Matematika

Geometria

Munkatankönyv

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2021

TARTALOMJEGYZÉK

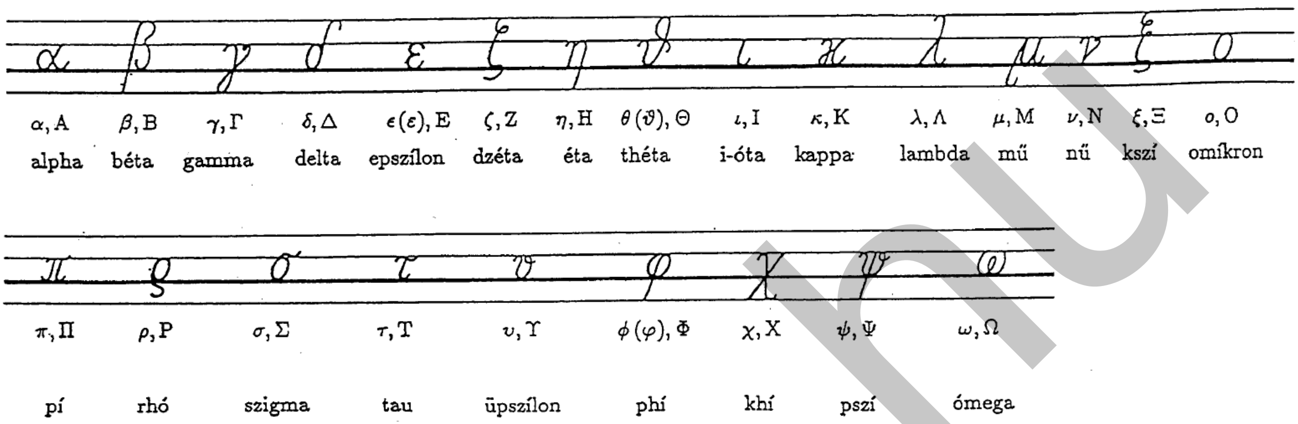
Geometria A: Alapok, ponthalmazok, helyzetek

I. Alapfogalmak, alaptételek, görög betűk, jelölések

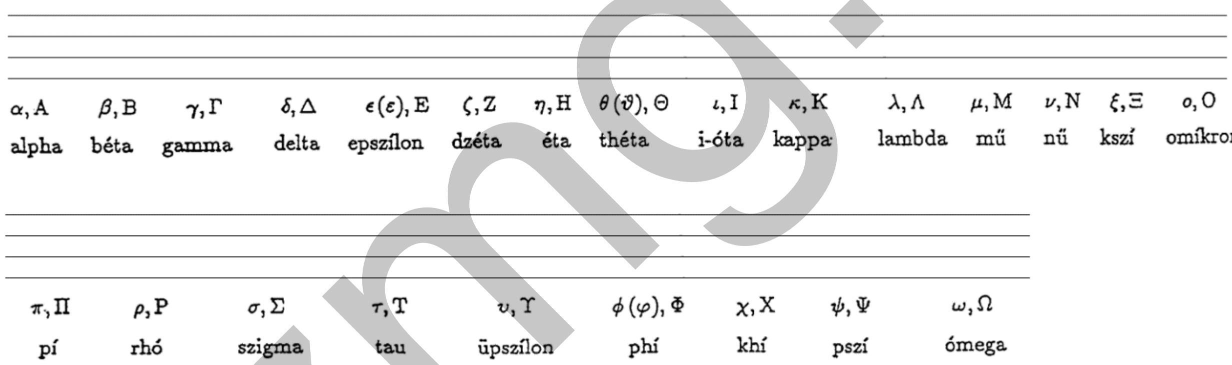
I/1) Alapfogalmak - amiket nem magyarázunk: pont, egyenes, sík

I/2) Görög betűk

α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), ζ (zéta), η (éta), ϑ (théta), ι (ióta), κ (kappa), λ (lambda), μ (mű), ν (nű), ξ (kszí), o (omikron), π (pí), ρ (ró), σ (szigma), τ (tau), υ (üpszilon), φ (fí), χ (khí), ψ (pszí), ω (ómega)



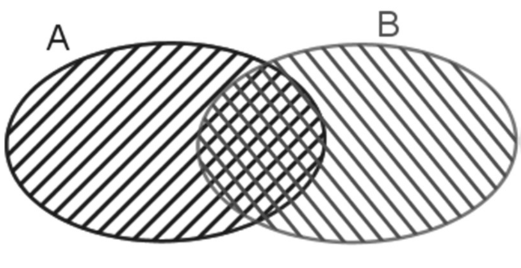
Írjuk le kézzel is őket (ceruza!)



I/3) Halmazelméleti jelek (szemléltetés Venn-diagrammal) - Lásd „Algebra B”

Részhalmaz:

$A \subseteq B \Leftrightarrow$

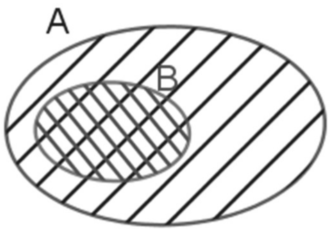


Valódi részhalmaz

$A \subset B \Leftrightarrow$

$P \in e$ vagyis

$Q \notin S$ vagyis



Def.: $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

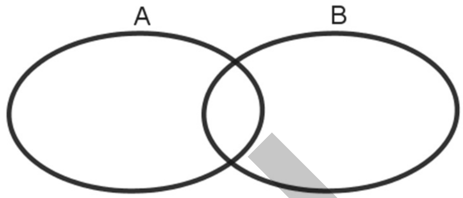
A és B halmaz metszete halmaz, mely elemei **„azon elemei A-nak, amelyek B-nek is elemei”.** (Pontosan azok (azok és csak azok) az elemek, amelyek mindkét halmazba beletartoznak.)

Pl.: Ha az osztály diákjai az elemek, akkor a két osztály metszete üres halmaz
pl.: A=az osztály 160 cm-nél magasabb tanulói, B=az osztály szemüveges tanulói: ez esetben a metszet már nem üres halmaz általában.

Def.: **A és B diszjunkt $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$**
Pl.: A 7.a és a 7.b osztály.

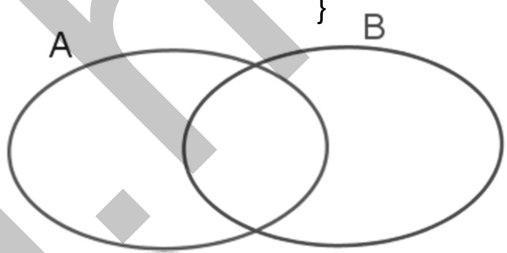
$B \cap A = \{x \in B \mid x \in A\}$ így: $A \cap B = B \cap A$

$A \cup B$: két halmaz uniója: az összes olyan elemből álló halmaz, amelyek vagy az A-ba vagy a B-be beletartoznak (akár mindkettőbe is) és más elemek nem tartoznak bele!
(Vagyis „legalább az egyikbe” beletartoznak)



Pl: két osztály uniója;
v.: repülni tudók és kétlábúak uniója: ember, légy, sas

Pl.: {☺;☠; 3; 0} ∪ {☺; * ; 3; 7; 12} = { }

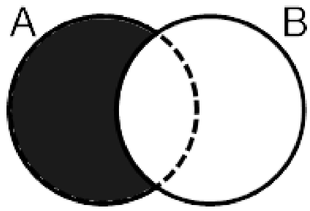


Számoljunk:

A=szemüvegesek – 15 fő
B=szőkék – 10 fő
Aki szőke vagy szemüveges: 19 fő

Hány olyan van, aki mindkettő, és hány aki csak ez v. csak az?

Halmazok kivonása: Def.: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



„A mínusz B egy halmaz, mely elemei
„<u>azon elemei A-nak, melyek nem elemei B-nek</u>”

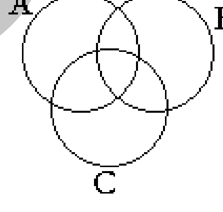
Pl.: {1;2;3;4;5}\{4;5}= { }

Vigyázat: olyat is „elvehetek”, ami nincs is benne:

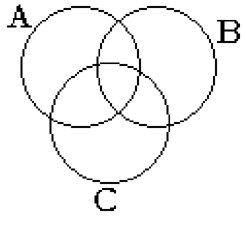
{1;2;3;4;5}\{5;6} = { }

Add meg satírozással:(ceruza-radír!!!)

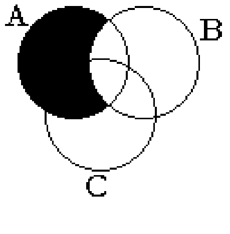
$(A \cup B) \setminus C$

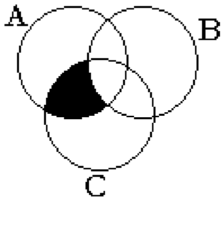


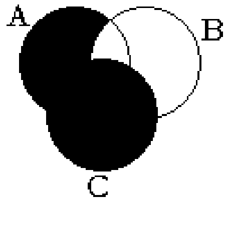
$(A \cap C) \cup B$



Írd alá a satírozott megadását!

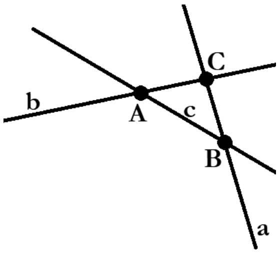


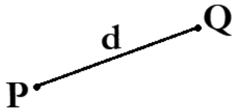




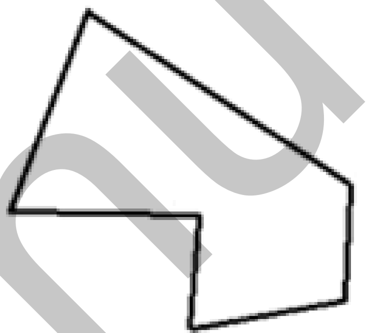
I/4) Alapvető jelölések a geometriában

a) Pontok: Az abc nagybetűi: A,B,C,D,E,F …,
egyenesek: abc kisbetűi: e,f,g,h, … szakaszok: a,b,c,d… Sík: S,S_1,S_2…





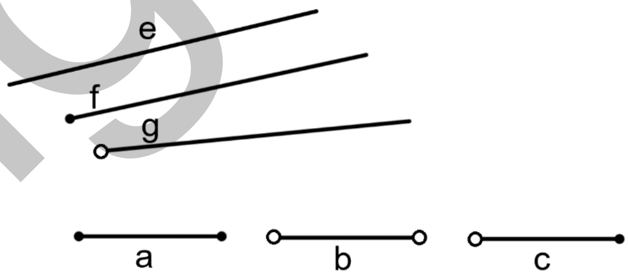
b) Pontok, szakaszok indexelése: A_1; A_2; … A_n.
Pozitív körüljárással (óra járásával ellenkező).



c) Egyenesek, szakaszok

egyenes, félegyenes: elnevezésük
szakasz, nyílt, félig nyílt: elnevezésük

e – egyenes
f – félegyenes (zárt félegyenes)
g – nyílt félegyenes
a – szakasz (zárt szakasz)
b – nyílt szakasz
c – félig zárt szakasz
(v.: félig nyílt szakasz)



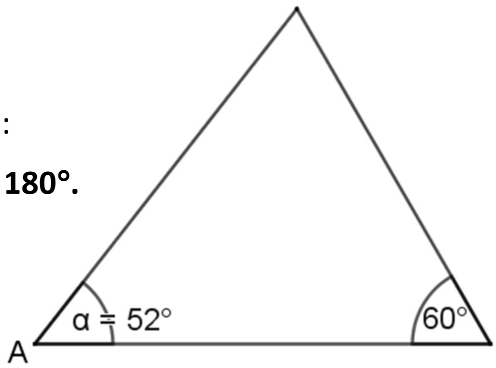
Rajzold le őket te is, írd rá a nevüket

d) Háromszöggel kapcsolatos elnevezések
(i) Oldalai, csúcsai:
csakis pozitív körüljárással!

