y$  (Érdeemes észben tartanod, hogy 15 év múlva mindketten idősebbek 15 évvel ☺)

Nem köt: Egyenlő együtthatók módszerével!

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - 5y = -11 \\ \frac{x}{8} + 10y = 31 \end{array} \right\}$$

Egyenlő együtthatók módszerével:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 14y = 12 \\ 6x - 14y = 6 \end{array} \right\}$$

Egyenlő együtthatók módszerével:

$$\left. \begin{array}{l} 7x - 4y = 13 \\ 5x + 6y = 27 \end{array} \right\}$$

Ajánlott: Egyenlő együtthatók módszerével:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 11 = y \\ 2x - 5 = \frac{y}{5} \end{array} \right\}$$

Egyenlő együtthatók módszerével. Vedd észre, hogy az első egyenlet egyszerűsíthető...

$$\left. \begin{array}{l} 28x + 35y - 42 = 0 \\ 8x + 5y = 2 \end{array} \right\}$$

Ajánlott:

$$\left. \begin{array}{l} 12x + y = -9 \\ 8x - 7y = -29 \end{array} \right\}$$

Egyenlő együtthatók módszerével. Vedd észre, hogy az első egyenlet egyszerűsíthető...

$$80 - 20y = -20x$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{2} = y - 6}}$$

$$\text{Nem köt.:} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3y}{2} - \frac{3x+y}{3} = -13 \\ x-y+2 = \frac{3x-2y}{5} \end{array} \right.$$

Amelyik módszerrel akard:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a-5b}{5} - \frac{3a-2b}{3} &= -3 \\ (3a+1)(2b+1) &= (2a-2)(3b+2) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (4x-3)(y+6) &= 2(x+1)(2y+5) \\ \underline{(7-x)(6y+11) &= (-2x-1)(3y+8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18x-12 &= 6y \\ \underline{10-20x} &= 10y \end{aligned}$$

$$* \begin{cases} \frac{8x^3 + 27y^3}{4x^2 - 6xy + 9y^2} = -7 \\ (x+4y+1)^2 = 0 \end{cases}$$

- 4) Módosított Gauss-féle elimináció (az egyenlő együtthatók módszerének továbbvitele) három- ismeretlenes egyenletrendszerénél

$$\begin{array}{rcl} 2x & +y & -z = -1 \\ 3x & -y & +2z = 14 \\ \underline{x} & \underline{-2y} & \underline{-2z = 0} \end{array}$$

Először egy oldalra az ismeretlenek, abc sorrendben, másik oldalon a konstans. **Nagyon szépen, táblázatszerűn nézzen ki:**

$$\begin{array}{l} 3y-2x = 1+z \\ 13-5x = 2z+y \\ \underline{x+2y-2z+1 = 0} \end{array}$$

- 5) Új ismeretlen bevezetése

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{36}{2x-y} + \frac{35}{x+2y} = 9 \\ \frac{18}{y-2x} + 5 = \frac{21}{x+2y} \end{array} \right.$$

$$\text{Nem köt.:} \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{x-2} + \frac{4}{y+1} = -\frac{11}{5} \\ \frac{2}{2-x} - \frac{3}{y+1} = \frac{27}{5} \end{array} \right.$$



Nem köt.:

$$\begin{cases} 2x + \frac{6}{y} = 10 \\ 5x - \frac{9}{y} = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{14}{x} - \frac{7}{y} = -7 \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{2x+y+1} + \frac{1}{2-2x+y} = 7 \\ \frac{8}{4x+2y+2} + \frac{1}{2x-y-2} = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{18}{x+2y} + \frac{8}{2x-y} = 3 \\ \frac{6}{2x+4y} + \frac{4}{3y-6x} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

## II) Példák az lineáris egyenletrendszerek használatához

### 1) Szövegesek átírása több-ismeretlenes egyenletrendszerré

Egy háromjegyű számban a középső a két szélső összegével egyenlő. A megfordítjuk a jegyek sorrendjét és ebből a háromjegyűből kivonjuk az eredetit, akkor 198-at kapunk, de ha a kettőt összeadjuk, akkor 968-at. Melyik ez a háromjegyű szám?

Cecil hétszer olyan idős, mint Aladár. Aladár kétszer olyan idős, mint ahány évvel Béla idősebb Cecilnél. Két éve Béla annyi idős volt, mit akkor Cecil és Aladár együtt. Hány évesek?

Nem köt.:  $(2x-y+1)^2+(x-3y+2)^2 \leq 0$

Nem köt.: Ha egy kétjegyű pozitív számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott szám kétszeresét akkor 204-et kapunk. Az eredeti szám első számjegyének háromszorosa eggyel nagyobb, mint a második számjegy. Mi az eredeti szám?

Az udvaron a tyúkok és csibék aránya 2:5. Ha azonban kikel még 5 tojás (csibe lesz belőle... - nem kicsi raptor, vagy rántotta), de kettő tyúkból pörkölt lesz, akkor a tyúkok és csibék aránya 2:7. Hány tyúk és csibe volt kezdetben.

$$(2x+3y-11)^2+(3x+2z-13)^2+|4y+4z-32|=0$$

Nem köt.:

A 8. évfolyam két osztályának létszáma úgy aránylik egymáshoz, mint 6:5. Ha azonban a nagyobb osztályból büntetésből áttesznek 5 tanulót a másik osztályba, akkor az arány épp a fordított lesz. Hány-hány gyerek van az osztályokban?

III) Egyéb egyenletek: egyismeretlenes v. többismeretlenes egyenletek - egyenletrendszerek: Cél: átírni egyismeretlenes, vagy két- ill. többismeretlenes egyenletté:

1) Egyszerűbb, csak „átkódolandó” szövegek.

Péter maszkot és fertőtlenítőt vásárol. 40 eurója van. Ha 10 maszkot és 6 fertőtlenítőt vesz, akkor két eurója megmarad. De ha 6 maszkot vesz és 10 fertőtlenítőt, akkor még két euró hiányzik. Mi a maszk és a fertőtlenítő ára?

21 csokit vettem átlagosan 12 euró darabja (sajna elég drágák...). Egyet elajándékoztam.

a) Ha a maradék csokik átlagára nem változott, akkor hány eurós csokit ajándékoztam el?

b) Ha a maradék csokik átlagára 11 euró lett, akkor hány eurós csokit ajándékoztam el?

Egy farmon lovak és tyúkok élnek. 75 fejük van összesen és 230 lábuk. Hányan vannak külön-külön? (Egyenletrendszerrel!)

Aki 5-ös akar lenni: Oldd meg az egészek halmazán:  $2ab + b = 183 - 6a$

A vizsgaterembe padokat állítanak be. Ha minden padba két tanulót ültetnek, akkor 2 vizsgázónak nem jut hely. Ha viszont minden padba 3 vizsgázó ül, akkor még 18 vizsgázó elférne. Hány pad és hány vizsgázó van?

16 év múlva az apa kétszer idősebb lesz a fiánál. Hány évesek most, ha 4 évvel ezelőtt az apa hatszor annyi idős volt, mint a fia?

Egy kétjegyű számnak és a számjegyeinek felcserélésével kapott számnak az összege 121. Ha az eredeti számot elosztjuk a számjegyeinek a felcserélésével kapott számmal, akkor a hányados 2, a maradék 7 lesz. Mi az eredeti szám?

2) Százalékos és keveréses feladatok. Figyelem: olyan nincs, hogy „20%”. Olyan van, hogy

„valaminek a 20%-a, vagyis:  $\boxed{\text{valami} \cdot \frac{20}{100}}$

Mi az a szám, aminek a 25%-a 35?

Mi az a szám, aminek a 60%-a 180?

Hány százalékkal csökkent, ami 240-ről 168 egység lett?

Egy kisváros lakossága egy év alatt 20%-kal nőtt, majd egy év múlva megint 20%-kal. Így már 11 520 lakos van. Hányan voltak kezdetben az őslakosok?

Egy bolt egy cipő árát először 20%-kal, majd a kialakult árat még 15%-kal csökkentette. Hány százalékkal csökkent az eredeti ár?

84% és 70% töménységű alkoholból 75%-os keveréket készítünk. Ezután a keverékhez még hozzáöntünk 5 litert a 84%-osból és 135 litert a másikkból. Így a keverék 72%-os lesz. Hány litert vettünk az egyes fajtákból az első alkalommal?

Kétféle alkoholból készítünk keveréket. Az elsőből 8 litert, a másodikkból 12 litert véve 20%-os alkoholt kapunk. Ha az elsőből 2 litert, a másodikkból 8 litert veszünk, akkor a keverék 25%-os lesz. Hány százalékos a két összetevő?

23%-os töménységű alkoholhoz 10 kg 90%-os alkoholt öntöttünk. Hány kg a keverék, ha töménysége 40%?

50%-os és 70%-os töménységű sóoldatunk van. Hány litert kell ezekből összeöntenünk, hogy 45 liter 62%-os töménységű sóoldatunk legyen?

### 3) Munkavégzéses feladatok

Nem köt.: Egy 950 literes kádba az egyik csapon 500 liter, a másikon 300 liter víz tud befolyani óránként. A két lefolyó közül az egyikén 200 liter, a másikon 500 liter víz folyik ki óránként.

Mennyi idő alatt telik meg a kád, ha minden csapot és lefolyót egyszerre kinyitunk?

Mennyi idő alatt telik meg a kád, ha minden csapot és lefolyót egyszerre kinyitunk, de a második lefolyót fél óra múlva elzárjuk?

Három csapat külön-külön 4 nap, 6 nap illetve 8 nap alatt végezne a favágással. Mennyi idő alatt készülnek el, ha együtt dolgoznak, de a leghatékonyabb csapat felét karanténba zárták, és nem mehet dolgozni?

Egy tartályba 3 csapon keresztül tudunk vizet engedni. Az elsőn keresztül 15 óra alatt telne meg, a másodikon 10 óra alatt, a harmadikon 4 óra alatt. Hány óra alatt telik meg a tartály, ha mindhárom csapot egyszerre nyitják meg, de két óra múlva a harmadikat elzárják?

Nem köt.: Egy medence az egyik csapon 6 óra alatt, a másikon 8 óra alatt telik meg. A teli medence a lefolyón át 12 óra alatt ürül ki. Hány óra alatt lelik meg a medence, ha egyszerre nyitjuk meg mindkét csapot és a lefolyót véletlenül nyitva van, épp két órával korábban zártuk el, mint ahogy megtelt a medence.

Apa 12 óra alatt ásná fel egyedül a kertet, a fia 20 óra alatt. Együtt kezdenek a munkához, de 5 órai munka után a fiú beleun, és elmegy kütyüzni. Hány órát kell még az édesapának güriznie, hogy készen legyen az ásással?

\* 3 festő közül az első és a második együtt 90 óra alatt festené ki a házat. Az első és harmadik együtt 144 óra alatt, míg a második és a harmadik együtt 80 órát festene. Hány nap alatt festenek ki együtt?

Egy medence az egyik csapon át 10 óra alatt, a másikon 5 óra alatt telik meg. A lefolyón 15 óra alatt ürül ki. Hány óra alatt telik meg a medence, ha mindkét csap nyitva van és a lefolyó is, és csak 2 óra múlva zárjuk el a lefolyót?

Ketten futnak körben egymással szemben. Az egyik 3 perc alatt, a másik 5 perc alatt futja le a kört. Hány percenként találkoznak, ha azonos helyről egyszerre indultak?

Egy tartályba 2000 liter víz fér. Az egyik csapon 250 liter víz folyik be egy óra alatt, a másikon 200 liter. A lefolyón 100 liter víz folyik el óránként. Összesen mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha először csak a bővebb csapot nyitjuk meg, és csak 3 óra múlva a kevesebb vizet adót, de ekkor vesszük észre, hogy nyitva van a lefolyó és ekkor zárjuk el?

#### 4) Sebesség, utazás, illetve vegyes feladatok

Két város 265 km-re van egymástól. Az egyikből 35 km/h, a másikkól 25 km/h sebességgel halad egymás felé egy-egy motoros. Pontosan délben találkoznak, de a gyorsabb 1 órával később indult. Hánykor indultak?



Nem köt: Egy kerékpáros elindul 20 km/h átlagsebességgel az A városból a B-be. Egy másik két órával később indul, de az ő átlagsebessége 25 km/h. Pontosan egyszerre érkeznek. Milyen messze van egymástól A és B?

Két város 40 km-re van egymástól. Az egyikből 3,2 km/h sebességgel, a másikkból 4,8 km/h sebességgel indul délben egymással szembe két gyalogos. Hány órákor találkoznak?

A lovasok edzést tartanak. Egy 15 400 m hosszú pályán egyező irányban halad két lovas, ekkor 220 percenként találkoznak, ha ellenkező irányban haladnak, akkor 20 percenként. Mekkora a sebességük (méter/perc)?

Egy hajó állóvízben 15 km/h-val halad. A folyó 4 km/h-val folyik. A hajó a folyásiránnyal szemben megy fölfelé a folyón. A hajón egy ember 2 km/h-val sétál hosszában föl-alá. A partról milyen sebességgel látjuk haladni az ember, amikor a) a folyásirányban („lefelé”) sétál b) azzal szemben („felfelé”) sétál? Milyen sebességgel sétál a vízhez képest az ember, ha c) „lefelé” d) „felfelé” sétál?

Egy hajó az állóvízhez képest 8 km/h sebességgel halad. A folyó 5 km/h-val folyik. („lefelé”=folyásirány, „felfelé”=folyásiránnyal szemben) a) Mennyivel halad a folyón parthoz képest „lefelé” a hajó? b) Mennyivel halad a folyón a parthoz képest „felfelé” a hajó? c) Tavon kiejtenek egy pettyeslabdát a hajóból. Mennyivel távolodik tőle a hajó?