(ii) Háromszög szögei (később bizonyítjuk):

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

Írj be minden adatot



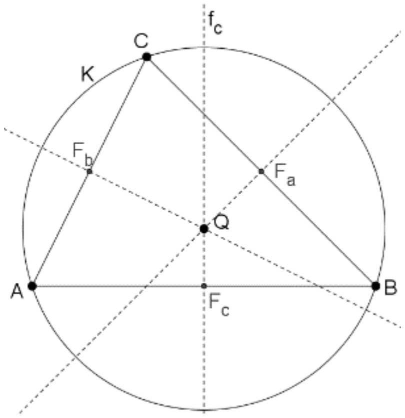
I/5) Háromszög nevezetes vonalai, pontjai

a) Oldalfelező merőlegesek ↔ körülírt kör középpontja

Tétel: Δ-ben az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást. Ez a Δ köré írható kör középpontja.

Figyelem: A háromszögön kívül is metszhetik egymást!

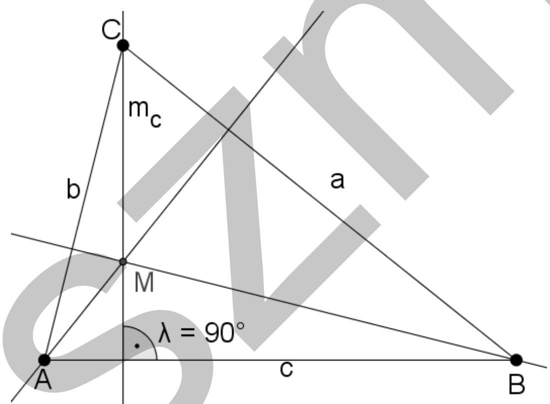
Rajzold le újra!

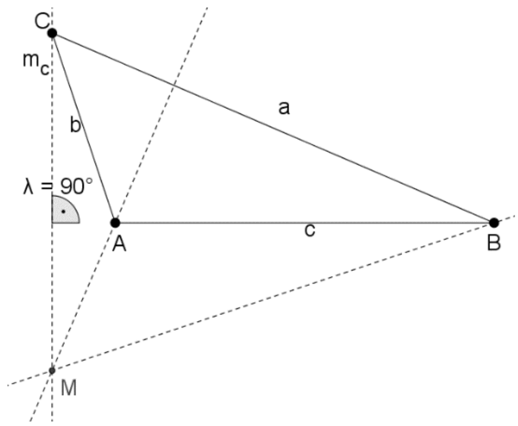


b) Magasságvonal ↔ magasságpont, talppontok

Def.: Δ magasságvonala egy csúcsból a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges. Figyelem: a magasságvonal futhat a háromszögön belül, kívül, vagy épp egy oldalon.

Tétel: A Δ magasságvonalai egy pontban, a magasságpontban (M) metszik egymást. (Ez a pont hegyesszögűnél a Δ-ön belül van, tompaszögűnél kívül, vagy ha derékszögű: akkor épp a derékszögű csúcs!





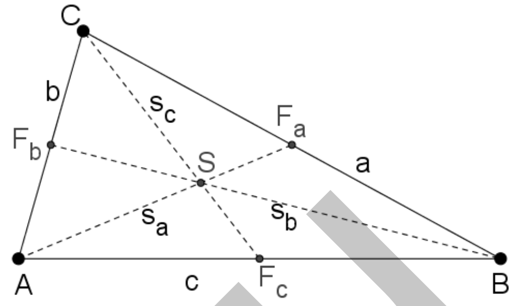
Rajzold le őket újra ide:

c) Súlyvonal ↔ súlypont:

Def.: Háromszög súlyvonala csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Tétel: Δ-ben a súlyvonalak az oldalhoz közelebbi harmadolópontjukban metszik egymást, amely a Δ súlypontja - jele S.

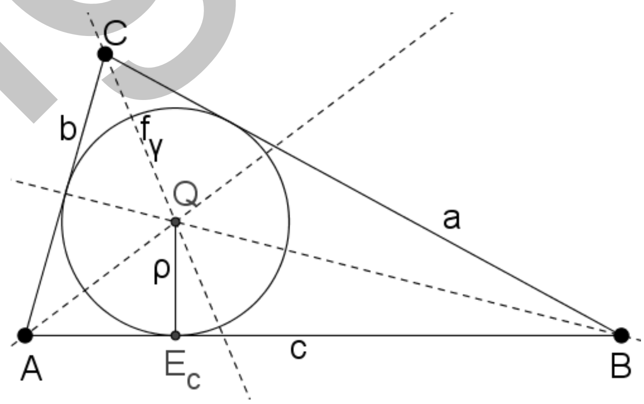
Rajzold le újra. AB = 8 cm



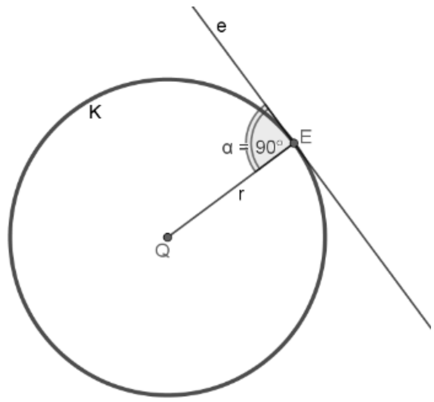
d) Szögfelezők ↔ a beírt kör középpontja

Tétel: Δ-ben a szögfelezők egy pontban metszik egymást. A közös metszéspont a beírt kör középpontja.

A beírt kör sugarát általában ρ-val jelöljük!

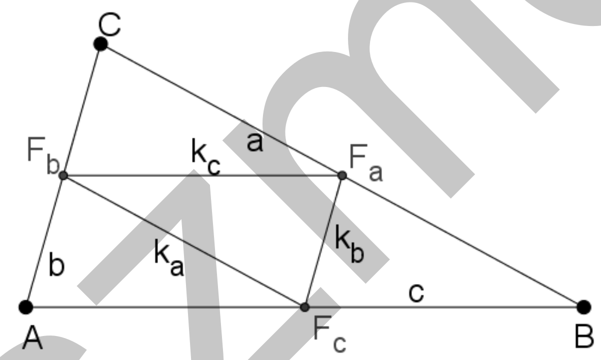


TÉTEL: KÖR ÉRINTÉSI PONTBA HÚZOTT SUGARA MERŐLEGES AZ ÉRINTŐ EGYENESRE. (Kört érintő egyenes: melynek csak egy közös pontja van a körrel.) Rajzoljunk egy körhöz egy pontjában érintőt!



e) Középvonalak: **Def.: A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük.**

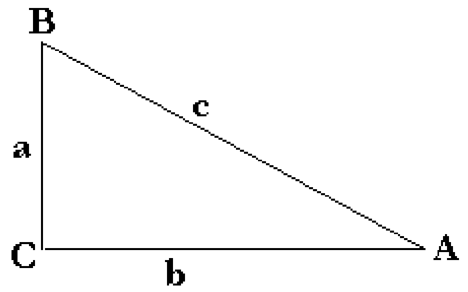
Tétel: Δ középvonala párhuzamos a háromszög harmadik oldalával, és hossza fele annak.



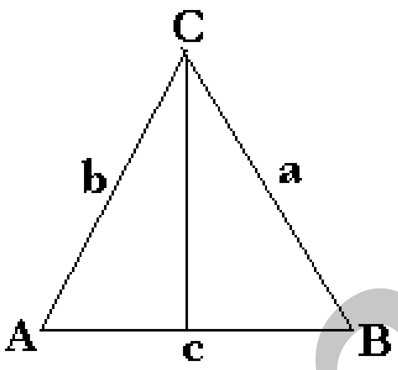
Mutasd meg, hogy a legnagyobb oldalból és a másik két oldallal párhuzamos két középvonalból nem lehet háromszöget szerkeszteni!

I/6) Nevezetes háromszögek

Derékszögű ⊿: Két befogója van (a derékszöget bezárók) és egy átfogója.
Alapvetőn az átfogót jelöljük c-vel! Írjuk be a szögeket görög betűkkel!
Rajzolj mellé egy másikat, ne pont ugyanilyet!

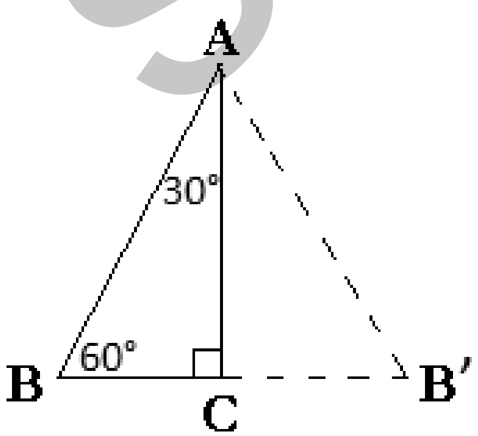


Egyenlőoldalú Δ.: Oldalai egyenlők, szögei egyenlők (60°).
Szerkessz mellé egy 6 cm oldalút! Írd be a szögeit!

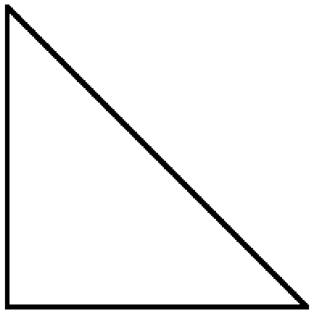


A „Félszabályos háromszög”: 90°; 60°; 30°:
Fontos tulajdonsága: a rövidebbik befogó fele az átfogónak.

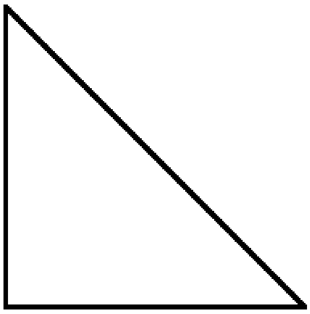
Ha tükrözzük az AC oldalra: $BB'A_{\triangle}$ egyenlőoldalú!
Vonalzóval, szögmérővel rajzolj mellé egy 9 cm átfogójút, ami a „hasán” fekszik! Írd be az adatait!



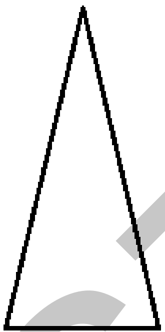
„Egyenlőszárú-derékszögű” – „félnégyzet”…
Írd rá az adatait! Egészítsd ki egy négyzetté!
Szerkessz mellé egy 6 cm átfogójút, ami a „hasán” fekszik.

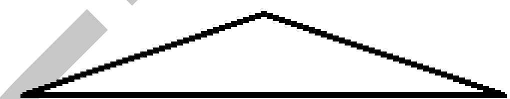


Mutasd meg, hogy egy ilyen háromszög bárhány (2; 3; 4; 5 …) nem szükségszerűn egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszögre darabolható!



Egyenlőszárú háromszög: alap, szárak.
A két szár, illetve az alapon fekvő két szög megegyezik. Írd be az adatait!
Szerkessz melléjük egy harmadikat!

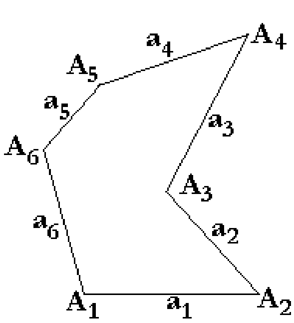


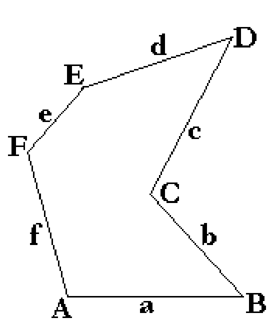


Gondolkodtató: egy egyenlőszárú Δ egyik szöge 40°. Mennyi a másik?

I/7) Egyéb fogalmak, elnevezések

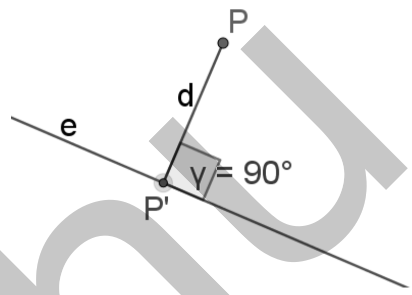
a) Egyéb alakzatok elnevezései:
Csúcsok, oldalak, szögek:
$F\widehat{A}B = \widehat{A} = \alpha = FAB\angle$.





b) Távolság: d(A;B)=5 cm; d(e;P); d(e;f)
Két pont távolsága: d(A;B)= az A és a B távolsága.
Pl.: d(A;B)=5 cm
(a „d” a „distantia” = távolság, köz (térköz) szóból van)
Rajzold fel!

Pont távolsága egyenestől:



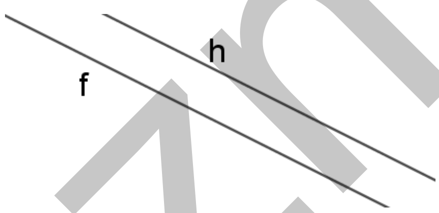
$P \notin e \Rightarrow$

d(P;e)= az egyesen található merőleges vetülete (talpponja) és az eredeti pont által meghatározott szakasz hossza: d(P;e)=d(P;P’)

$P \in e \Rightarrow$ d(P;e)=0

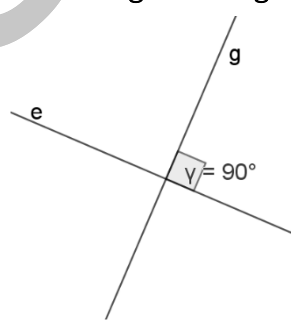
Rajzolj fel egy másikat,
és mérd le a távolságot!

c) Párhuzamosság, merőlegesség, szög:
a ║ b az „a” és a „b” egyenes párhuzamos,
Két párhuzamos egyenes távolsága = az egyik egy pontjának távolsága a másiktól. Rajzolj mellé egy másikat, rajzold be a távolságukat és mérd is le!



Két sík is lehet párhuzamos: $S_1 \parallel S_2$ Pl.: a padló és a mennyezet.

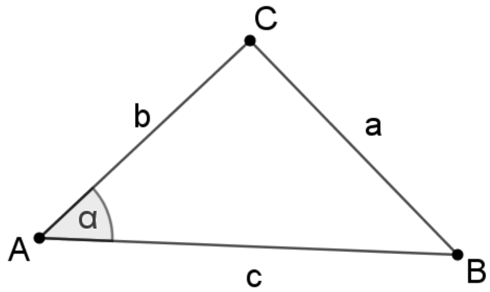
$e \perp g$ az e és a g merőleges egymásra. Rajzolj mellé egy másikat!



$S_1 \perp S_2$ Az S_1 és az S_2 sík merőleges: pl: padló és a fal.

e∦f: az e és f nem párhuzamos, vagyis (ha egy síkban vannak) metszik egymást. Rajzolj ilyet! Mérd le a szögüket és írd is be!

$A\hat{B}C$, vagy másképp: ABC$\angle$ vagyis az „ABC szög”. Ilyenkor a szög csúcsa mindig a középső jelű pont. Írd föl a β-t és γ-t így is!



II. Síkidomok, konvexitás, szögek, alakzatok

II/1) Definíciók: Síkidomok, konvexitás, szögek, alakzatok

a) A sík pontjainak egy halmazát alakzatnak hívjuk

b) Def.: Síkidomok: olyan alakzatok, amelyeket a sík darabolásával nyerjük:

Például: háromszög, kör, félsík (egy sík egyenessel elvágott fele)

(i) Lehetnek: korlátosak ↔ nem korlátosak
Nem korlátos: pl. félsík, egyenes, szögtartomány
Nyílt, zárt síkidomok

- Zárt: ha a határvonal a síkidomhoz tartozik
- Nyílt: ha a határvonal nem tartozik a síkidomhoz

Ha a „nyílt” és „zárt” gondolat a kérdés, akkor a nyílt szaggatott vonallal, a zárt vastag vonallal van rajzolva. Pontnál „üres karika” és „bumszli”.

(ii) Lehet pl.: kör, félsík, egyenes, nyílt (zárt) félegyenes, háromszög stb.

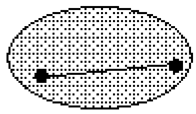
Rajzoljunk ilyeneket, a nevét odaírva!

II/2) Konvexitás

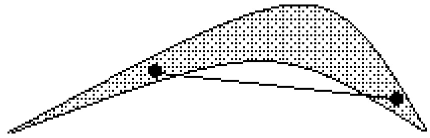
a) **Def.: Konvex alakzat: bármely két pontját összekötő szakasz minden pontját tartalmazza.**

Konkáv: ami nem konvex.

b) Példák:



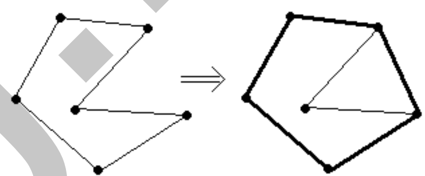
konvex



konkáv

Rajzolj egy konvex és egy konkáv alakzatot!

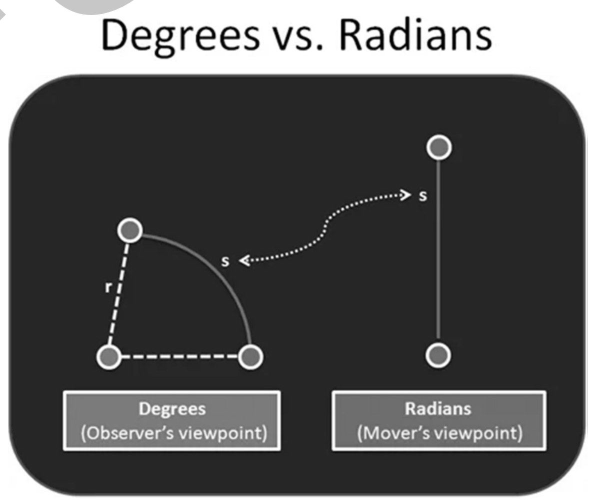
c) Def.: Alakzathoz tartozó konvex burok (kezdetleges definíció): Az a „legszűkebb” konvex alakzat, amely az eredeti alakzatot tartalmazza.



Gyakorlatilag úgy kell elképzelni, hogy az alakzatra egy befőttesgumit feszítünk, és a befőttesgumi alakja a konvex burok.

II/3) A radián – ívmérték

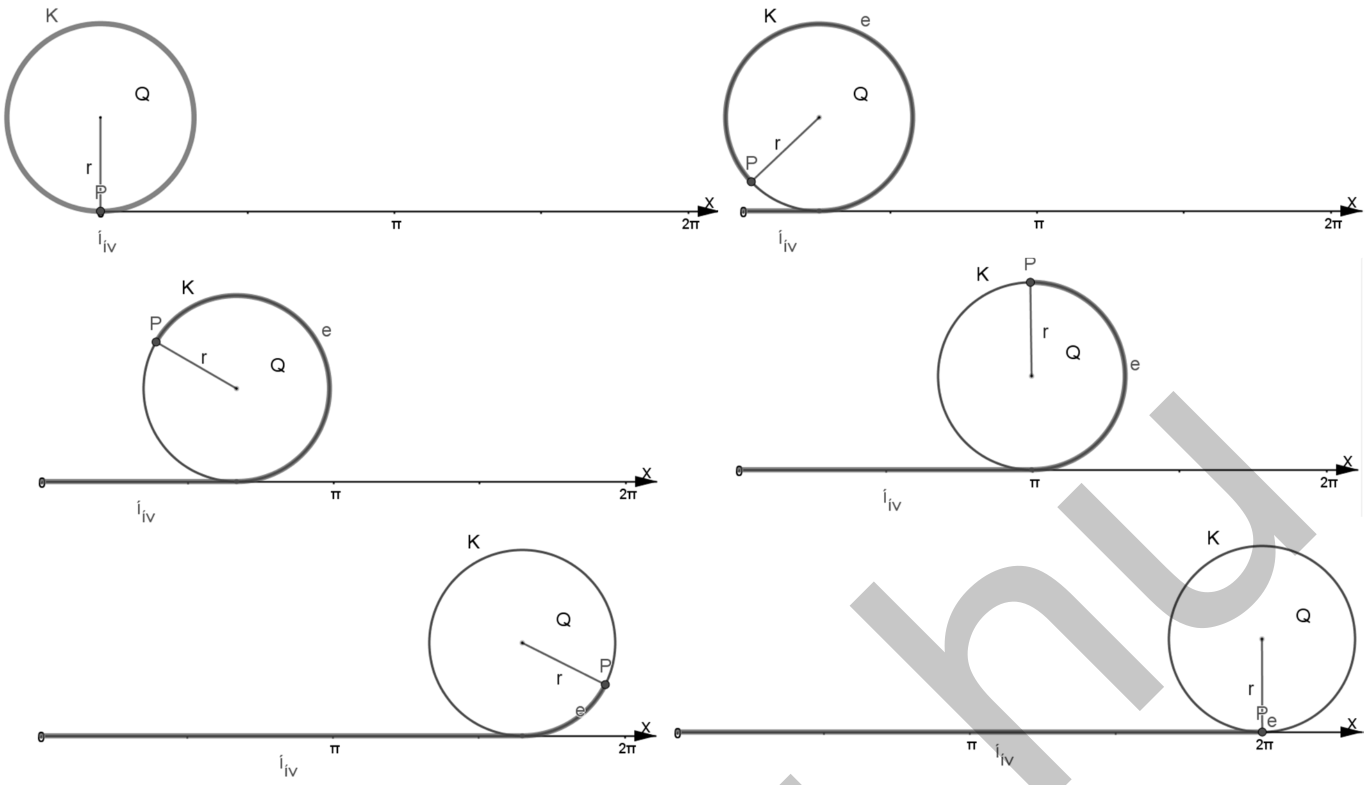
Ha egy egységsugarú kör kerületére felfeszítünk egy s hosszúságú madzagot, akkor a középpontból tekintve azt látjuk, hogy mekkora szögben tudtunk elfordulni a kezdőponttól. A madzag hossza pedig (**egység sugár esetén**) az a hossz, amit „radiánnak” nevezünk.



Ha egy sugárnyi madzagot mérünk fel, az körülbelül 57,3° elfordulást jelent. Ha egység hosszú sugár esetén kb. 3,14159 egység hosszú madzagot tekerünk a körre, az lesz 180°, vagyis fél körív. Ez a 3,141592653589793238462643383 (és még végtelenségig folytathatnánk) szám jele, hogy könnyen írhassuk: π.

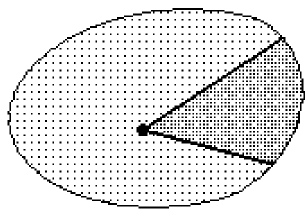
Olyan ez, mintha már unnánk mondani, hogy 314,159 Ft, hanem azt mondanánk, hogy 1€. Így könnyebb azt mondani, hogy 2€, mint azt, hogy 628,308 Ft.
vagy, mint azt. hogy 209,439 Ft ami 2/3 €.

a) Egy egységsugarú körre tekert piros madzag – színezd be a madzagot pirossal!