A fent említett folyón kiejtenek egy pettyeslabdát a hajóból. a) Mennyivel halad a parthoz képest lefelé a labda? b) Mennyivel halad a vízhez képest a labda? c) Mennyivel távolodik tőle a hajó, ha az „felfelé” illetve „lefelé” megy? (vagy tán nem is számít, hogy merre megy?!)

\* Egy motorcsónakos elindul a mólójától felfelé a Tiszán állandó sebességgel. Sajnos épp az induláskor a mólójánál kiejti a pöttyeslabdáját (amely ezután a vízzel együtt halad). 3 órát halad fölfele, majd visszafordul, és ugyanazzal a motorcsónak-sebességgel visszamegy a mólóhoz, amihez elég neki 1 óra. Mennyi időbe telik utolérnie innen a labdát, hogyha továbbra is állandó a sebessége?

Egy csónak a folyásirányban haladva két kikötő közt az utat 6 óra alatt teszi meg egyenletesen haladva, visszafelé pedig 8 óra alatt teszi meg ugyanezt az utat. Mennyi idő alatt teszi meg ugyanezt a távolságot a folyás irányában úszó tutaj? (Nyilván a tutaj a folyó sebességével halad...)

Egy úszómedencét 3 csapon tölthetünk meg. Ha csak az elsőt nyitjuk meg, a medence 12 óra alatt telik meg, ha csak a másodikat, akkor 8 óra alatt lesz tele. Ha csak a harmadik csap üzemel, az egy óra alatt befolyó víz a medencét  $\frac{3}{8}$  részig tölti meg. A teli medence a lefolyón 9 óra alatt ürülne ki. Ha megnyitjuk mindhárom csapot és a lefolyót nem zárjuk el, mennyi idő alatt lesz tele a medence?

Most délután 3 óra van. a) Mikor fogja fedni az egyik mutató a másikat leghamarabb? b) Mikor lesznek újra egymásra merőlegesek leghamarabb?

Egy motorcsónak sebessége állóvízen 20 km/h. Egy folyón lefelé haladva 2 óra alatt 48 km-t tett meg. Mennyi idő szükséges a visszatéréshez?

\* Két folyóparti város között egy hajó jár a folyón. A hajó a vízhez képest mindig ugyanakkora sebességgel megy. A hajó lefelé 2 óra, felfelé 4 óra alatt teszi meg az utat. A folyást tekintve a „fentebbi” városban beesik egy labda a vízbe. Hány óra múlva csorog le a másik városba?

Egy hajó a folyón lefelé 5 óra alatt ért el az egyik kikötőből a másikba. Visszafelé ugyanehhez az úthoz 1 órával többre van szüksége. Határozzuk meg a folyó és a hajó sebességét, ha a két kikötő távolsága 30 km.

\*\* Egy uszály halad a Dunán a parttal párhuzamosan (tehát csak úszik). Ha az uszályal egy irányban haladunk egyenletes sebességgel, akkor a hosszát 250 lépésnek találjuk; ellenkező irányban haladva az uszály 60 lépés után halad el mellettünk. Hány lépés az uszály hossza?

Déli 12 órakor az óra mutatói fedik egymást. Hány órakor fogják egymást legközelebb ismét fedni.

Nem kötelező: Két csónak 11 km távolságból indul egymás felé. Induláskor egy dongó felszáll az egyikről és átrepül a másikra, onnan visszarepül az elsőre, majd ismét át a másikra és így tovább. Hány km utat repül a dongó a két csónak találkozásáig, ha a csónakok sebessége 6 km/h illetve 5 km/h és a dongó 10 km-t repül óránként? (Segítség: nézd meg, hogy mennyi idő alatt találkozik a két csónak, és annyit repül szegény dongó...)

Nem kötelező: Egy kör alakú versenypálya 6 km hosszú. A startvonalról két autó egyszerre egy irányba indul el. Az egyik 240 km-t, a másik 260 km-t tesz meg óránként átlagosan. A gyorsabb autó mennyi idő múlva körözi le a lassúbbat?

Két falu 34 km-re van egymástól. Délben indul az A faluból egy gyalogos 4 km/h sebességgel B-be. Délután fél háromkor indul az A felé egy kerékpáros ember 12 km/h sebességgel. Mikor találkoznak? Találkozásukig ki mennyi utat tesz meg?

5) Lineáris függvény megadása a grafikonjának két pontjából

Egy lineáris függvény grafikonja áthalad az  $A(5;-7)$  és  $B(1;-4)$  ponton. Add meg a fv. definícióját! (Most ne meredekséggel, hanem egyenletrendszerrel dolgozz!)

Egy lineáris függvény grafikonja áthalad az  $A(8;-3)$  és  $B(2;7)$  ponton. Add meg a fv. definícióját! (Most ne meredekséggel, hanem egyenletrendszerrel dolgozz!)

Domi naponta 25 meggyfát tud megszedni, Benedek 30-at. A gyümölcsösben 500 fa van. Együtt kezdenek dolgozni öt napig. A hatodik naptól Benedek 4 napot távol van és csak Domi dolgozik. Visszajön Benedek, Domi elutazik. Be tudja-e fejezni Domi a munkát, ha már csak négy napot dolgozhat?

## FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK E: PARAMÉTERES EGYENLETEK, AVAGY A „KÉPLET-GYÁRTÁS”

IV) A képletet gyártunk – hogy a másoknak ne kelljen egyenleteket megoldani...

- 1) Képletek a természettudományban:
- 2) Permet keverés

Hány kg 42% és hány kg 70%-os permetlét kell összeöntennem, hogy 28 kg 60%-os oldatot kapjak?

Egy kémiai kristályvizes só 60%-a víz. Ha 100°C-ra hevítjük utána már csak 30%-a lesz víz a szárított sónak. Hány kg sót kell szárítani, hogy 8 kg szárított sót kapjunk?

Alakítsd szorzattá (mennél több tényező legyen! – „In medio est virtus...”):

$$3x^3+81 =$$

$$x^{12}-2^{12} =$$

$$x^3-343^2 =$$

$$16x^2-81 =$$

$$12x^2+x-6 =$$

Végezd el

$$(5x^2-3)^3 =$$

$$(5x-2)^4 =$$

3) Valójában egy lineáris fv. inverze: „képlet az ősképhez”

Adott az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{2}{3}x - 4$  fv.

Készítsd el az inverz fv-t, majd számold ki, hogy az eredet függvényénél mi az ősképe a következő számoknak:  $y = 8; 0; -3$  és  $2$ .

4) Egyéb paraméteres egyenlet: cél: „a paraméter függvényében kifejezni az ismeretlent”.

**Ha másként nem jelezzük, akkor a változók:  $x, y, z$ ; paraméterek:  $a, b, c, p, q, t, m, n$  stb.**

Nem köt.: Oldd meg:  $3x - 2p = 4x + 1$

Oldd meg:  $px - 4 = 3x + 1$   $p =$  paraméter

**Oldd meg a következő paraméteres egyenletet – vagyis adj egy paraméteres, általános megoldást a lineáris egyenletekre:**

**$mx + b = 0$  ( $m, b$  paraméterek)**

A balra legyártott képlettel add meg a következő két egyenlet megoldását:

$-3x + 8 = 0$                        $\frac{2}{3}x + 4 = 0$

$x =$

$x =$

Nem köt: Adott egy lineáris fv. grafikonjának két pontja:  $A(5;7)$   $B(-3;9)$ . Írd föl a fv hozzárendelési szabályát!

Aki 5-ös akar lenni...: Adott két pont:  $A(p_1; q_1)$   $B(p_2; q_2)$ . Add meg annak a lineáris fv-nek a definícióját ( $y = mx + b$ ) mely grafikonja e két pontra illeszkedik. (A koordináták a paraméterek, és azokból kell kifejezni  $m$ -et és  $b$ -t!)

V) A paraméteres egyenletek általában

1) A paraméteres egyenletek megoldásának alapelve:

Írd le, hogy mi a CÉL a paraméteres egyenletek megoldásánál, és ezért mit csinálunk:

Apa 12 óra alatt vágná fel a tűzifát. A fia 16 óra alatt vágná föl ugyanazt. Mennyi idő alatt készül el a munka, ha együtt kezdik ugyan, de 4 óra múlva a fia beleun, és az apa egyedül kell, hogy befejezze.

Nem köt.: Egy csap 10 óra alatt tölt meg egy tartályt. A másik 8 óra alatt. A tartály lefolyóján keresztül 12 óra ürül ki. Tudjuk, hogy 2 órával azelőtt, hogy megtelt a tartály, kinyílt a lefolyó. A nagyobb hozamú csap pontosan kétszer annyi időt volt nyitva, mint a másik. Mennyi ideig tartott a művelet?

2) Gyakorlás

$$px = p^2 \text{ (p paraméter)}$$

$$3p^2x+5 = 3px+5p \text{ (p paraméter)}$$



$$a^2x - a^2 + 1 = 2ax - x \text{ (a param)}$$

$$\text{Nem köt.: } (2p-1)x = 3p + (p+2)x \text{ (p param.)}$$

$$\frac{x}{p-2} + 3 = 2x \text{ (p param.)}$$

Aki 5-ös akar lenni...: Mutasd meg, hogy ha  $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 3 \mid n^3 - n$ . (Vagyis 3 osztja  $n^3 - n$ -t)  
Segítség: alakítsd szorzattá a kifejezést...

\*\* Mutasd meg, hogy:  $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 5 \mid n^5 - n$  (Segítség: a szorzattá alakítások után – egy oszthatóság szerinti ravasz – oszthatóságot tekintve ekvivalens – lépés után még lehet szorzattá alakítani...)

Alakítsd szorzattá, v. bontsd fel a zárójelet ahol az van.

$$x^{10} - x^2 =$$

$$(2x-5)^3 =$$

$$x^4 - 16 =$$

$$3x^4 - 24x =$$

Nem köt: Az  $mx+b=0$  egyenletnek az  $m$  és  $b$  valós paraméterek mely értékeire: a) nincs megoldása, b) végtelen sok megoldása van, c) pont egy megoldása van a valósok halmazán?

Oldd meg:  $\frac{3x-p}{p-2} = 3-2x$  ( $p$  param.)

$$p^2x^2 - 2px^2 - px = -x^2 - x$$

Nem köt.:  $2a(x-2a) = 4(x-4)$

$$2p^2x+2p = p^2-3px$$

Nem köt:  $\frac{2a}{3a-2x} = \frac{3}{2b-x}$  ( $a;b$  param)

Nem köt: Egy agár kerget egy nyulat. A nyúlnak 100 nyusziugrás előnye van. 5 nyusziugrás hossza megegyezik 2 agár-ugrással. Amíg az agár 7-et ugrik, addig a nyúl 10-et. Hányat ugrik az agár, amíg utoléri a nyulat – és... és összebarátkozik vele☺.

$$a^2x^2 - x = 2ax^2 - x^2 \text{ (a param.)}$$

$$\frac{a^2 - 1}{2x + 1} = a^2 - 2a + 1 \text{ (a param.)}$$

$$5a + 4ax = a^2x + 20 \text{ (a param.)}$$

$$\text{Nem köt: } \frac{x - a}{a} - a = \frac{2x - b}{b} \text{ (a, b param.)}$$

Egy munkás 8 órával hamarabb végez a munkával, mint a társa. Ketten együtt 3 óra alatt tudják elvégezni a munkát. Mennyi időt vesz igénybe az óra az egyiküktől és mennyit a másiktól?

3) Egyenlőtlenséghez vezető paraméteres egyenletek

A  $p$  valós paraméter mely értékeire van a

$2(x-4) = px$  egyenletnek a) pozitív b) negatív gyöke a valósok halmazán?

(Először „meg kell oldani”, majd a paraméteres kifejezésre kell felírni az egyenlőtlenséget, és azt megoldani – előjel grafikon!)

Mely  $p$  paraméterek esetén lesz  $-1$ -nél nagyobb a megoldás:  $px+1 = p - 2x$

(Először „meg kell oldani”, majd a paraméteres kifejezésre kell felírni az egyenlőtlenséget, és azt megoldani – előjel grafikon!)

Mely  $p$  paraméterek esetén lesz  $-2$ -nél nem kisebb a következő egyenlet megoldása:

$$2p(x-1) = -3x-1$$

Alakítsd szorzattá:

$$x^5+y^5 =$$

$$2x^7-256 =$$

$$\text{Nem köt.: } x^{12}+64 =$$

$$* x^8+x^6+x^4+x^2+1 =$$

Végezd el:

$$(4x-5)^3 =$$

$$(4x-2)^4 =$$

Aki 5-ös akar lenni: Tudjuk, hogy  $2^p + 1$  prímszám. (kettő a „pédiken”) ( $p \in \mathbf{N}^+$ ) Mit állapíthatunk meg  $p$ -ről biztosan?

Mely  $p$  paraméterre lesz a következő egyenletnek 5-nél nem nagyobb (kisebb-egyenlő) a megoldása:  $3p+3x = 2p+1$

4) Paraméteres egyenlőtlenségek

Oldd meg ( $p$  paraméter):  $2px-p \geq 3$  ( $p$  param.)

\* Adj a falubeli halászoknak egy paraméteres képletet a következő gondjukra: Tudják, hogy melyik nap mennyivel folyik a Tisza:  $v_1$  km/h. Azt is tudják, hogyha mennyire vannak jó erőben, hányan eveznek, ezért tudják, hogy a vízhez képest mekkora aznap a haladási sebességük:  $v_2$  km/h. A varsák tőlük 5 km-re vannak feljebb is és lejjebb is. Mindkettőhöz el kell menniük. Ha mindkettőnél fél-fél órát időznek, akkor az indulástól kezdve mennyi idő bejárni a varsákat és visszajutni a falu kikötőjéhez? Gyárts le szegényeknek egy képletet, amibe csak be kell helyettesíteni a sebességeket, és megtudják a teljes időt!

Oldd meg:  $3px-2 \geq 5x+5p$  ( $p$  param.)

\* Oldd meg ( $m$  paraméter):  $\frac{m-x}{x-1} \leq 2$

## VI) Százalékszámítás ismétlés

### 1) Feladatok

Minek a 6%-a 24?