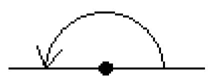
II/4) Szög: az elfordulás mértéke

Def.: egy adott pontból kiinduló két félegyenes szöget alkot. Az adott pont a szög csúcsa, a két egyenes a szög szárai. A szög szárai a síkot két szögtartományra bontják. A szárak hozzátartoznak a szögtartományokhoz.



a) egyenes-szög (konvex)

1π radián $\leftrightarrow$ 180°



Ívmérték.

A $\pi \approx 3{,}14159$

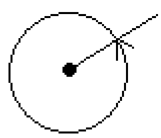
b) Konvex szög, konkáv szög

Konvex: $0° \le \alpha \le 180°$ $\leftrightarrow$ $0 \le x \le \pi$

Konkáv: $180° < \alpha < 360°$ $\leftrightarrow$ $\pi < x < 2\pi$

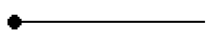
c) teljes szög

360° $\leftrightarrow$ 2π radián

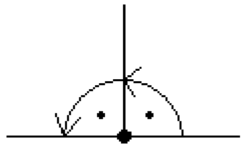


d) nullszög (konvex)

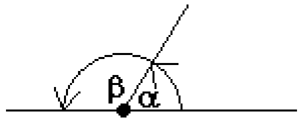
0° $\leftrightarrow$ 0 radián



e) derékszög (konvex)
Az egyenes-szög fele
90° ↔ π/2 radián (~ 1,570796)

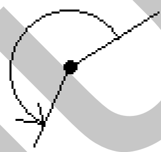


f) hegyesszög: nullszög és derékszög között (konvex)
0°<α<90° ↔ 0 < x < π/2



g) tompaszög (konvex)
90° < β < 180° ↔ π/2 < x < π

h) Konkáv szög
180° < γ < 360° ↔ π < y < 2π



II/5) Szögek rajzolása szögmérővel és szögmérő nélkül

Rajzolj fel egy-egy 20°-os, 40°-os, 75°-os 120°-os szöget először csak egyenes vonalzóval, írd bele, hogy „kb 20°” stb, majd alájuk szögmérővel pontosabban, és oda is írd be a nagyságokat.

Rajzolj akkora szöget, amely ívmértéke: π/3; $\frac{2}{5}\pi$ illetve $\frac{3}{4}\pi$

II/6) Számolások szögekkel

a) $\alpha+\beta=70°$ és $2\alpha-\beta=56°$. Mennyi α és β?

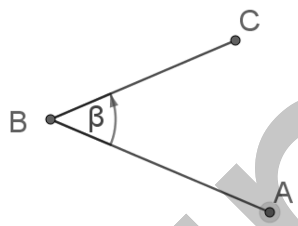
b) Egy háromszög szögeinek aránya 6:2:1. Mekkorák a szögek?

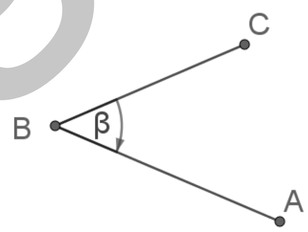
II/7) Az elfordulás

Az elfordulás lehet pozitív, negatív.

Az elfordulást irányított szöggel jellemezzük. Pozitív: ⊕ : Negatív: ⊖ :

Óramutató járásával ellenkező | Óramutató járásának megfelelő





II/8) Szög-radián átszámolás: egyenes arányosság

„Amennyire amennyiről változott: a hányados állandó”.

a) Ha a szög 3-szorosára nő, akkor a radián is, vagyis a hányadosok megegyeznek.

$\Pi \leftrightarrow 180°$
$\underline{3\,\Pi \leftrightarrow 540°}$

$\Pi \leftrightarrow 180°$
$\underline{\mathit{2/5\,\Pi \leftrightarrow 72°}}$

„Ha a szög 3-szorosára nő, akkor az ívmérték (a radián nagysága) is háromszorosára nő, vagyis a hányadosok megegyeznek.”

„Hányszorosára változik egy szög?”:

A hányadosuk mondja meg, hogy hányszorosukra változtak.

$\Pi \leftrightarrow 180°$
$\underline{\mathit{\Pi/8 \leftrightarrow 22{,}5°}}$

$\Pi \leftrightarrow 180°$ $\qquad\qquad$ $\Pi \leftrightarrow 180°$

$\underline{x \leftrightarrow 60°}$ $\qquad\qquad$ $\underline{3/4\ \Pi \leftrightarrow x°}$

b) Számoljuk ki

Hány radián 15 fok? $\qquad\qquad$ 1 radián hány fok?

380° fok hány radián? $\qquad\qquad$ $\frac{2\pi}{3}$ radián hány fok?

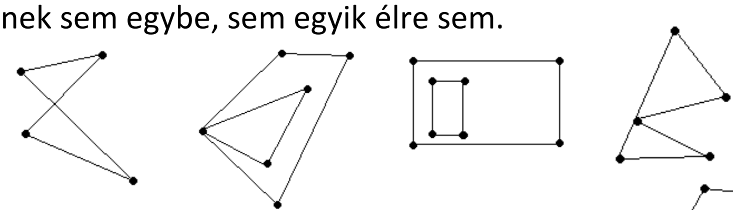
1,3π radián hány fok? $\qquad\qquad$ 72° hány radián?

II/9) Sokszög

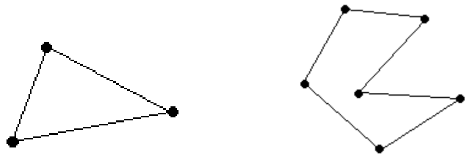
a) Definíció

Egyszerű sokszög: olyan önmagát nem metsző zárt töröttvonal, amelynek csúcsai nem esnek sem egybe, sem egyik élre sem.

Rosszak:



Jók:



Egyszerű sokszögben: *c*=*e* és $\forall$*c* -hez 2 *e* tartozik (c=csúcs e=él)
vagyis a csúcsok és élek száma egyenlő, és minden csúcshoz két él tartozik.

b) Sokszöglap ↔ sokszög

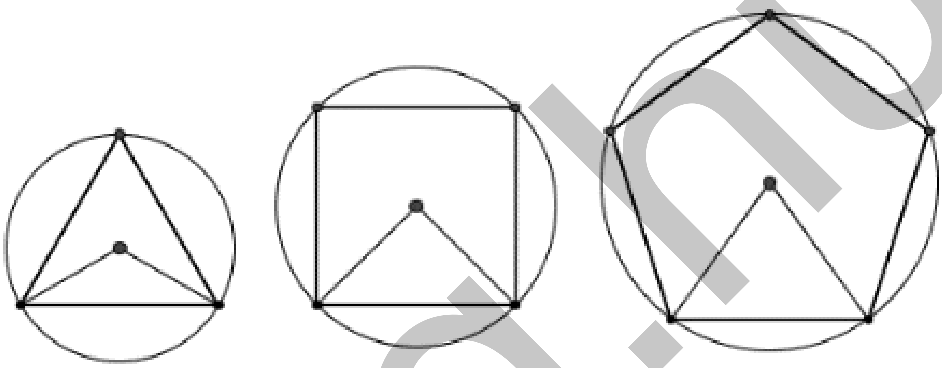
A sokszög alatt a csúcsokat és az éleket értjük.

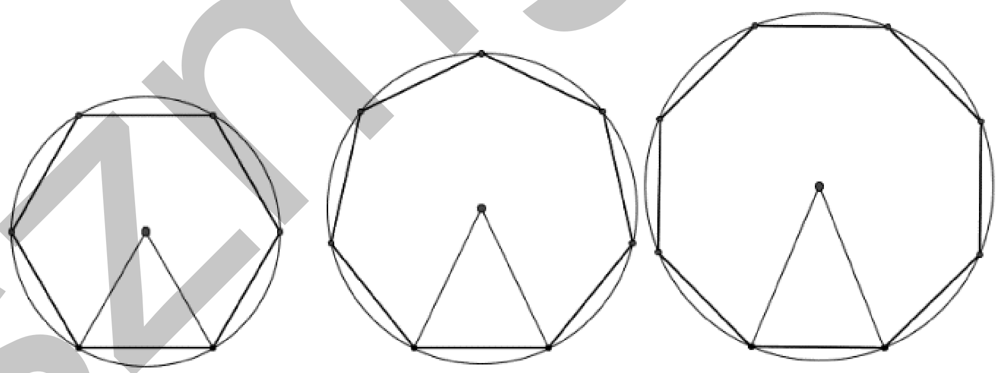
Ha hozzá tartoznak a belső pontjai is, akkor azt sokszöglapnak hívjuk, vagyis olyan, mintha egy papírból kivágnánk.

c) Szabályos sokszög: szögei, oldalai egyenlők. Úgy kell elképzelni, hogy a kör középponti teljes szögét n egyenlő részre bontjuk…

Írjuk be a szabályos sokszög egyik szögébe annak nagyságát, és a középponti szöget is! (Arra a középponti szögre lesz a középpont körül forgásszimmetrikus!)

A középponti szöget osztással, a szabályos sokszög szögét pedig a középpontba „mutató” egyenlőszárú háromszögek szögével számoljuk…

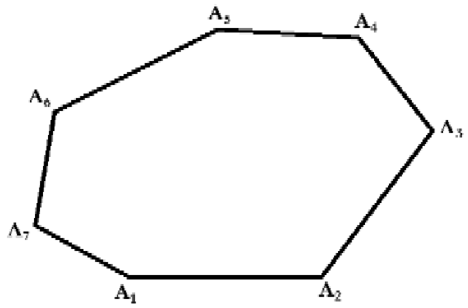


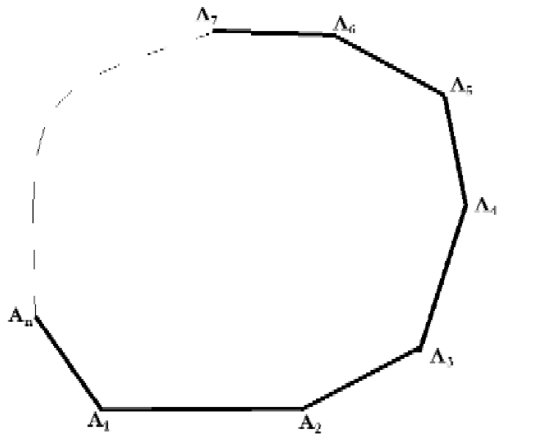


Érdekesség: nagyon szépen lehet közelíteni a kört ilyen sokszögekkel.

Feladat: egy szabályos sokszög középponti szöge 15°.
Hány fokra „forgásszimmetrikus” és mekkora a szabályos sokszög szöge?

d) *n* csúcsú konvex sokszög:





Élei v. csúcsai: **7** — n

kerülete: $a_1+a_2+\ldots+a_7$ ✓ — $a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$

átlói:
1 csúcsból húzható átlók száma:

$7-3=\mathbf{4}$ — $n-3$

összes átló száma:

$\frac{7\cdot 4}{2}=14$ — $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

Hány db. háromszögre bont az egy csúcsból induló összes átló:

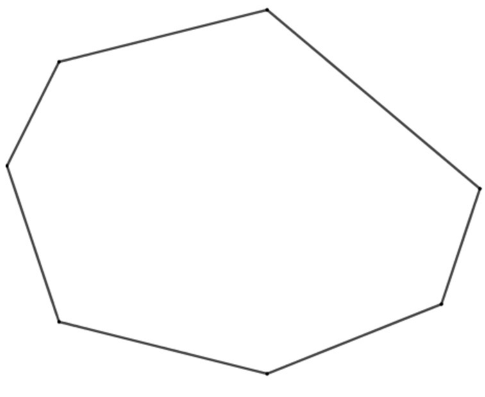
$7-3+1=5$ — $n-3+1=$ **<u>n–2</u>**

Szögei:
A hétszögnél: 5×180°=900°

Az n csúcsnál:
Egy csúcsból húzott összes átló n–2 db. háromszögre bontja a sokszöget: és ezek szögeiből állnak össze a sokszög szögei, vagyis:

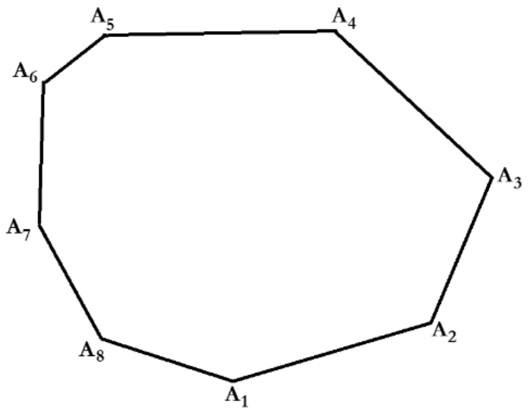
A belső szögek összege: (n–2)180°.

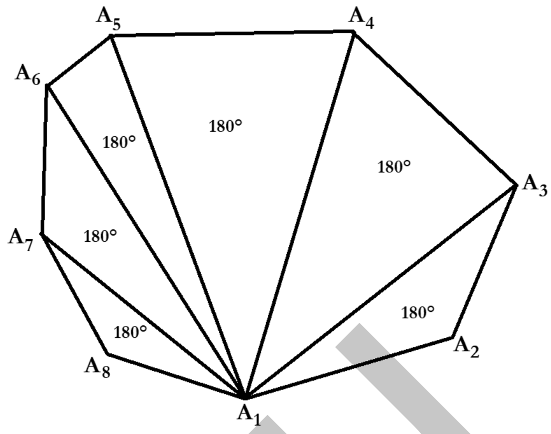
<u>Konvex sokszög külső szögek összege: n·180°–(n-2)180°=360°.</u>
Hogy is jön ez ki?



II/10) Gyakorlás: átlók száma, belső szögek összege

a) Nyolc csúcsú konvex sokszögnél tegyük meg ez előző számolásokat!





A konvex nyolcszög átlóinak a száma:

Ahhoz, hogy össze tudjuk számolni, hogy hány átlója van egy konvex nyolcszögnek, először meg kell kérdeznünk magunktól, hogy:

„Hány átló húzható egy csúcsból"

Tehát egy csúcsból ________ átló húzható.

8 csúcs van, ezért összesen: átló van,

mert minden átlót

A konvex nyolcszög belső szögeinek összege:

Egy csúcsból húzott átlók száma: ________________

Ez összesen ____________ db. háromszögre bontja a nyolcszöget, melyek minden szöge hozzájárul a nyolcszög belső szögösszegéhez:

______ · 180°=

b) Egy konvex sokszög egy csúcsból húzható átlóinak a száma 9. Hány oldalú a sokszög? „A visszakeresés legtöbbször egyenletfelállítás".

c) Hány oldalú a konvex sokszög, ha a belső szögeinek összege 1980°?

Mo.:
A belső szögek összegét úgy kapom meg, hogy egy csúcsból az onnan húzható átlóval földarabolom a sokszöget háromszögekre, és az összes háromszög összes belső szöge adja a konvex sokszög belső szögeinek összegét.

Hány csúcs van? Nem tudjuk, tehát tudjuk: **n**

d) Egy konvex sokszögnek 27 átlója van. Hány oldalú a sokszög?

e) Adott két konvex sokszög. Az egyiknek 5-tel több csúcsa és 130-cal több átlója van, mint a másiknak. Hány csúcsuk van?

f) Egy sokszög átlóinak száma 84-gyel kevesebb, mint egy kétszer annyi csúcsúnak. Hány csúcsa van?

g) Hány átlója van annak a konvex sokszögnek, amely belső szögösszege 2340°?

h) Egy sokszögnek 77 átlója van. Hány csúcsa van?

i) Hány oldalú az a sokszög, melynek 10-szer annyi átlója van, mint amennyi oldala?

j) Egy konvex sokszögnek 135-tel kevesebb átlója van, mint egy kétszer annyi csúcsúnak. Hány csúcsuk (oldaluk) van?

k) Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1620°. Hány oldala van?

l) Egy sokszögnek 65 átlója van. Hány csúcsa van?

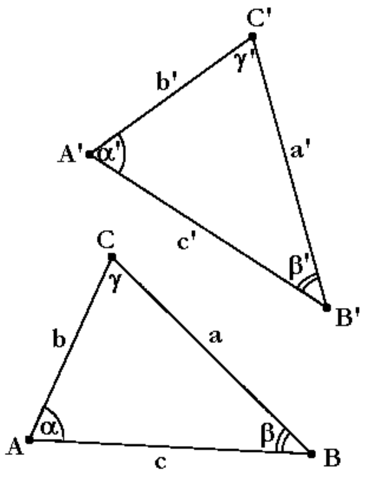
m) Egy sokszögnek 23-mal több átlója van, mint a nála 2-vel kevesebb csúcsúnak. Hány csúcsa van?

n) Egy sokszög csúcsainak számát ha eggyel növelem, akkor az ötödével és még kettővel több átlója lesz. Hány csúcsa volt kezdetben?

II/11) Az egybevágóság közérthetőn megfogalmazva – és esetei a háromszögeknél

„Két síkidom egybevágó, ha „elméleti ollóval kivágva őket" egymással fedésbe hozhatók."

a) **Háromszögek egybevágóságának a négy alapesete**; **vagyis egy háromszög egyértelmű szerkeszthetőségének négy alapesete.**
geometria_A_2_8_haromszogek_egybevagosaga.ggb



… két háromszög egybevágó: $ABC_{\Delta} \cong A'B'C'_{\Delta}$
(alájuk, ha lehet, más adatokkal írd oda az egybevágósági esetet)

$\Leftrightarrow$ ha oldalaik hossza páronként egyenlők

$\Leftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

$\Leftrightarrow$ két-két oldaluk hossza páronként és a közrezárt szögük is megegyezik

$\Leftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$, $\gamma=\gamma'$ (v. $b=b'$, $c=c'$, $\alpha=\alpha'$)

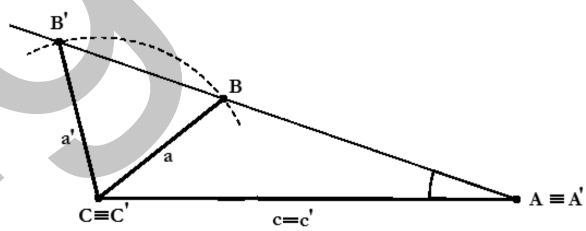
$\Leftrightarrow$ egy-egy oldaluk hossza és a rajta fekvő két szögük páronként megegyezik

$\Leftrightarrow$ $a=a'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$

$\Leftrightarrow$ két-két oldaluk hossza páronként, és a nem kisebbel szemközti szögük megegyezik.

$\Leftrightarrow$ $a \le b$, $a=a'$, $b=b'$ és $\beta=\beta'$. (v.: $b \ge c$ $b=b'$, $c=c'$ és $\beta=\beta'$)

Ha a kisebbikkel szemközti szöget adják meg, akkor a két háromszög nem biztos, hogy egybevágó.



Mi is az egyértelmű szerkeszthetőség?
… az ABC_{Δ} egyértelműn szerkeszthető, ha meg van adva:

- 3 oldal, vagy
- 2 oldal és a közrezárt szög, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő két szög, vagy
- 2 oldal és a nem kisebbikkel szemben fekvő szög.

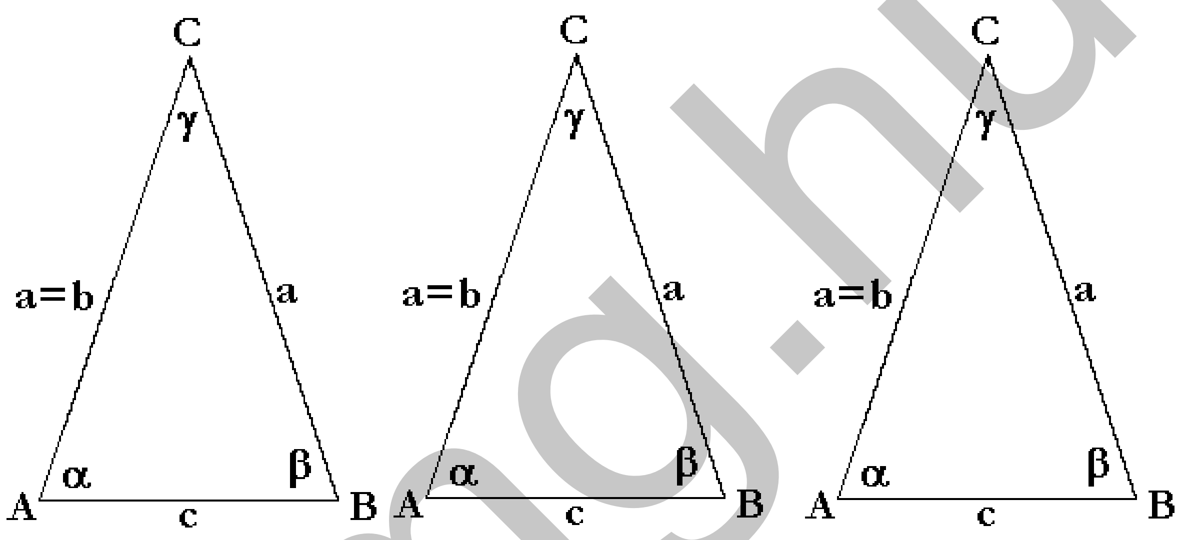
Ez azt jelenti – gyakorlatilag ugyanaz, mint az egybevágóság – hogy ha valaki megadja egy háromszög három oldalát: a=5 cm; b=6 cm; c=7 cm, akkor a világon bárhol, bármikor szerkeszt valaki egy ilyet, egy másik ember szintén ezekkel az adatokkal szerkeszt egy ilyen háromszöget, akkor az a két háromszög teljesen „egyforma” lesz, vagyis **egybevágók** lesznek; „egyértelmű” a szerkesztés.
Vagyis az megadott oldalakkal, szögekkel nem tudnak nem egybevágót szerkeszteni.

b) FEJBŐL TUDANDÓ PÉLDA az egybevágósághoz:
Mutasd meg, hogy az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő két szöge egyenlő.

geometria_A_2_8_b_az_egyenloszaru_haromszog.ggb

Tétel: Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei megegyeznek; illetve az alaphoz tartozó magasság, oldalfelező merőleges, súlyvonal és a vele szemközti szög szögfelezője azonos, mind ugyanaz a szakasz.