A 250-et hány százalékkal kell csökkenteni, hogy 220 legyen?

Egy tartályban lévő fertőtlenítő 42%-át az éjszaka ellopták, így 667 liter maradt benne. Hány liter fertőtlenítőt lovasítottak meg?

Három szám összege 1692. Az első szám a másodiknak 30%-a, a második pedig a harmadiknál annak 40%-ával nagyobb. Melyik ez a három szám?

### 2) Egyéni feladatok

Egy vállalkozónak a Balaton partján egy négyzet alaprajzú egyszintes nyaralót terveztek. De ő inkább az egyik oldalát 30%-kal megnövelte, a másikat pedig a 30%-kal csökkentette. Kiderült, hogy az alapterület 81 négyzetméterrel csökkent. Mekkora lett volna a vállalkozó nyaralójának alapterülete eredetileg?

Rajzolj!

Mari bizsut vásárol. Az ÁFA 27%-os. Így a vásárlás során pontosan 324 Ft adót fizetett. Mennyi a nettó ára a hajtűnek?

Aki 5-ös akar lenni: Egy boltban hordóból kimérve spanyol és görög olajbogyót árulnak, páclében. A spanyol kimérés 55 tömegszázalékban tartalmazza a bogyót, a görög 80-ban. Írj föl egy paraméteres egyenletet arra, hogyha valaki  $q$  kg,  $p$  százalékos keveréket szeretne hazavinni, akkor hány kg spanyol keveréket (bogyó páclében) kell kimérni, amit aztán a göröggel töményít.

Egy készülék árát hány százalékkal növelték meg, ha Aladár kiszámította, hogy a megnövelt árat egykilencedével kellene csökkenteni ahhoz, hogy az eredeti árat visszakapjuk?

Egy erdőben 2017-ben 10 000 vágásérett fa van, és minden évben 5%-kal nő az erdőben lévő vágásérett fák száma.

Hány vágásérett fa lesz az erdőben egy év múlva, 2018-ban?

Hány vágásérett fa lesz az erdőben újabb egy év múlva, 2019-ben?

Hány vágásérett fát vághat ki az erdőszet 2020-ban, ha az erdő 12%-nak a kivágására kaptak „gyérítési” engedélyt?

Egy készülék árát januárban 30%-kal csökkentették, majd februárban újabb 30%-kal lejjebb szállították. A nagyobb reklám kedvéért úgy próbálták beállítani, mintha ez által az eredeti árat 60%-kal csökkentették volna. Aladár azonban kiszámította, hogy a valóságos 60%-os árcsökkentés a februárinál 18.000 Ft-tal alacsonyabb árat eredményezett volna. Mennyi volt a készülék eredeti ára?



## VII) Ismétlés

Apa 12 óra alatt vágná fel a tűzifát. A fia 16 óra alatt vágná föl ugyanazt. Mennyi idő alatt készül el a munka, ha együtt kezdik ugyan, de 4 óra múlva a fia beleun, tűzifaképnél hagyja az apját, és apa egyedül kell, hogy befejezze.

$$\frac{x}{p-2} + 3 = 2x \text{ (p param)}$$

$$a^2x^2 - x = 2ax^2 - x^2 \text{ (a param)}$$

Mely p paraméterekre lesz a megoldás kisebb, mint 1:  $2p^2x - p^2 + 4 = 3px + 2x$

Mely p paraméterek esetén lesz -1-nél nem kisebb a megoldás:  $px + 1 = p - 2x$

# FÜGGVÉNYEK – EGYENLETEK F: SPECIÁLIS LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

D) A konstans fv.

Add meg azt a konstans fv-t, mely grafikonja illeszkedik az  $A(-3;5)$  pontra.

$$c(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R};$$

Oldd meg a következő paraméteres egyenletet:  $p^2x - 1 = p + x$

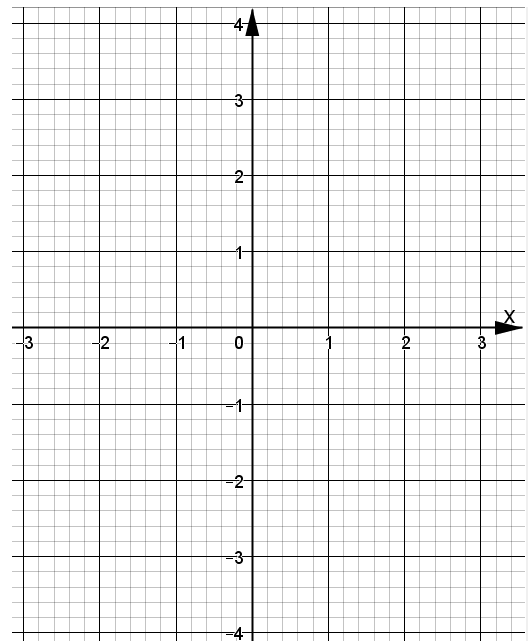
II) Az egyenes arányosság

1) Def.: Az  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = ax$  ( $a \neq 0$ ) függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

Mik a koordinátái annak a pontnak, mely minden egyenes arányosság grafikonjára illeszkedik?

$$A( \quad ; \quad )$$

Ábrázold:  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x$



Egy kétjegyű szám első jegye kétszerese a másodiknak. A szám és a számjegyek felcserélésével kapott szám különbsége 36. Mi az eredeti szám?

Egy cipő árát először 20%-kal emelték, majd 20%-kal csökkentették. A végső ára 33,6 Euro. Mennyi volt eredetileg?

72° hány radián?

225° hány radián?

$\frac{2\pi}{3}$  radián hány fok?

0,2 $\pi$  radián hány fok?

5 kamionnal 6600 csomagot lehet elszállítani. Legalább hány kamion kell 31 000 csomaghoz?

Egy egyenes arányosság 20-hoz 80-at rendel. a) Írd föl a függvényt! b) Mennyit rendel 35-höz?

### III) Az intervallumonként lineáris függvények

1) A signum (előjel) és a signum fv.

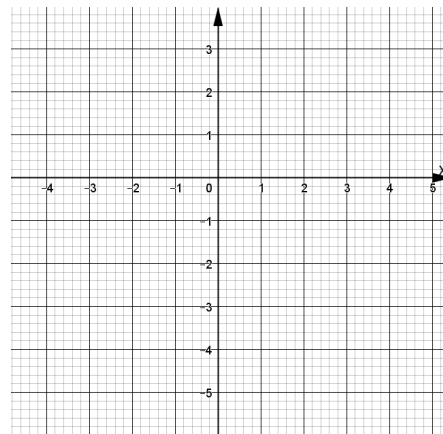
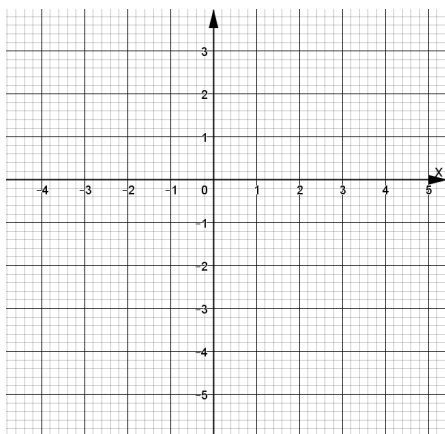
$$\operatorname{sgn}(-3) = \quad \operatorname{sgn}(10) = \quad \operatorname{sgn}(2^{-3}) = \quad x \in \mathbf{R} \operatorname{sgn}(x^2+2) = \quad \operatorname{sgn}(0) =$$

Ábrázold

$$h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \operatorname{sgn}(x) - 4$$

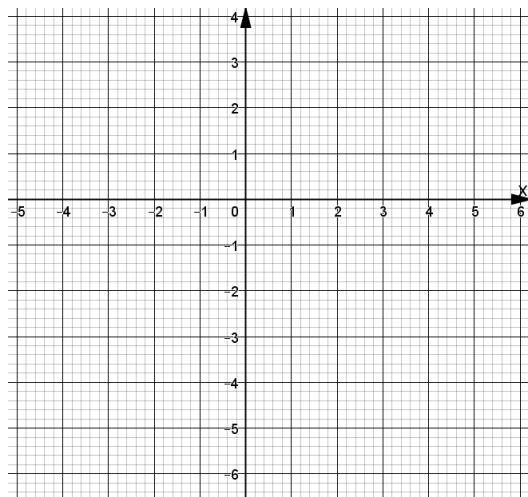
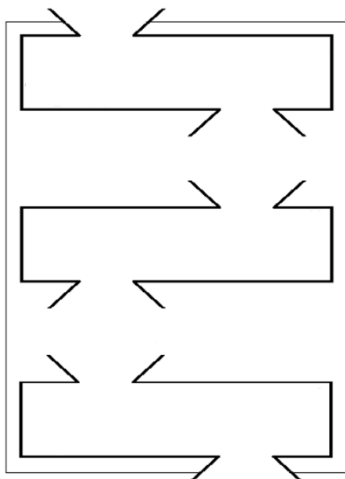
Nem kötelező: Ábrázold

$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto -\operatorname{sgn}(x)$$



Ábrázold:  $h(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto 2 \cdot \text{sgn}(x) - 3$

Írd be, melyik gép mit csinál, hová mi „esik” (ahogy az órán)

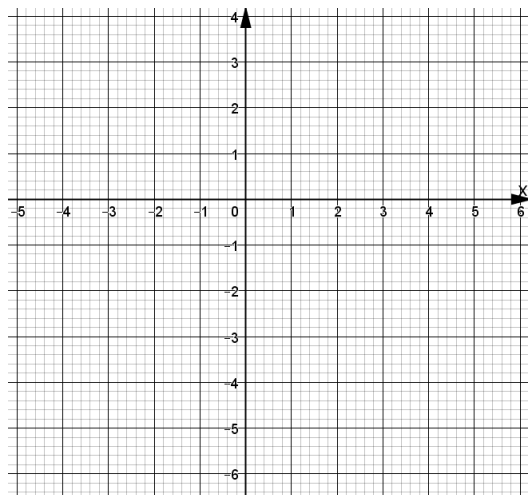
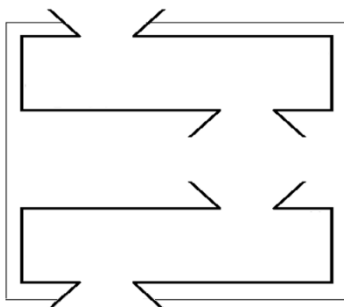


Rajzold föl az  $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x) - 4$  fv. grafikonját!

Add meg annak a  $\underline{v}$  vektornak a koordinátáit, amellyel a  $\text{graf}_{\text{sgn}(\cdot)}$ -t eltolhatjuk az  $f(\cdot)$  fv. képébe.

$\underline{v}(\quad; \quad)$

Írd be, melyik gép mit csinál, hová mi „esik” (ahogy az órán)

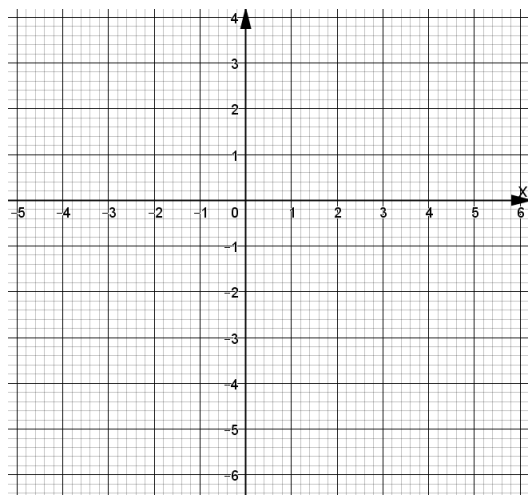
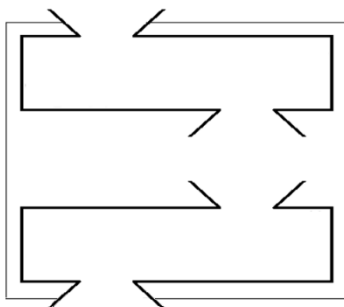


Rajzold föl az  $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x-4)$  fv. grafikonját! Add meg annak a  $\underline{v}$  vektornak a koordinátáit, amellyel a  $\text{graf}_{\text{sgn}(\cdot)}$ -t eltolhatjuk az  $f(\cdot)$  fv. képébe.

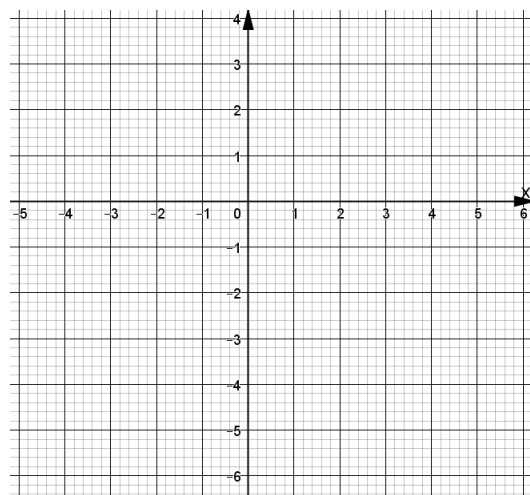
(meg kell vizsgálnod, hogy az argumentum, vagyis az  $x-4$  mikor milyen előjelű... Ez pedig egyenlőtlenség...)

$\underline{v}(\quad; \quad)$

Írd be, melyik gép mit csinál, hová mi „esik” (ahogy az órán)

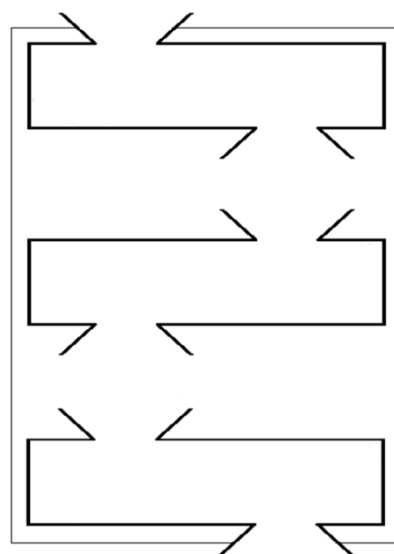


Ábrázold:  $g(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto -\operatorname{sgn}(x-3)$   
 (meg kell vizsgálnod, hogy az argumentum,  
 vagyis az  $x+3$  mikor milyen előjelű...  
 Ez pedig egyenlőtlenség...)



Add meg a transzformációt, amely a  $\operatorname{graf}_{\operatorname{sgn}(\cdot)}$ -t elvisszük a  $g(\cdot)$  fv. képébe. (Két trafó lesz, először egy eltolás majd egy valamilyen tükrözés!)

Írd be, melyik gép mit csinál, hová mi „esik” (ahogy az órán)



Adott a következő három függvény:

$$f(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \operatorname{sgn}(x); \quad g(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = x+2; \quad h(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -3x$$

Írd föl a következő hozzárendelési szabályokat:

$$f(g(\cdot)) : \quad g \circ h : \quad h(g(\cdot)) :$$

$$g \circ f \circ g : \quad h \circ h :$$

Írd föl, hogy milyen függvény-kompozícióval jönnek létre az alábbi hozzárendelések:

$$\operatorname{sgn}(-3x) : \quad -3 \cdot \operatorname{sgn}(x)+2 : \quad -3 \cdot \operatorname{sgn}(x+2) :$$

$$-3x-6 : \quad 9x : \quad x+4 :$$

Oldd meg:  $\operatorname{sgn}\left(\frac{-5}{4-x^2}\right)=1$  (Vedd észre, hogy ez az argumentumra egy egyenlőtlenség...)

$$-3 \cdot \operatorname{sgn}(5-2x) = 2x+4$$

$$\text{Nem köt: } \operatorname{sgn}(5x-3) \leq 2x$$

$$\text{Aki 5-ös akar lenni: } \operatorname{sgn}(6x^2-3x+1) = 2x$$

2) Az egészrész és az egészrész függvény

$$[2,8] =$$

$$[3] =$$

$$[-2,8] =$$

$$[-3] =$$

$$\left[\frac{20}{9}\right] =$$

$$\left[-\frac{14}{6}\right] =$$

$$[-1,0002] =$$

$$\left[-\frac{102}{101}\right] =$$

Milyen intervallumba esik bele az  $x$ , ha:

$$[x] = 3 \quad x \in$$

$$[x] = -5 \quad x \in$$

$$[2x] = 14 \quad x \in$$

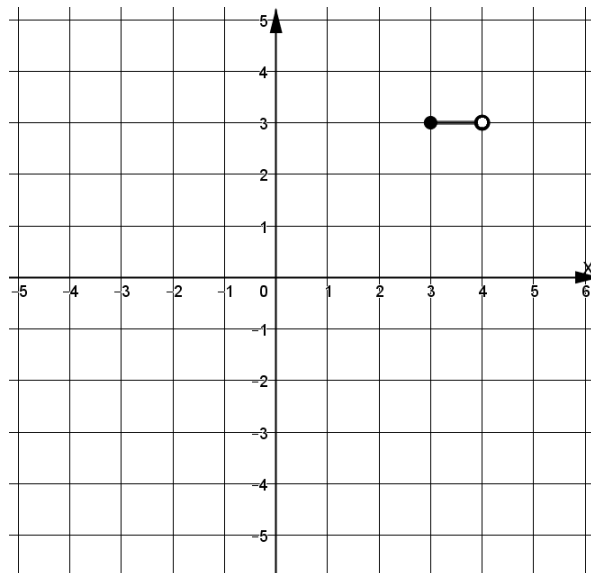
$$[3x] = -8 \quad x \in$$

$$\text{Oldd meg: } [4x] = 15 \quad x \in$$

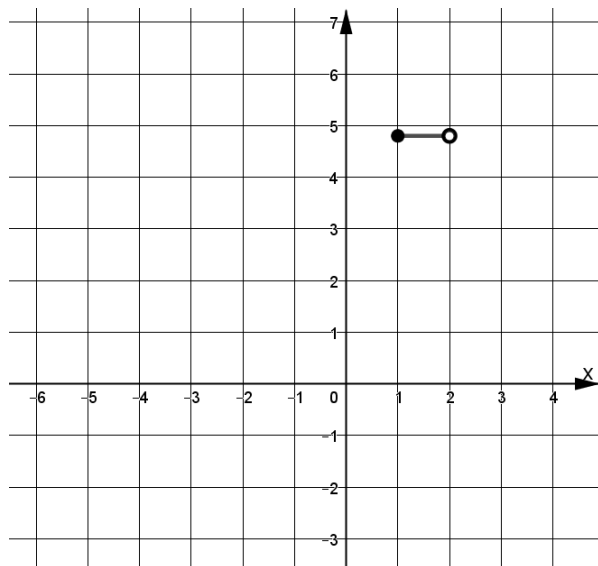
$$\text{Nem köt: Oldd meg: } \operatorname{sgn}(x^2-2x-3) = x-1$$

Ábrázold az egészrész fv-t  $-5$ -től  $+6$ -ig.

$$\text{int}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}; y = [x]$$



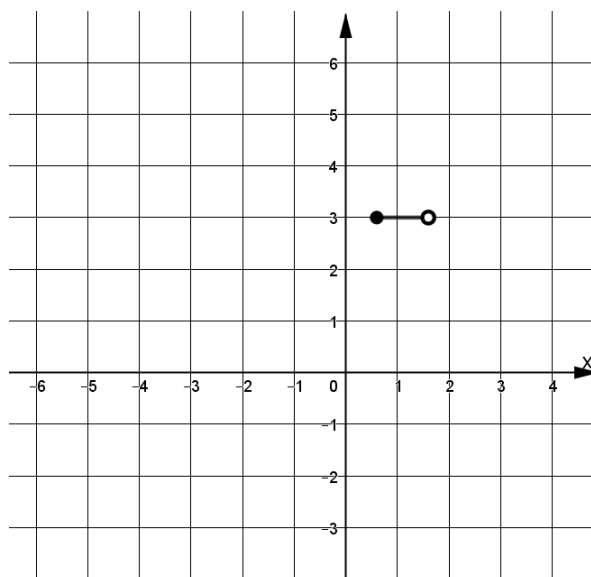
Ábrázold:  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = [x] + 3,8$   $-6$ -től  $+4$ -ig



Transzformáció:

Oldd meg:  $[x] = -3$

Ábrázold:  $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto [x+2, 4]$   
 $-5,4$ -től  $3,4$ -ig – ÓVATOSAN, FIGYELVE!



Transzformáció:

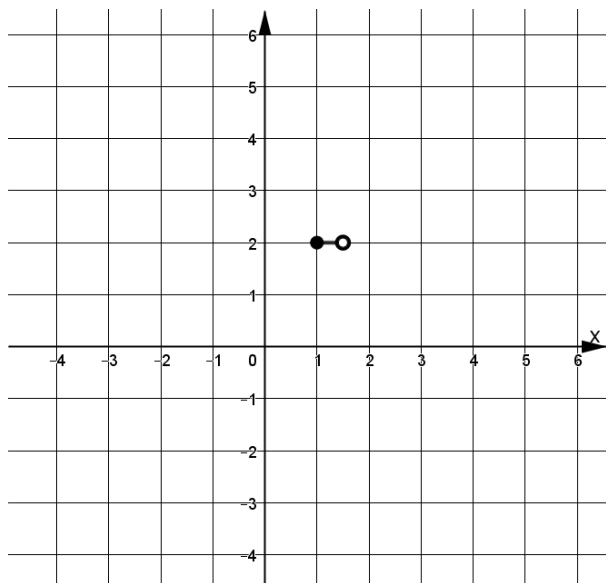
Aki 5-ös akar lenni: Oldd meg:  $[x] = -2x-3$

Nem köt.: ábrázold:  $h(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = [2x]$

-2-től +3-ig.

(Vedd észre, hogy „beszorul” a  $2x$  és a  $2x-1$  fv grafikonja közé”

$$* [x] = 4x - 3,4$$



Aki 5-ös akar lenni:  $[x] = 4x - 3$

### 3) Tötrész és tötrész függvény

Def:  $\{x\} := x - [x]$

Mivel egyenlő?

$$\{13,2\} =$$

$$\{-12\} =$$

$$\{-4,75\} =$$

$$\left\{\frac{17}{6}\right\} =$$

$$\{3,04\} =$$

$$\{-3,04\} =$$

$$\left\{\frac{18}{19}\right\} =$$

$$\{5^{-1}\} =$$

$$\left\{-\frac{7}{4}\right\} =$$

$$\left\{\frac{17}{6}\right\} =$$

$$\left\{-\frac{99}{98}\right\} =$$

$$\left\{-\frac{98}{99}\right\} =$$

Mivel egyenlő?

$$[85,4] =$$

$$[0,43] =$$

$$[0] =$$

$$[-5,2] =$$

$$[\text{sgn}(8)] =$$

$$\{532 \cdot [36,7]\} =$$

$$\{-2,4\} =$$

$$[\text{sgn}\{-4,3\}] =$$

$$\text{sgn}\{\{-4,3\}\} =$$

$$\text{sgn}\{[-4,3]\} =$$

$$\left\{\frac{12}{100}\right\} =$$

$$\{-0,12\} =$$

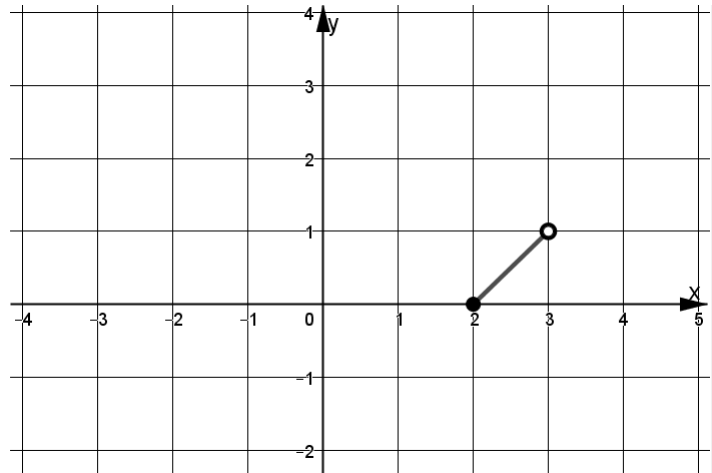


Ábrázold az törtrész fv-t  $-4$ -től  $+5$ -ig.

$$\text{frac}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \{x\}$$

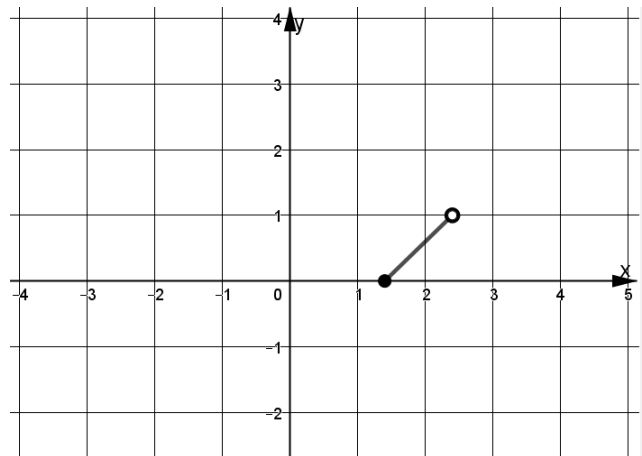
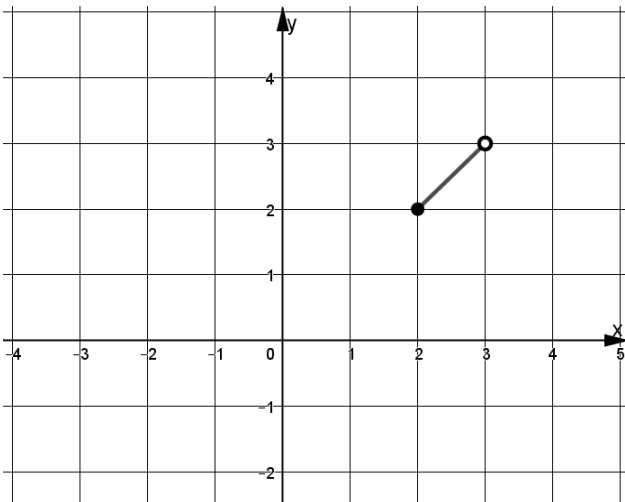
Add meg a törtrész fv. értékészletét intervallummal!

$$\mathbf{R}_{\text{frac}()} =$$



Ábrázold  $-4$ -től  $+5$ -ig:  $f(): [-4;5] \rightarrow \mathbf{R}; y = \{x\} + 2$     Ábrázold:  $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \{x-0,4\}$

Majd add meg az eredeti törtrész fv. grafikonjának transzformációját mindkettőnél!



Mivel egyenlő, ha  $x \in \mathbf{R}$  ?

$$[x] + \{x\} =$$

$$\{\text{sgn}(x)\} =$$

$$\left[ \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}^2(x) \right] =$$

Oldd meg:  $\{x\} = 1,2$

Oldd meg:  $\{5x\} = 0,45$

Oldd meg:  $\{5x-3\} = 0,1$

Aki 5-ös akar lenni:  $(x-5)^2+1 = \{x\}$

\*  $\{x\} + \text{sgn}(x) = 3x$

\*\*  $(x-0,5)^2+0,75 = \{x\}$

Add meg, hogy a következő kifejezés értékkészletét (mely értékeket veheti fel), ha  $x \in \mathbf{R}$ .

$-2 \cdot \{3x+2\} :$

$[3\{3,4+[x]\}+5] :$

$\text{sgn}(x^4+0,5) :$

$\text{sgn}^4(x+0,5) :$

Nem köt.:  $18x-12x^2 = 8x^3-27$

Add meg, hogy a következő kifejezés értékkészletét, ha  $x \in \mathbf{R}$ .