Biz.:

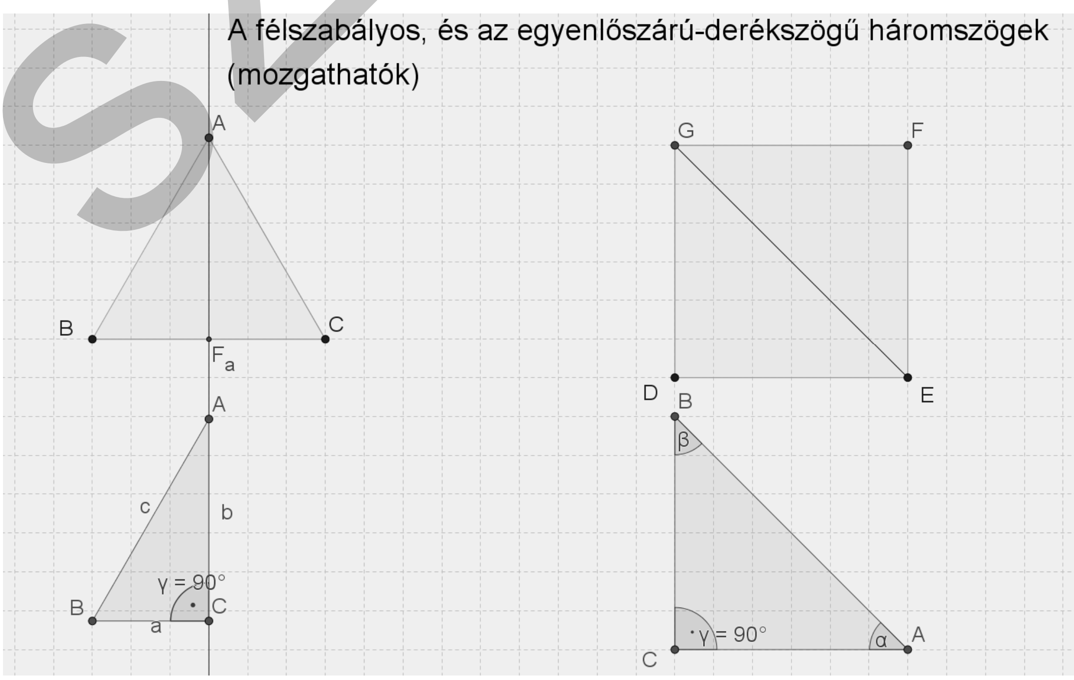


II/12) Nevezetes háromszögek, szögek

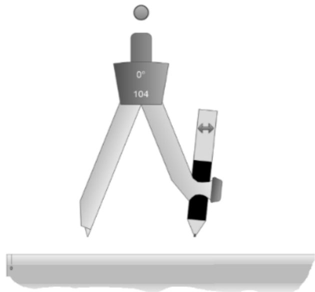
a) 60°; 30°: Egyenlő oldalú háromszög, és a magasságai → félszabályos Δ.
Szerkesszünk egyenlő-oldalú Δ-et!

„Felezzük el” az egyik csúcsából:
Még nem nagyon tudunk szerkeszteni, de vonalzóval megfelezzük az egyik oldalt, és a szemközti csúcsból odahúzunk egy szakaszt…
Mérjük le a szögeket: „félszabályos Δ.”
A félszabályos háromszög rövidebbik befogója fele az átfogónak.
Szögei: 30°; 60° és 90°.

b) 45°: „félnégyzet”: a derékszögű-egyenlő szárú Δ.
Rajzolj ide egy 5 cm oldalú négyzetet!
Húzd meg az egyik átlóját. Írd be az adatait!

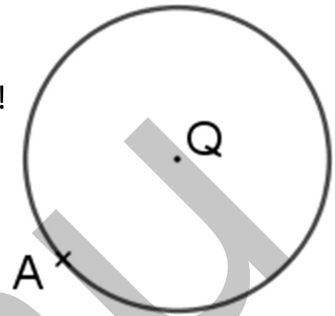


III. Alapszerkesztések: csak körzővel, és beosztás nélküli egyélű vonalzóval



Alapvető egybevágósági tételeket használ föl!
Érdekesség: Mohr – Mascheroni-féle szerkesztés.
Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés csak körzővel is előállítható – vagyis minden keresett pont megszerkeszthető vele – nyilván szakaszok, egyenesek nem.

Adott egy kör középponttal.
Szerkeszd meg bele az A csúcsú szabályos hatszöget csak körzővel!



Otthon színezd ki!

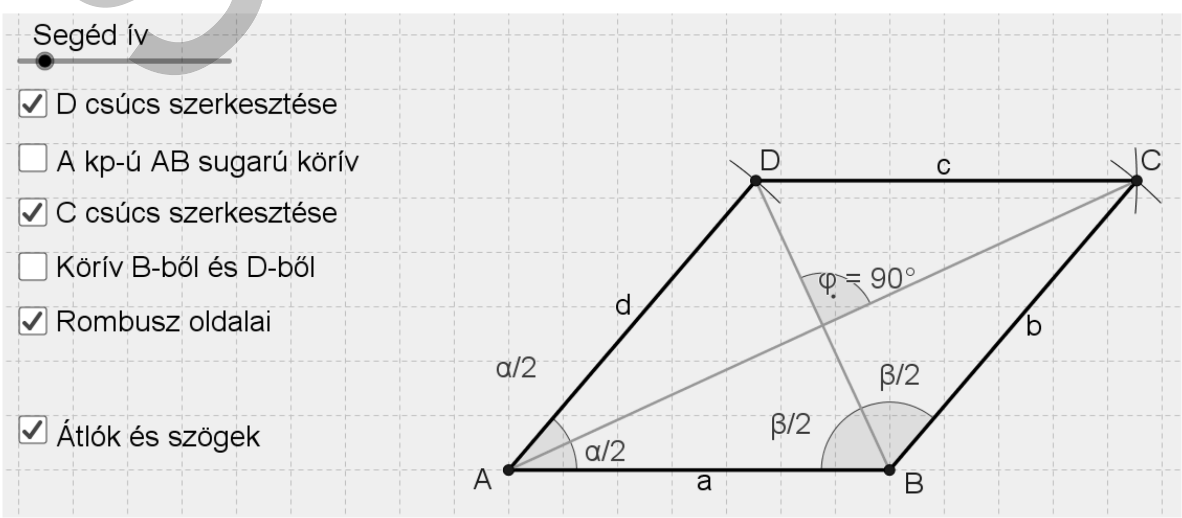
III/1) A rombusz

Definíciója: **Egy négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha oldalai egyenlők.**
$\Rightarrow$ szemközti oldalai párhuzamosak. (DE: $\not\Leftarrow$, vagyis visszafelé nem következik: az a négyszög, mely szemközti oldalai párhuzamosak, még nem biztos, hogy rombusz!)

Szerkesszünk két 5 cm oldalélű rombuszt!

Tulajdonságai, melyek szintén „rombusszá” teszik, vagyis ekvivalens definíciói:
Egy négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha:
– átlói egyben szögfelezők is;
– két átlója merőlegesen felezi egymást.

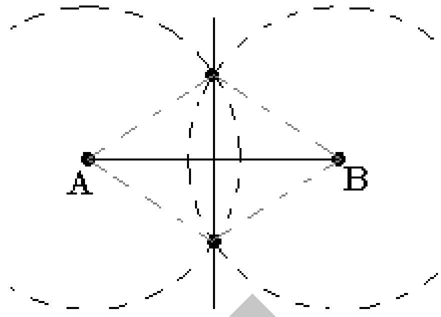
geometria_A_3_1_rombusz.ggb



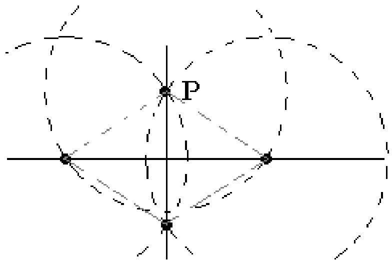
III/2) Alapszerkesztések: mindig rombuszt szerkesztünk

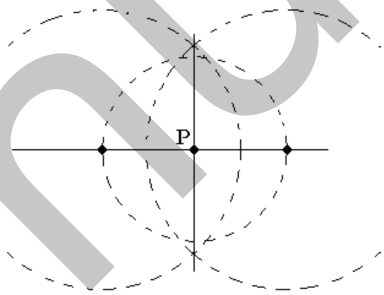
(Az ábra szerint szerkesszünk!)

a) Szakaszfelező; szakaszfelező merőleges.

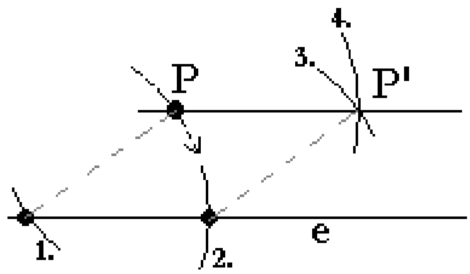


Merőleges egyenesre: külső pontból, illeszkedő pontból



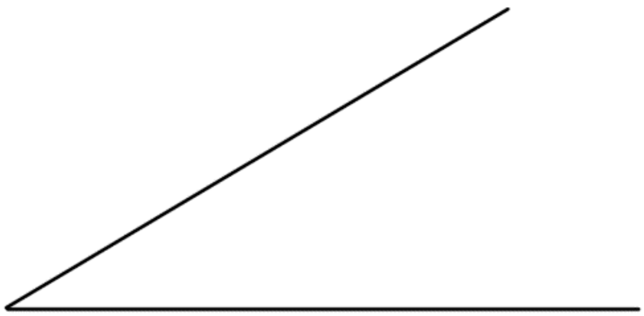


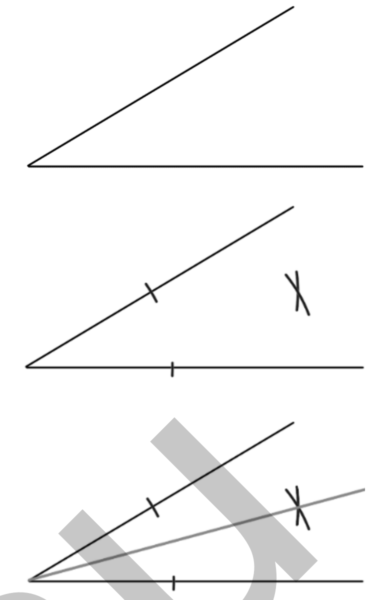
Egy e egyenessel egy rajta kívül eső P ponton keresztül párhuzamos szerkesztése

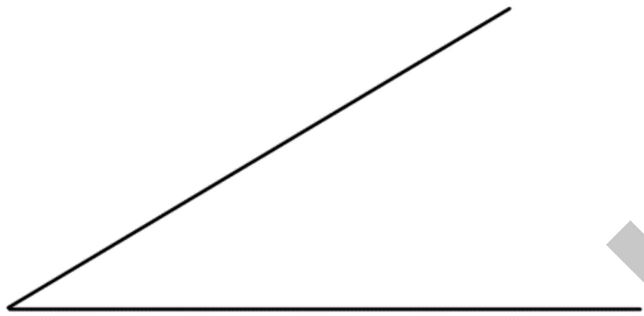


Vagy: *P*-n keresztül *e*-vel párhuzamos egyenest lehet két merőleges szerkesztésével: *P*-ből merőleges *e*-re (*f*), majd *P*-ben merőleges *f*-re.

Szögfelezés: rombusz átlójának szerkesztése…







Ebben a másodikban mérd le a szögfelező néhány pontjának távolságát a száraktól, és írd is rá!

Észrevétel:

III/3) Egyéb műveletek szögekkel

a) szögmásolás: egybevágó egyenlőszárú háromszögek szerkesztése…

b) szögösszeadás, kivonás
Gyakorlatilag az A’ szög szárára felmásoljuk a A szöget…

III/4) Gyakorlás

a) Szerkessz: 60°-ot, 30°-ot, 15°-ot!

b) Szerkessz egy 7; 6; 7,5 oldalú Δ-et!, majd a beírható körét.
Figyelem: egyenest érintő kör!!!