$[\text{sgn}\{x\}]$  Értékkészlet =

$\{\text{sgn}[x]\}$  Értékkészlet=

A  $(3x-5)^4$  kifejezésben, ha felbontjuk, akkor mennyi az  $x^3$  együtthatója? (Pascal  $\Delta$  !)

4) Az abszolút érték

Írd föl jelekkel:  $f(\ )$  fv. Szigorún monoton nő:

Mivel egyenlő – (a legegyszerűbb formát írd föl!): Pl.:  $|-3| = 3$ , vagy  $|(14x)^2| = 196x^2$ . Tehát:

$|-5| =$   $|(-11)^2| =$   $|-x^2| =$   $|(-x)^4| =$

$|x^2+3| =$   $\text{sgn}(|x|+0,1) =$   $\text{sgn}(x) \cdot x =$   $|\{x\}| =$

$|x|^2 =$   $|-x| =$   $|-3x^2-5| =$   $|-x^2-2x-1| =$

$-|-x| =$   $\text{sgn}(x) \cdot |x| =$

Alakítsd szorzattá:

$$x^{20}-32 =$$

$$|x|^3+1 =$$

Aki 5-ös akar lenni: Mutasd meg, hogyha  $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 5n^5-5n^3+4n$  (Érdeemes és lehet is szorzattá alakítani!)

Írd föl a minimum hely – minimum érték, (max. hely – max érték) definícióját!

Írd föl a páros és páratlan függvények definícióját!

Keresd ki a szig. monoton fv-ek definícióját a füzetből: írd le, tudd szavakkal, jelekkel.

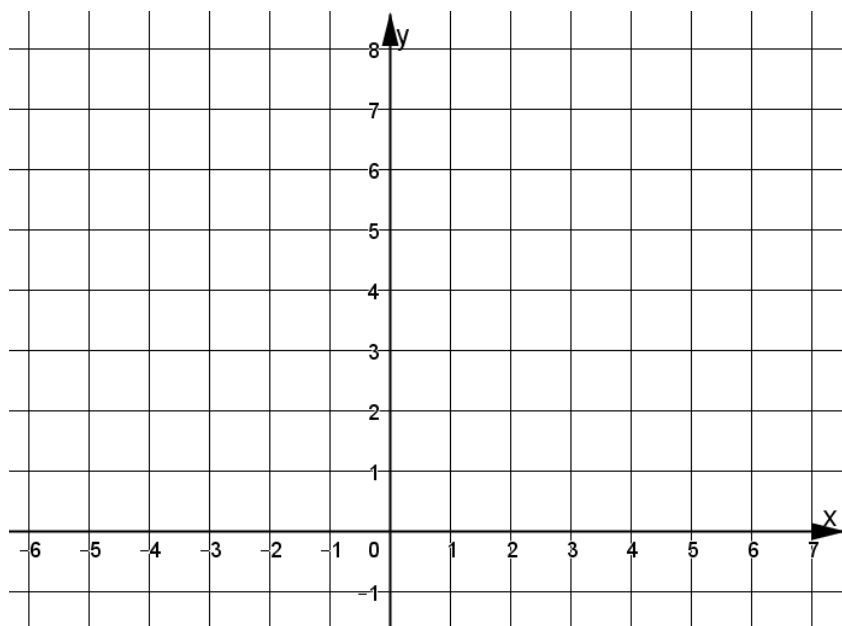
Ábrázold:  $\text{abs}(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |x|$

Add meg az értékészletét:

$$\mathbf{R}_{\text{abs}(\cdot)} =$$

Mely  $x$  független változókra veszi fel a 4 értéket, vagyis oldd meg:

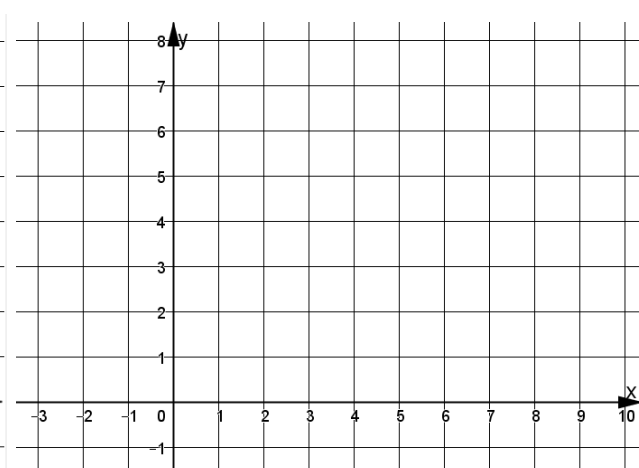
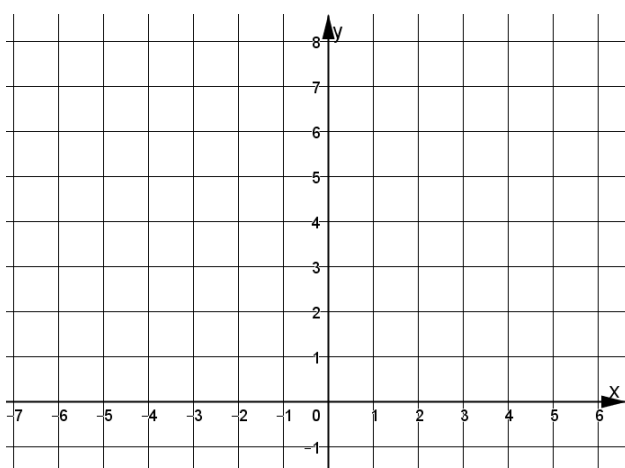
$$|x| = 4$$



Ábrázold, majd add meg a transzformációt és értékkészletet!

$$f(\ ): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |x+2|$$

$$g(\ ): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |x-4|+1$$



Trafó:

Trafó:

$$\mathbf{R}_{f(\ )} =$$

$$\mathbf{R}_{g(\ )} =$$

Oldd meg

$$|2x-3| = \frac{2x}{3} + 1$$

$$\left| \frac{x}{2} - 3 \right| = \frac{3}{5}x - 1$$

Nem köt.: Adott az  $A(-3;2)$  és a  $B(5;y)$  pont. Ez a két pont illeszkedik az  $f(\ )$  grafikonjára, amelynek grafikonja párhuzamos a  $g(\ ):\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; y = |3x-5|$  fv. egyik szárával. Mi lehet az  $y$ ?

Oldd meg:

$$-|3x-5|+|4x+3| = 2x+4$$

(Használj előjelgrafikont az eset-szétválasztáshoz!)

$$\text{Nem köt: } -0,5|x-3|+|2-x| = x-1,5$$

$$|5-2x|+|3x-1| = 8x+3$$

Alakítsd szorzattá:

$$x^4+8x =$$

$$3x^6+96x =$$

$$27x^3-1 =$$

$$x^6+8 =$$

$$\text{In medio est virtus: } 128x^7-x =$$

Mely  $p$  paraméterekre lesz a következő egyenlet megoldása kisebb, mint  $-2$

$$4p+7px = p^2x+28$$

Oldd meg:  $\left| \frac{x}{2} + 2 \right| - 1 = \frac{x}{5} + \frac{9}{5}$

Nem köt.:  $\frac{1}{2} |3x - 2| - 2 = -\frac{x}{4} + 1$

$$\left| \frac{|2x-3|}{2} - 3 \right| = \frac{x}{3} + \frac{5}{2}$$

$$-3|x-3| + |2x-1| = x-8$$



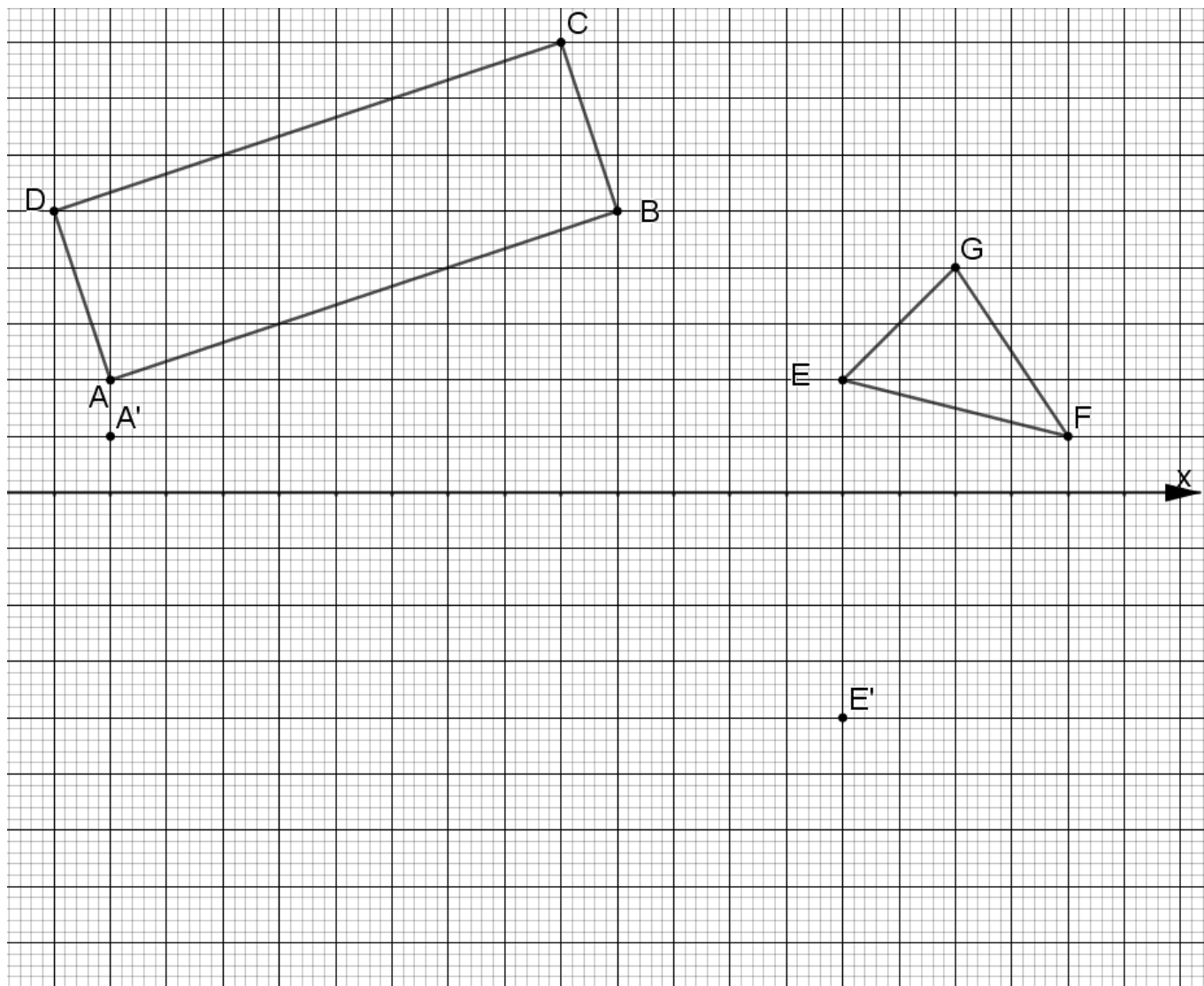
#### IV) Függvény-transzformációk

##### 1) Egy újabb geometriai transzformáció: merőleges affinitás

Szerkeszd meg a következőket – elég vonalzót használni, csak legyen pontos – egy-egy pontot már megszerkesztettem ( $A'$  és  $E'$ )!

$x^{\lambda=\frac{1}{2}}(ABCD)$  - vagyis az  $ABCD$  téglalap  $x$  tengelyre vett  $\lambda = \frac{1}{2}$  arányú merőleges affin képét!

$x^{\lambda=-2}(EFG)$  - vagyis az  $EFG$  háromszög  $x$  tengelyre vett  $\lambda = -2$  arányú merőleges affin képét!



Mindkét alakzatot rajzold is meg!

Húzd meg a  $DA$  és a  $D'A'$  egyenest a tengelyig. Ha jól szerkesztettél: ugyanott metszik a tengelyt.

Húzd meg az  $EG$  és az  $E'G'$  egyenest a tengelyig. Ha jól szerkesztettél: ugyanott metszik a tengelyt.

Nem köt.: Oldd meg:  $|3x-2y+5z-3|+|-2x+y-z/2+5,5|+(x+y+z-5)^2 = 0$

Aki 5-ös akar lenni: Az egyik csapból 2 óra alatt, a másikkól 5 óra alatt telik meg egy kád. A dugót ha kihúzzuk, akkor 4 óra alatt engedi le a vizet. Egyszerre kinyitjuk a két csapot, és  $t$  óra múlva kihúzzuk a dugót. a)  $t$  függvényében mikor telik meg a kád? b) Mely értékek közt változhat  $t$ ?

## 2) Függvénykompozíciók és az inverz függvény

Adottak a következő hozzárendelésű valós-valós függvények:

$$a(): y = \operatorname{sgn}(x) \quad b(): y = [x] \quad c(): y = \{x\} \quad d(): y = -2x \quad e(): y = x+3;$$

Írd föl a következő függvényeket!

$$a \circ b =$$

$$d \circ a \circ d =$$

$$d \circ e =$$

$$e(d()) =$$

$$c \circ d \circ e =$$

$$e(c(d())) =$$

$$e \circ d \circ c =$$

$$c \circ e \circ d =$$

Add meg a következő függvények kompozícióját a fentiek alapján (Pl.:  $a(b())$  v.  $a \circ b$ )

$$f_1() = \operatorname{sgn}(-2x) =$$

$$f_2() = -2 \cdot \operatorname{sgn}(x) =$$

$$g_1() = \{-2x+3\} =$$

$$g_2() = \{-2x\}+3 =$$

$$g_3() = -2\{x\}+3 =$$

$$h_1() = \operatorname{sgn}([-2x+6]) =$$

$$h_2() = [-2 \cdot \operatorname{sgn}(x)+3]+3 =$$

$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{2}{3}x+2$ : Írd föl az  $f()$  inverz függvényét! Utána számold ki:  $f(5)$  és  $f^{-1}(f(5))$ -öt!

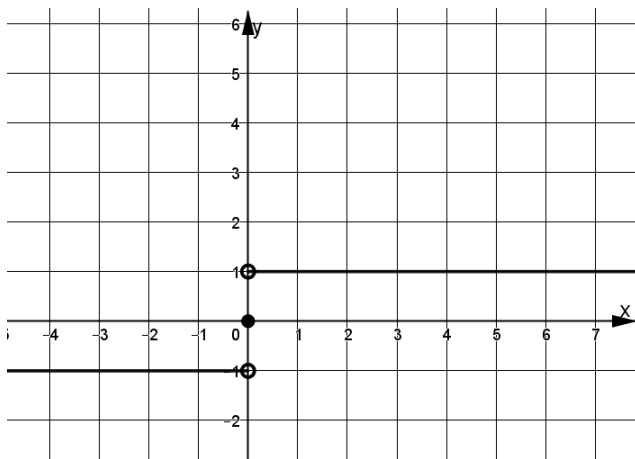
3) A külső függvény lineáris, a belső a „trafózáadó”, pl:  $\text{sgn}()$ ,  $\text{frac}()$ ,  $\text{int}()$ ,  $\text{abs}()$ . „Értéktranszformáció”

$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2x + 3$  Írd föl az  $g()$  inverz függvényét!

Utána számold ki:  $g(-15)$  majd  $g^{-1}(g(-15))$ -öt!

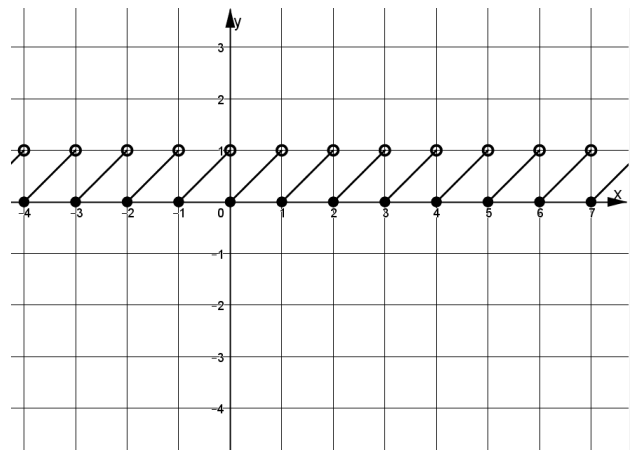
Ábrázold és az alábbi két fv-t, és add meg, hogy milyen trafóval kapjuk a fv. képét az eredeti függvény képéből (az eredeti föl van rajzolva).

$f_1(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \text{sgn}(x) + 4$



Transzformáció:

$f_2(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f_2(x) = \{x\} - 2$ .

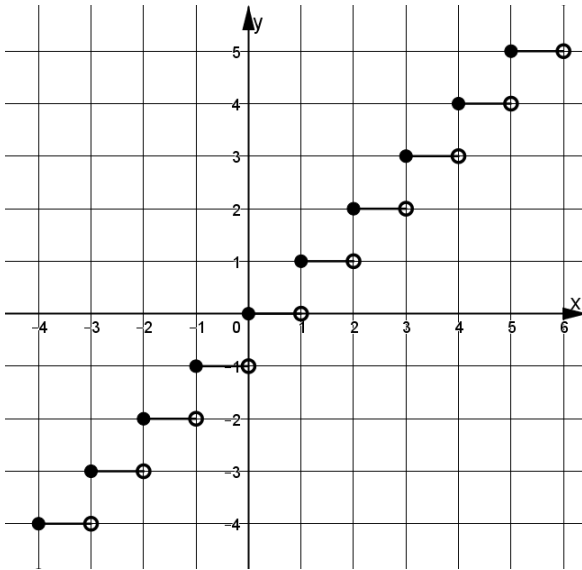


Transzformáció:

Nem köt.: Mely  $p$  paraméterre lesz a következő egyenlet megoldása nem nagyobb, mint 3.  
 $25x + 15 = 2p^2 + 7p + p^2x$

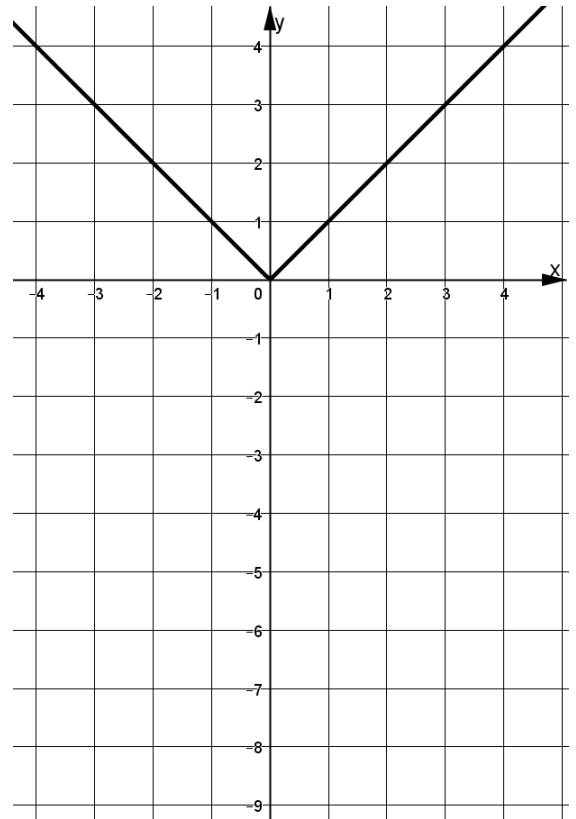
Ábrázold:  $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{1}{2}[x]$

(Az alapfüggvény be van rajzolva)



A transzformáció:

Ábrázold:  $h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2|x|$ ,

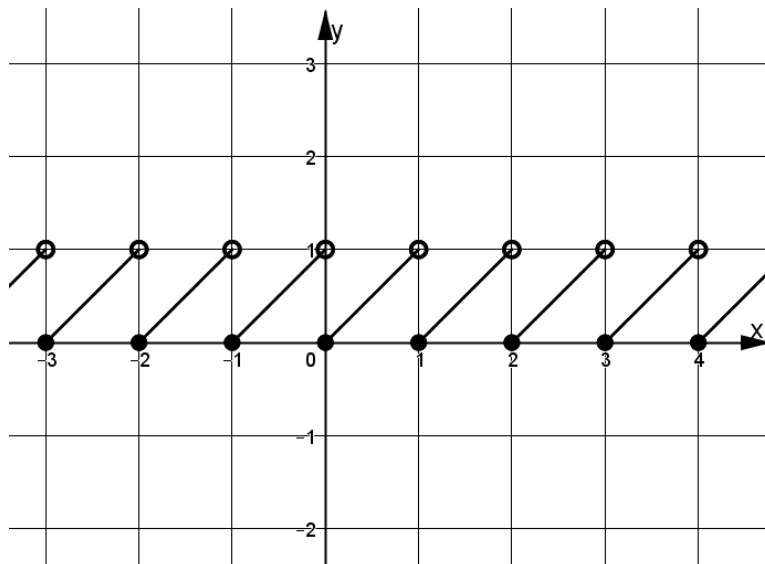


Transzformáció:

$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = -\frac{\{x\}}{2} + 2$

Add meg, hogy a  $g()$  grafikonját milyen trafókkal kapjuk meg a törtrész grafikonjából, majd ábrázold a  $g()$ -t.

Transzformáció:



Oldd meg:  $|x+1| + |x-3| = 3x$

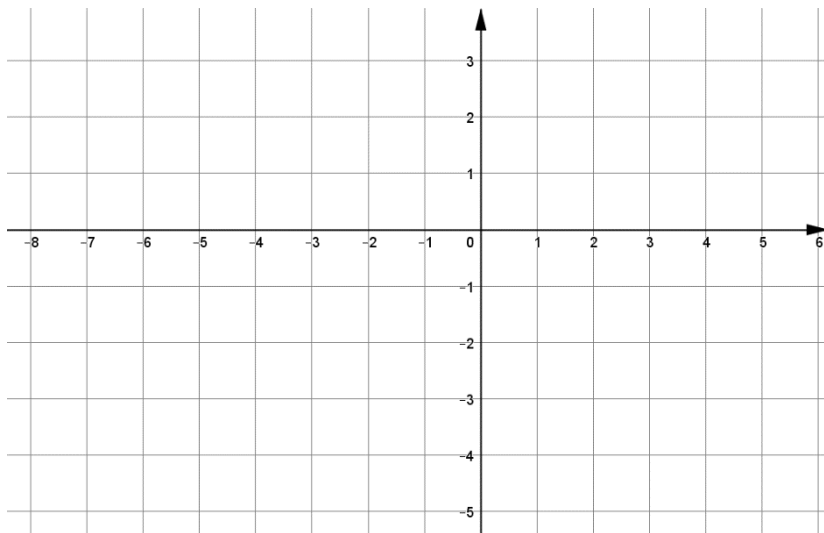
Add meg az eredeti grafikon ( $\text{sgn}(x)$  illetve  $\{x\}$  trafóját!:

$g_1(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2 \cdot \text{sgn}(x) - 4$       Trafó:

$g_2(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{1}{5} \cdot \text{sgn}(x) + 3$       Trafó:

$g_3(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = 4\{x\} + 1$       Trafó:

Nem köt: Ábrázold a baloldal függvényét, és oldd meg:  $||x+2|-1|-3| = 1$



Oldd meg:  $|2x-3| - |x+1| = -1$

4) A belső függvény a lineáris: „Változó (argumentum)-transzformáció”

Érdemes figyelni az értékkészletet:

Oldd meg:  $2 \cdot |\operatorname{sgn}(x)| = (x+1)^2 + 2$

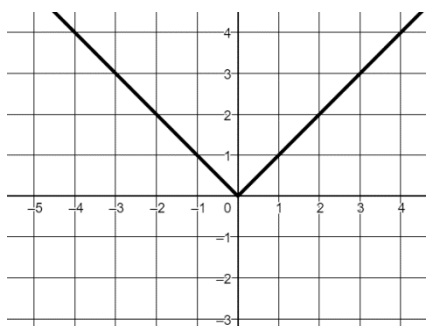
Nem köt:  $2 \cdot \left| \operatorname{sgn} \left( \frac{x^2 - 6x + 8}{x + 2} \right) \right| = 2|x-2| - 2$

Add meg, hogy trafózdik az eredeti grafikon, majd ábrázold:

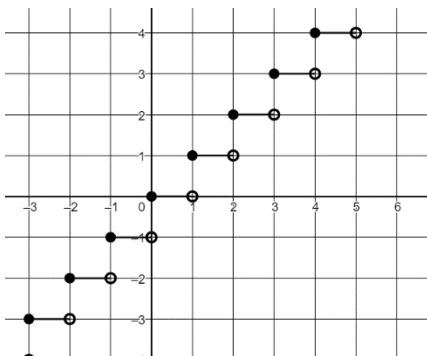
$h_1(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \operatorname{abs}(x+1)$

$h_2(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto [x-1, 2]$

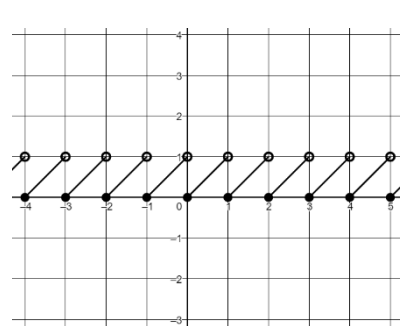
$h_3(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \{x-2, 4\}$



Trafó:



Trafó:



Trafó:

Egy  $f()$  függvény az  $x = 10$ -ben veszi fel az  $y = 4$  értéket:  $f(10) = 4$ . Mely új  $x$ -re veszik fel a 4 értéket az előző fv-ből – változó trafóval – gyártott függvények:

$$g() \text{ fv, ahol is: } g(x) = f(x-3) \quad g(x) = 4 \quad x =$$

$$h() \text{ fv., ahol is: } h(x) = f(x+5) \quad h(x) = 4 \quad x =$$

$$j() \text{ fv., ahol is } j(x) = f(3x) \quad j(x) = 4 \quad x =$$

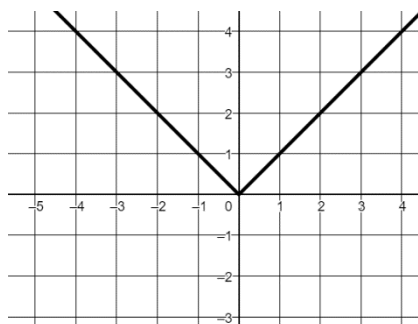
$$k() \text{ fv., ahol is } k(x) = f(x/2) \quad k(x) = 4 \quad x =$$

$$m() \text{ fv, ahol is } m(x) = f(-x) \quad m(x) = 4 \quad x =$$

$$n() \text{ fv, ahol is } n(x) = f(3x+1) \quad n(x) = 4 \quad x =$$

Add meg, hogy trafózik az eredeti grafikon, majd ábrázold:  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto |x-1,5|$

Trafó:



Ha az  $f()$  fv. az  $x = 8$ -ra veszi fel az  $y = -3$  értéket – vagyis  $f(8) = -3$ , így a grafikon pontja a  $(8; -3)$  pont, akkor mely  $x$ -re fogja felvenni a következő függvény a  $-3$  értéket?

$$g() \text{ fv, ahol is: } g(x) = f(x-4) \quad g(x) = -3 \quad x =$$

$$h() \text{ fv., ahol is: } h(x) = f(x+5) \quad h(x) = -3 \quad x =$$

$$j() \text{ fv., ahol is } j(x) = f(2x) \quad j(x) = -3 \quad x =$$

$$k() \text{ fv., ahol is } k(x) = f(x/3) \quad k(x) = -3 \quad x =$$

$$m() \text{ fv, ahol is } m(x) = f(-2x) \quad m(x) = -3 \quad x =$$

$$n() \text{ fv, ahol is } n(x) = f(4x+2) \quad n(x) = -3 \quad x =$$

Nem köt.: Oldd meg:  $x \cdot \text{sgn}(x) = x^2$

Az  $5x+3 = 2p+px$  paraméteres egyenletben mely  $p$  paraméterre lesz a megoldás kisebb, mint 2?