IV. Ponthalmazok a síkban
Satírozás, szaggatott vonal, erősen rajzolt vonal, üres karika, „bumszli".
Példatárakban a vékony vonal nálunk a szaggatott!
IV/1) Ponthalmazok tulajdonságai: **a szerkesztés elve**

a) Távolság 1 ponttól:

(i) ______________________________

Adott Q; r Ekkor: $K=\{P\in S|\mathrm{d}(P;Q)=r\}$

Konkrét adattal: $K=\{P\in S|\mathrm{d}(P;Q)=2\text{ cm}\}$

Rövid jele ennek a _____________ K(Q;r)

_________ fontos adatai:

r=_________, d= ___________,

h=_________,

K= T=

Mekkora egy 5 cm sugarú kör kerülete és területe?

Mondj olyan nem számokat, melyekre igaz, hogy nem nagyobbak 4,6-nál. Írjuk fel jelekkel:

H={

Mondj olyan nem természetes számokat, melyekre igaz, hogy kisebbek –5-nél

A={

Mondj olyan számokat, melyek 5-nél nagyobbak ÉS 7-nél nem nagyobbak.

B={

Mondj olyan számokat, melyek 0-nál kisebbek vagy 2,8-nál nagyobbak.

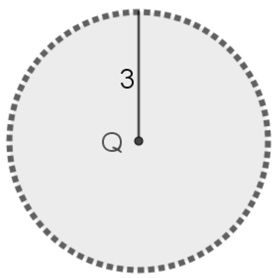
C={

(ii) körlap (zárt, nyílt)

Adott Q; r

Zárt körlap: $K=\{P\in S|\mathrm{d}(P;Q)\leq r\}$ Nyílt körlap: $K=\{P\in S|\mathrm{d}(P;Q)<r\}$

Írd ide jelekkel a jobbra látható alakzat definícióját!

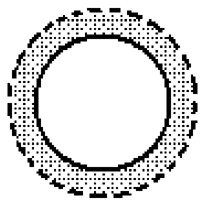


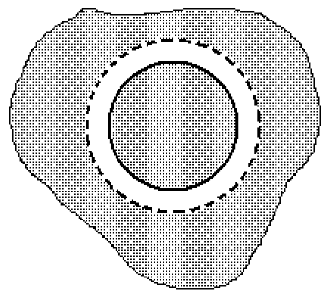
Rajzold föl:

$KS=\{P\in S|1\text{ cm}<\mathrm{d}(Q;P)\leq 2{,}5\text{ cm}\}$

$H=\{P\in S|2{,}5\text{ cm}\leq \mathrm{d}(Q;P)\vee \mathrm{d}(Q;P)<1\text{ cm}\}$

Fogalmazd meg:
(Vegyük észre: a második: Sík\H. (H: Ld. fentebb)





H={ A={

b) Távolság 2 v. több ponttól:

(i) $d(Q_1;Q_2)= 3$ cm

$A=\{P\in S | d(Q_1;P) \leq 2 \wedge d(P;Q_2)>2,5\}$

Szaggatott v. vastag vonal, metszéspontok: „Bumszli” v. üres karika.

$d(Q_1;Q_2)= 4$ cm

$B=\{P\in S | d(P;Q_1) = 2 \vee d(P;Q_2)< 3\}$

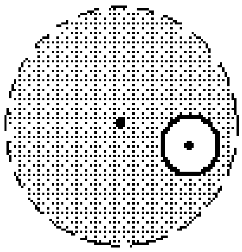
Szaggatott v. vastag vonal, metszéspontok: „Bumszli” v. üres karika.

$d(Q_1;Q_2)= 4$ cm; $r_1=3$; $r_2=2$

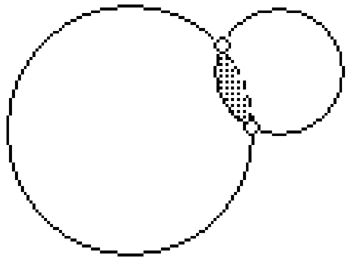
$T=\{P\in S | d(P;Q_1) < 3 \wedge d(P;Q_2)\geq 2\}$

Fogalmazd meg:

$d(Q_1;Q_2)$= 5 cm; r_1=8; r_2=2



$d(Q_1;Q_2)$= 6; r_1=4; r_2=3



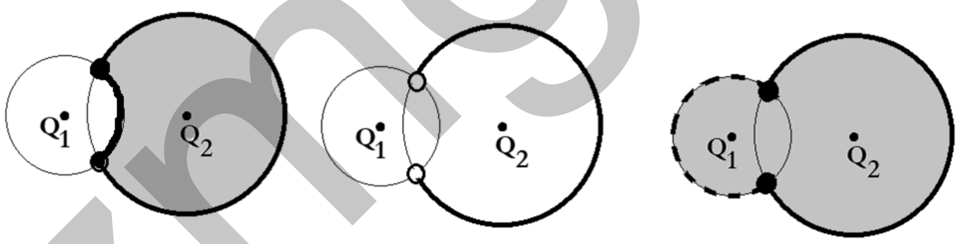
$d(A;B)$= 1 cm; r_1=1; r_2=3

$H_1=\{P\in S\,|\,d(P;A)>r_1 \wedge d(P;B)\leq r_2\}$

Rajzold föl!

Szaggatott v. vastag vonal, metszéspontok: „Bumszli” v. üres karika.

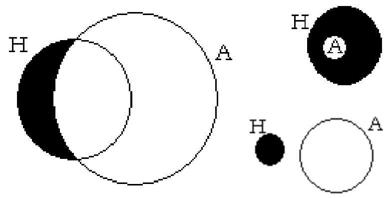
Add meg az alábbi halmazokat:



c) Két halmaz különbsége:

$H\backslash A:=\{x\in H\,|\,x\notin A\}$

Figyelem: többet is el lehet venni, mint az eleme, és olyat is „el lehet H-ból venni”, amely nem is eleme….



Def.: Komplementer halmaz: Amennyiben: $A\subseteq H$, akkor: $\overline{A}_H$ **:= H\A**

Mi az osztályban a szőkék komplementere?

Mi az egyjegyű természeteseknél a háromnál nem nagyobbak komplementere?

H={0;1;2;3 … 9; 10; 11;12;13;14;15;16;17;18;19;20}   P= prímek. Kell: $\overline{P_H}$

d) Egyenestől vett távolság

Def.: d(P;e): Ha $P \in e \Rightarrow 0$, egyébként a pontból az egyenesre állított merőleges talppontja és a pont távolsága.

Def.: Párhuzamos egyenesek távolsága: az egyik egy pontjának távolsága a másiktól.

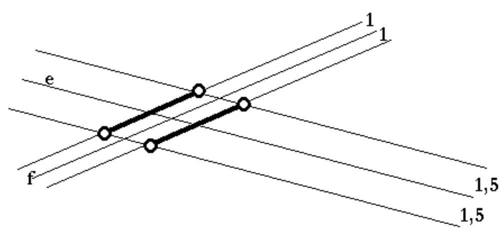
Mit feltételez ez a definíció?   Azt, hogy ez állandó, bárhol mérjük is le…
Tétel: Két párhuzamos egyenes bármely pontjának a másik egyenestől vett távolsága állandó.
Szerkessz az e egyenestől 1 cm-re párhuzamost!

$A=\{P \in S \mid d(P;e)=1\}$

$B=\{P \in S \mid d(P;e) \le 1{,}5\}$

e messe *f*-et. Ekkor: $B=\{P \in S \mid d(P;e) \le 1 \wedge d(P;f) > 1{,}5\}$

Fogalmazd meg:



e metszi *f*-et:
Rajzold fel: $J=\{P \in S \mid d(P;f) \le 1 \vee d(P;e) > 1{,}5\}$

e metszi *f*-et:
L={P∈S|d(P;e)≤ 2 ∧ d(P;f)>1}

N={P∈S|d(P;e)>2 ∧ d(P;f)= 1}

M={P∈S|d(P;e)>2 ∨ d(P;e)= 1}

Mit jelent: „Legalább az egyiktől 1 cm távolságra van?” Írd fel jelekkel, rajzolj is!

e) Szakasztól, félegyenestől való távolság

f) Szögfelező és szakaszfelező merőleges: későbbi tételekkel bizonyítjuk

(i) Szögfelező:
Egy konvex szög szögfelezőjének minden pontja egyenlő távol van a szög száraitól, és (a szögtartományban) csak ezek a pontok ilyen tulajdonságúak.

Adott egy α konvex szögtartomány, szárai *c* és *b* félegyenesek. Ekkor $f^{\alpha}=\{P\in \alpha \text{ szögtart.} | d(P;c)=d(P;b)\}$

(ii) Szakaszfelező merőleges:

Egy szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távol van a szög száraitól, és csak ezek a pontok ilyen tulajdonságúak.

Adott egy két pont: $A \not\equiv B. \Rightarrow$ AB szakasz.

$f^{\perp}_{AB}=\{P\in S | d(P;A)=d(P;B)\}$

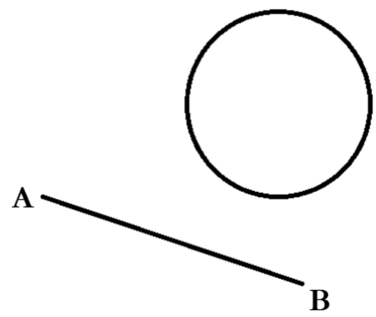
Még nem bizonyítjuk!

Rajzolj fel ilyet.

g) Gyakorlófeladatok

Adott egy 5 cm hosszú AB szakasz, és fölötte egy 2 cm sugarú kör. (Kb. az ábra szerint). Szerkeszd meg a körnek azon pontjait, melyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak!

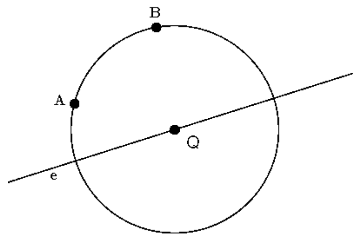
Mintha már kész lenne ábra, vakábra, elv, szerk, diszk.



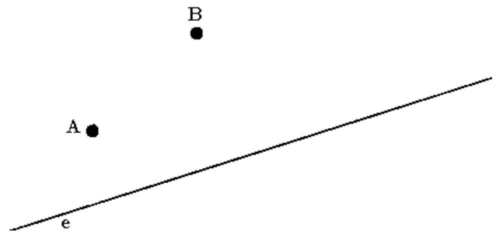
Adott $A \neq B$, és rajtuk kívül e. Szerkessz egy olyan kört, amely átmegy az A-n és a B-n, és a középpontja rajta van az e egyenesen.

Mo.:

„Mintha már kész lenne”



„vakábra”:



IV/2) Helyzetek: a **diszkusszió** elve

a) Pont és egyenes: illeszkedik, v. nem illeszkedik egyik a másikra.