Két város távolsága 200 km. Benedek átlagosan 60 km/h-val szokott utazni egyikből a másikba. Azt kéri a barátjától, hogy adjon képletet arra, hogyha  $t$  idő alatt szeretne odaérni, akkor mennyivel kell megváltoztatni az átlagsebességét. Vagyis egy  $t =$  paraméter, paraméteres egyenletet kell felírni az  $x$  sebességváltoztatásra, majd megoldani  $x$ -re!

Egy  $f()$  függvény az  $x = 5$ -ben veszi fel az  $y = 3$  értéket:  $f(5) = 3$ . Hol veszik fel az  $y = 3$  értéket az előző fv.-ből – változó trafóval – gyártott függvények:

$$g() \text{ fv., ahol is: } g(x) = f(x-5) \quad g(x) = 3 \quad x =$$

$$h() \text{ fv., ahol is: } h(x) = f(x+5) \quad h(x) = 3 \quad x =$$

$$j() \text{ fv., ahol is } j(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) \quad j(x) = 3 \quad x =$$

$$k() \text{ fv., ahol is } k(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right) \quad k(x) = 3 \quad x =$$

$$m() \text{ fv., ahol is } m(x) = f(-x) \quad m(x) = 3 \quad x =$$

$$n() \text{ fv., ahol is } n(x) = f(-3x+1) \quad n(x) = 3 \quad x =$$

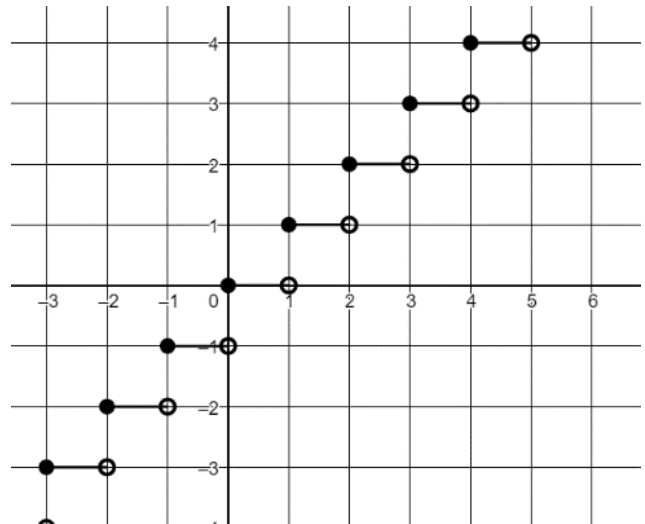
$$\text{Aki 5-ös akar lenni: } [4x] + \left\{ \frac{\{x\}}{2} \right\} = [3x + 7]$$

$$* \quad [2x^2 - 4x] + \{x + 24\} = 3[x - 1]$$



Add meg, hogy trafózódik az eredeti (egészrész) grafikon, majd ábrázold:  $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \left[ \frac{1}{2}x \right]$

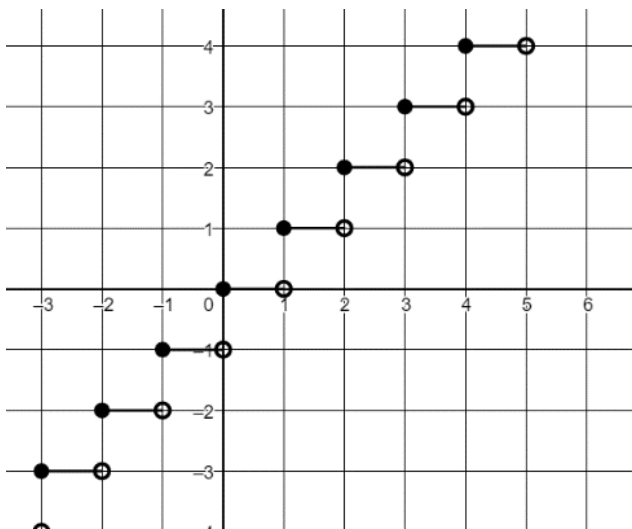
Trafó:



Add meg, hogy trafózódik az eredeti grafikon, majd ábrázold!

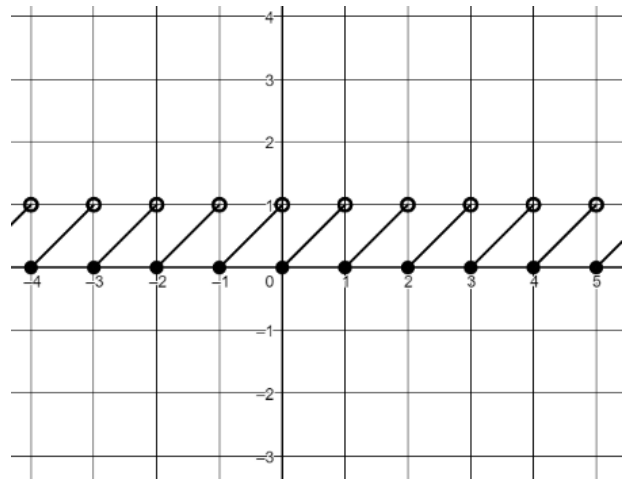
$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = [-2x]$$

Trafó:



$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \left\{ -\frac{x}{3} \right\}$$

Trafó:



Oldd meg:  $|4x+1| - |5-3x| = 2x$

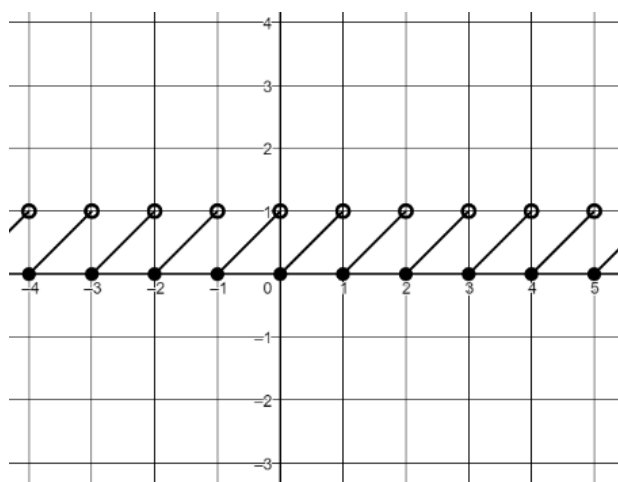
Nem köt: Oldd meg:  $x - |x| = \{x\}$

\* Oldd meg:  $[x]^2 + 2[x][-x] + [-x]^2 = 1$

Add meg, hogy trafózódik az eredeti grafikon, majd ábrázold!

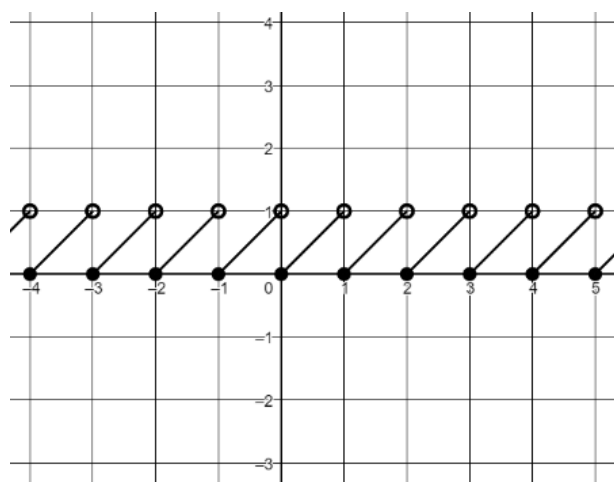
$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \{1,5x\}$

Trafó:



$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \left\{ -\frac{2x}{3} \right\}$

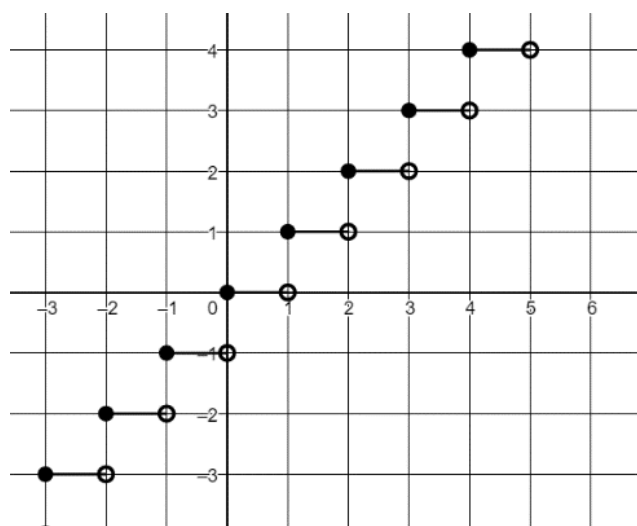
Trafó:



Add meg, hogy trafózódik az eredeti grafikon, majd ábrázold!

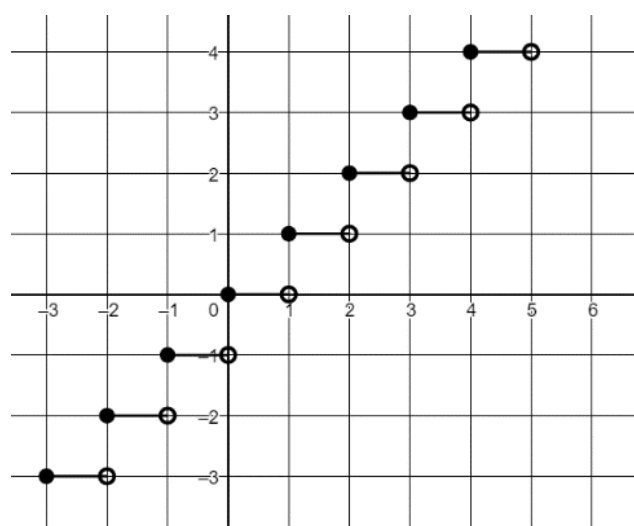
$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto [2x-3]$

Trafó:



$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \left[ -\frac{x}{2} + 1 \right]$

Trafó:



Add meg a hozzárendelési szabály: az alap függvények: [ ] abs( ) és { }

$$\text{graf}_f(\cdot) \equiv E^{y(0;-3)}(x^{\lambda = -2/3}(\text{graf}_f(\cdot))) \quad f(x) =$$

$$\text{graf}_g(\cdot) \equiv E^{y(0;1)}(x^{\lambda = 5}((E^{y(-2;0)}(\text{graf}_{\text{abs}(\cdot)}))) \quad g(x) =$$

$$\text{graf}_h(\cdot) \equiv E^{y(0;-2)}(x^{\lambda = -4}((E^{y(-1;0)}(\text{graf}_f(\cdot)))) \quad h(x) =$$

$$\text{Oldd meg: } \left| |2x - 4| - x \right| = \frac{x}{4} - 1$$

$$\text{Nem köt.: } |x| - 7 = \text{sgn}(x) - 10$$

$$\text{Nem köt.: } x - |x| = \{x\}$$

Add meg, hogy trafózódik az eredeti grafikon (egyik a törtrész, másik az egészrész):

$$f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \left\{ -\frac{x}{2} + 3 \right\}$$

$$g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto [2x - 3]$$

V) Intervallumonként lineáris fv-ek folytatása:

1) Oldd meg:

Először add meg az  $\text{abs}(\ )$  fv. grafikonjának transzformációját, majd oldd meg az egyenletet:

$$|3x-2| = \frac{2x}{3} + 7 \quad \text{Trafó:}$$

Először add meg az  $\text{abs}(\ )$  fv. grafikonjának transzformációját, majd oldd meg az egyenletet:

$$\left| \frac{x}{2} + 1 \right| = -\frac{x}{3} + 1 \quad \text{Trafó:}$$

2) Több abszolút érték

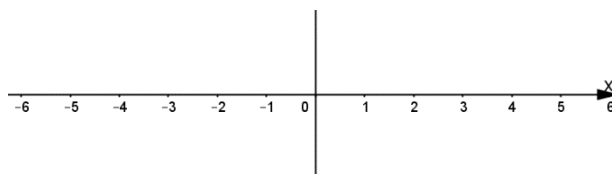
Nem köt.: oldd meg:  $|x^2 - 4x + 5| = 10$   
(Érdeemes megvizsgálnod először, hogy mi is az abszolútértéken belüli kifejezés értékkészlete...)

Aki 5-ös akar lenni:  
Oldd meg:  $|x|^2 - 8|x| = -15$

Nem köt.: Ábrázold:  $\left| |3x| + 2x \right| + x$

Oldd meg:  $|2x-3| - |x-1| = -x+4$  – a következő lépésekkel:

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \quad ] \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

I

II.

III.

$|5 - 2x| + |3x + 1| = x + 6$

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \quad ] \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

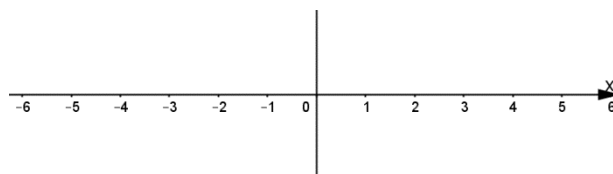
I

II.

III.

Nem köt.:  $|x-1| + |x+1| = x+1$

Előjel-grafikon:



Függvényeszkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \quad ] \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

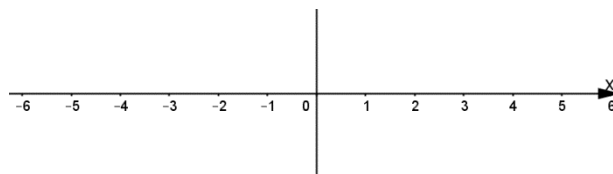
I

II.

III.

Nem köt.:  $|-2x+2| + |3x-1| = x+1$

Előjel-grafikon:



Függvényeszkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \quad ] \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

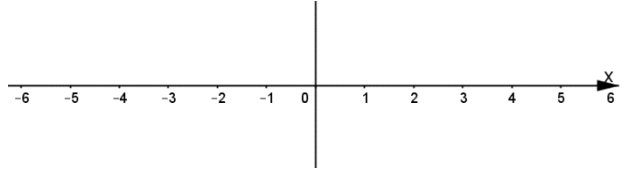
I

II.

III.

$$|-2x+2| - |3x-1| = -\frac{1}{5}x-1$$

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \quad ] \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

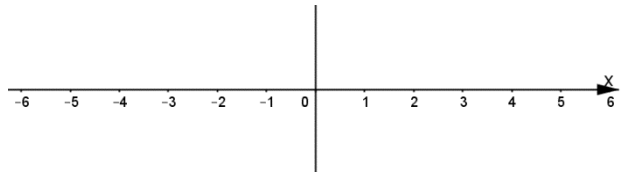
I

II.

III.

$$|x-2| < \frac{x+4}{2}$$

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

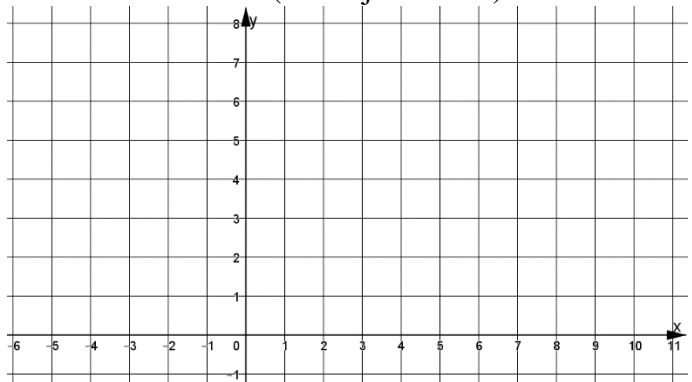
$$f \left| \begin{array}{l} ] \quad ; \infty[ \end{array} \right| :$$

Megoldás:

I

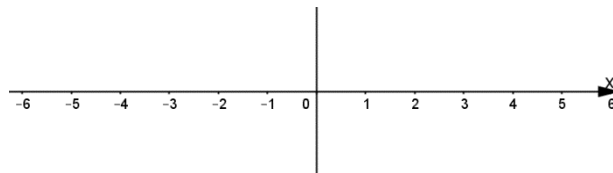
II.

Grafikonok (bal és jobb oldal)



$$2|x+1| \geq x+4$$

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

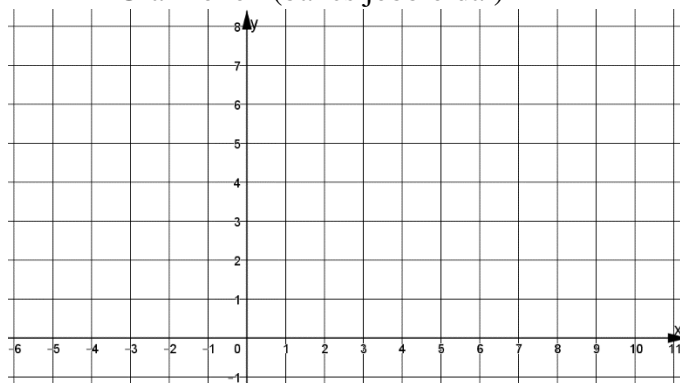
$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \end{array} \right| ; \infty[ :$$

Megoldás:

I

Grafikonok (bal és jobb oldal)



II.

Aki 5-ös akar lenni...:  $|x-1|+|2-x| > 1+x$

Előjel-grafikon:



Függvényleszűkítések:

$$f \left| \begin{array}{l} ]-\infty; \end{array} \right| :$$

$$f \left| \begin{array}{l} ] \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} ] \end{array} \right| :$$

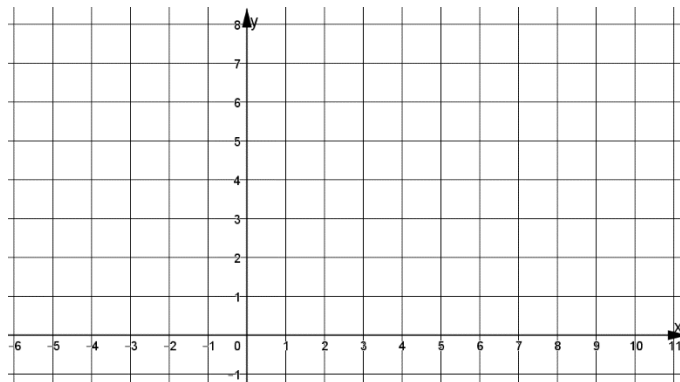
$$f \left| \begin{array}{l} ] \end{array} \right| ; \infty[ :$$

Megoldás:

I

II.

III.





Aki 5-ös akar lenni...:  $\left|2x-1\right|-3 > 2$

I.

II.

1.

2.

1.

2.

$$|x|-7 = \operatorname{sgn}(x)-10$$

$$\text{Nem köt.: Oldd meg: } |x| = \operatorname{sgn}(x)$$

$$\text{Nem köt.: Oldd meg: } |x|-4 = (\operatorname{sgn}(x))^2+3$$

## VI) Számsokaság jellemzése – egy kis statisztika

### 1) Távolságösszegek minimuma

Ábrázold:  $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |x+1| + |x-2|$

(Először szedd szét három intervallumra, írd föl a függvényeket, és utána...)

Előjel-grafikon:

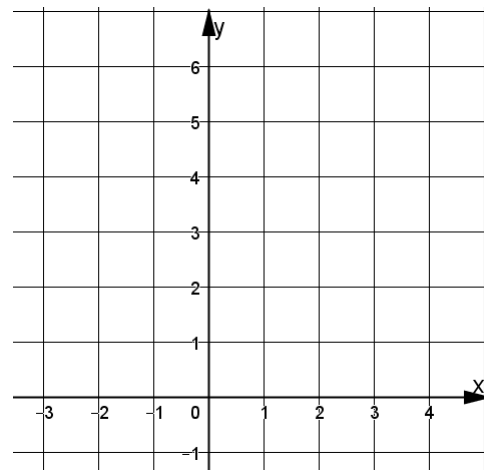


Függvényleszűkítések:

$$f \Big|_{]-\infty; -1]:}$$

$$f \Big|_{]-1; 2]:}$$

$$f \Big|_{]2; \infty[}$$



Javasolt: Hol (melyik  $x$ -re) van a minimuma a következő kifejezésnek?  $K = |x+1| + |x-2| + |x-3|$

(Először szedd szét három intervallumra, írd föl a függvényeket, és utána...)

Előjel-grafikon:

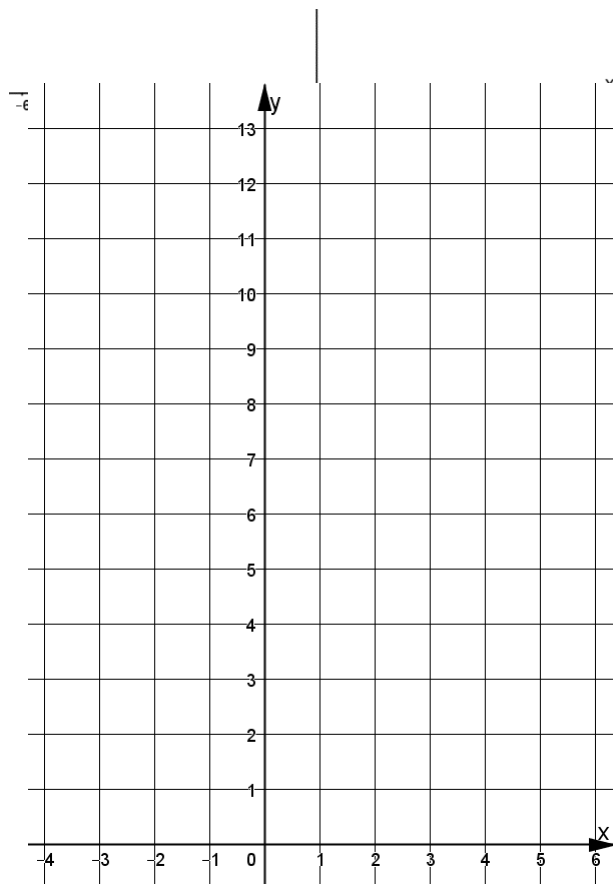
Függvényleszűkítések:

$$f \Big|_{]-\infty; -1]:}$$

$$f \Big|_{]-1; 2]:}$$

$$f \Big|_{]2; 3]:}$$

$$f \Big|_{]3; \infty[}$$



Ábrázold:  $f() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |x+3| + |x-1|$

(Először szedd szét három intervallumra, írd föl a függvényeket, és utána...)

Előjel-grafikon:

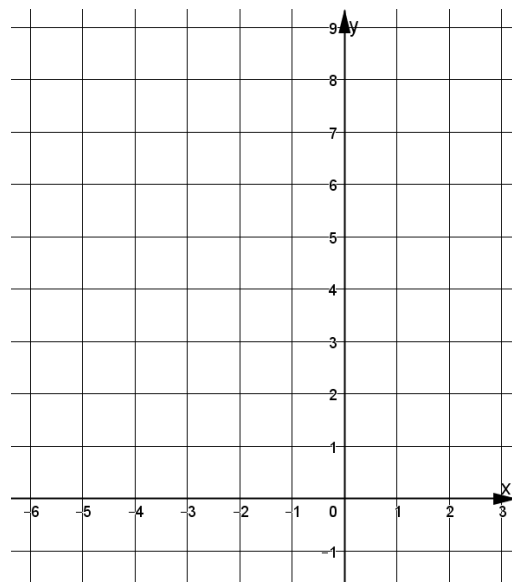


Függvényleszűkítések:

$$f \Big|_{]-\infty; \quad ]} :$$

$$f \Big|_{\quad ] \quad ; \quad ]} :$$

$$f \Big|_{\quad ] \quad ; \infty[ :$$



## 2) Számsokaság jellemzése

Egy dobókockával 21-szer dobtunk

A szám:	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	6-os
Hányszor fordul elő:	7-szer	2-szer	5-ször	3-szor	2-szer	2-szer

Írd le növekvő (nem szigorún növekvő) sorrendben a 21 számot (férjen ki egy sorba)! Számold ki az átlagot, a mediánt és a módusz és a terjedelmet!

Terjedelem:

Átlag:

Medián:

Módusz:

Írd le egymás mellé, hogy az az év hónapjai hány napból állnak. Majd tedd őket sorrendbe. Majd számold ki az átlagot, a mediánt és a móduszt.

Terjedelem:

Átlag:

Medián:

Módusz:

Egy 32 fős osztályból egy dolgozat a következő eredményt hozta: 1 db 1-es, 5 db 2-es, 8 db 3-as, 10 db 4-es és 8 db 5-ös. Majd számold ki a terjedelmet, az átlagot, a mediánt és a móduszt.

Készíts olyan 10 adatból álló adatsort, mely átlaga 2,3 ; módusza 4 és mediánja 5! (Vigyázz, lehet negatív számot is használni...) Add meg a terjedelmét!

Egy tanuló 10 jegyének átlaga 4,1. a) Legfeljebb hány 5-öse lehet? b) Legfeljebb hány egyese lehet? c) Legalább hány 5-öse van? d)\* Lehet-e a módusza 3?

Készíts olyan 5 adatból álló adatsort, melyben három különböző érték szerepel, módusza és mediánja 10, átlaga 6,8! Add meg a terjedelmét!

Mely helyen szeretnél élni? Érveld! Ahol az éves naponta délben mért hőmérsékleti értékek terjedelme  $22^{\circ}\text{C}$ , vagy ahol az éves naponta délben mérték számtani közepe (átlaga)  $22^{\circ}\text{C}$ , vagy a naponta délben mérték módusza  $22^{\circ}\text{C}$ , vagy pedig a naponta délben mérték mediánja  $22^{\circ}\text{C}$  ?

Ha 2 dolgot választhatsz ebből a négy értékből, melyiket választanád – és miért?

Adj meg 6 olyan egész számot, mely terjedelme 10, mediánja 1,5 és módusza 2.

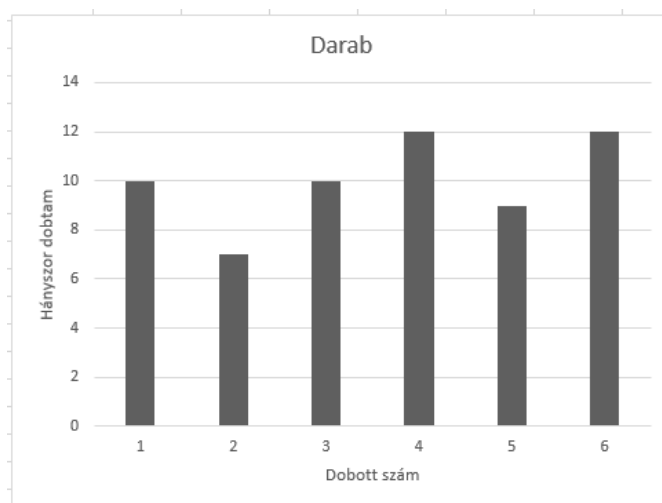
Mely  $p$  paraméterek esetén lesz a következő kifejezés megoldása 3-nál nem nagyobb:

$$p-x = 2px+p^2x+3$$

Dobókockával dobok.

A dobott számok darabszámát mutatja az oszlopdiagram.

Számold ki a terjedelmet, átlagot, mediánt és móduszt!



Szerkesztette: Vízhányó Zsolt