$P \in e$, $P \notin e$.

b) Egyenesek helyzetei

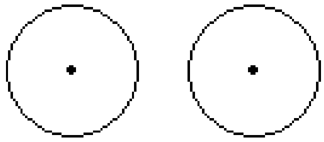
$\lvert e_1 \cap e_2 \rvert = 0$	$\lvert e_1 \cap e_2 \rvert = \infty$	$\lvert e_1 \cap e_2 \rvert = 1$	$\lvert e_1 \cap e_2 \rvert = 0$
Párhuzamosak	azonosak	metszők	kitérők
	1 síkban vannak		Nem egy síkban vannak:

Szerkesztés esetén: „Ha egy pont két meghatározó vonala 1-1 egyenes, akkor a diszkusszió az egyenesek helyzetei (a két egyenes helyzete) szerint megy.”

c) Körök helyzetei

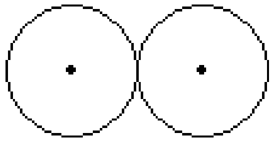
$r_1=r_2$

d(Q_1;Q_2) $\Rightarrow |K_1 \cap K_2| =$



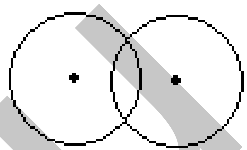
d(Q_1;Q_2) $\Rightarrow$

Kívülről érintik egymás



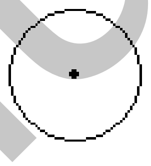
d(Q_1;Q_2) $\Rightarrow$

Metszik egymást



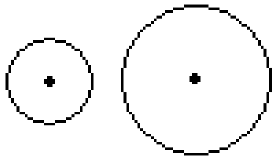
d(Q_1;Q_2) $\Rightarrow$

Azonosak



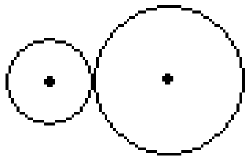
$r_1 \neq r_2$ Legyen $r_1 < r_2$.

d(Q_1;Q_2)



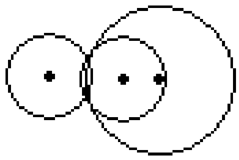
d(Q_1;Q_2)

Kívülről érintik egymás



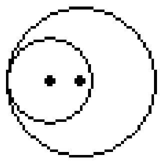
d(Q_1;Q_2)

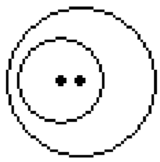
Metszik egymást



d(Q_1;Q_2)

Belülről érintik „egymást”





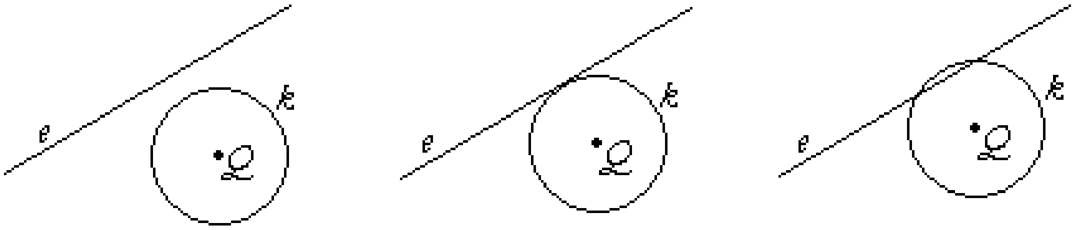
d(Q_1;Q_2)

Az egyik tartalmazza a másikat.

Tartsuk észben, hogy ha két kör érinti egymást, akkor a két középpont és az érintési pont egy egyenesbe esik, vagyis az érintési pont rajta van a centrálison.

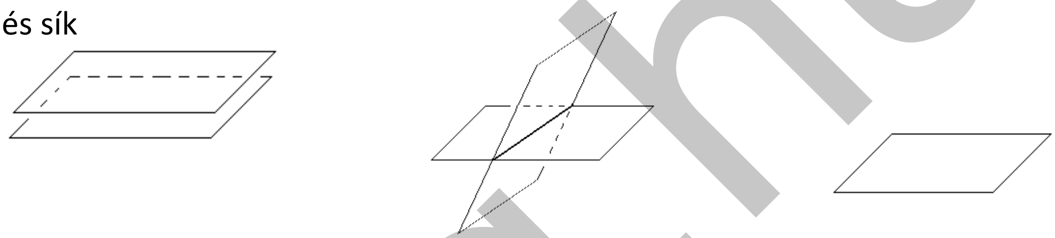
Szerkesztés esetén: „Ha egy pont két meghatározó vonala 1-1 kör, akkor a diszkusszió a körök helyzetei szerint megy.” Itt akár 9 diszkusszió is előfordulhat!

d) kör és egyenes



Tartsuk észben, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre!

e) sík és sík

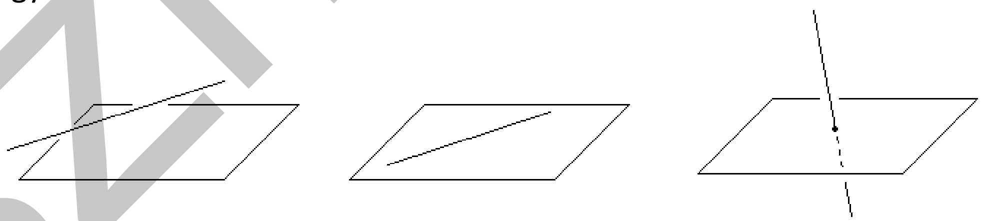


$|S_1 \cap S_2|=0$
párhuzamos ($S_1 \parallel S_2$)

$S_1 \cap S_2 = e$
metsző

$S_1 \equiv S_2$

f) sík és egyenes



$|S \cap e|=0 \Rightarrow e \parallel S$

$|S \cap e|=\infty \Rightarrow e \subset S$

$|S \cap e|=1 \Rightarrow$
e döfi S síkot

Geometria B: Transzformációk

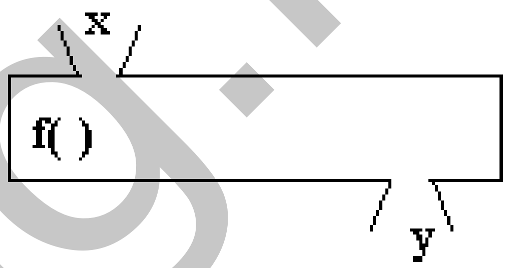
I. A transzformáció mint geometriai függvény

I/1) A függvények

a) **Definíció: Legyen adott egy A alaphalmaz és egy K képhalmaz. Ekkor azt az *f*( ) hozzárendelést, amely az A alaphalmaz** (~~minden egyes eleméhez~~) **nem szükségszerűn minden eleméhez egyértelműn hozzárendeli a K halmaz egy-egy elemét, függvénynek nevezzük.**

Függvény értelmezési tartománya az alaphalmaz azon legbővebb részhalmaza, melyhez a függvény képhalmazbeli elemet (értéket) rendel.
Az elemek képét függvényértéknek, a függvényértékek halmazát pedig a fv. értékkészletének nevezzük.
Egy f( ) fv. értelmezési tartományának jele: D_f, értékkészletének jele: R_f.

Nézzük például a Tesco-t.
áru és ár.: ár( ): T $\rightarrow$ **R**; fizetendő = ár(termék)
Alaphalmaz a Tesco-ban található dolgok, képhalmaz a valós számok halmaza.



Az értelmezési tartományba azonban nem tartozik bele a Tesco-ban található eladólány, sem az árukat pakoló targonca.

Az értékkészletben pedig biztos nincsenek benne a negatív számok… (kár).

b) Értelmezési tartomány és Értékkészlet

Függvény értelmezési tartományának nevezzük az alaphalmaz olyan legbővebb részhalmazát, amelynek minden egyes eleméhez a függvény hozzárendeli a képhalmaz valamely elemét. Jele: D

Egy függvény értékkészletének nevezzük azt a halmazt, amely a függvény összes helyettesítési értékét tartalmazza, más elemeket pedig nem. Jele: R.

I/2) Valós-valós függvények, egyéb függvények

a) f( ): **R**$\rightarrow$**R**; $x \mapsto 2x-3$

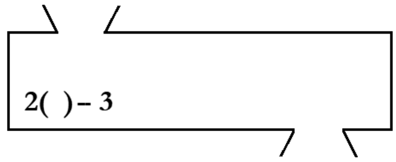
D_f= **R**

R_f=**R**

x	1		3			-2
f(x)		1		8	0,5	

f(1)= f(3)=

f(–2)=



Őskép: HOGYAN KAPOM MEG A FÜGGVÉNYÉRTÉKBŐL AZ „ŐSKÉPÉT”, AZT A FÜGGETLEN VÁLTOZÓT, AMIHEZ A FÜGGVÉNY EZT AZ ÉRTÉKET RENDELTE.

Mi az 1 őspépe, vagyis mit kell „bedobni” a gépbe, hogy 1 essék ki?

$f^{-1}(1)$: $2x-3=1$ x= vagyis $f^{-1}(1)$=

Az ősképkeresés: egyenletmegoldás!

Mi a 0 ősképe, vagyis mit kell „bedobni” a gépbe, hogy 1 essék ki?

$f^{-1}(0)$=

Mi az 1 ősképe, vagyis mit kell „bedobni” a gépbe, hogy 1 essék ki?

$f^{-1}(1)$ =

$f^{-1}(8)$ =

$f^{-1}(0{,}5)$ =

A „visszafelé”, az „inverz” függvénye:

$2x-3=y$

Fejezzük ki a függvényértékből a független változót! x=

fixpontja: „Amit bedobok, az esik ki”:

A fixpontkeresés – egyenletmegoldás!

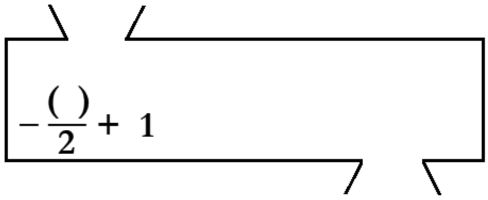
b) f( ): **R**$\rightarrow$ **R**; y=$-\frac{x}{2}+1$

x	1		3			-2
f(x)		1		8	0,5	

f(1)=

f(3)=

f(–2)=



Őskép: HOGYAN KAPOM MEG A FÜGGVÉNYÉRTÉKBŐL AZ „ŐSKÉPÉT”, AZT A FÜGGETLEN VÁLTOZÓT, AMIHEZ A FÜGGVÉNY EZT AZ ÉRTÉKET RENDELTE.

Az ősképkeresés: egyenletmegoldás!

Mi a 0 ősképe, vagyis mit kell „bedobni” a gépbe, hogy 0 essék ki?

$f^{-1}(0)$=

Mi az 1 ősképe, vagyis mit kell „bedobni” a gépbe, hogy 1 essék ki?

$f^{-1}(1)$=

$f^{-1}(8)$=

$f^{-1}(0,5)$=

A „visszafelé”, az „inverz” függvénye:

Fejezzük ki a függvényértékből a független változót! x=

fixpontja: „Amit bedobok, az esik ki”:

A fixpontkeresés – egyenletmegoldás!

c) $h(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $h(x)=x^2$.
$D_h=\mathbf{R}$;
$R_h=\mathbf{R}^+_0$.

x	1			1,5		
h(x)		0	4		9	1,44

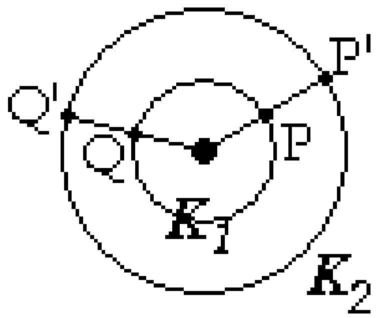
f(1)=

f(1,5)=

Injektív-e (Kölcsönösen egyértelmű-e?) Vagyis egyértelműn megtalálható egy képhez az őképe?

Fixpontja?

d) $v(\ ): S\to S$; $P\to P'$
$D_v=K_1$
$R_v=K_2$



Melyiknek van több pontja? K_1 vagy K_2-nek?

I/3) Az injektív függvények (kölcsönösen egyértelmű függvények) „visszafelé is függvények”

Def.: …egy *f* függvény injektív (kölcsönösen egyértelmű),
ha ($x_1; x_2 \in D_f$ és $f(x_1)=f(x_2)$) $\Rightarrow x_1=x_2$.
Vagyis bármely értékkészletbeli elemnek egyértelműn létezik ősképe.
Például nem injektív az $y=x^2$ hozzárendelésű fv. Ugyanis:

Az injektív függvény ugyanazon értéket nem rendelhet két különböző értelmezési tartománybeli elemhez. Vagyis: ha a boltból kijön két gyerek, mondták, hogy 110 Ft-ot fizettek, akkor tudhatod, hogy ugyanaz a dolog van a zsebükben – mert a boltban minden terméknek más ára van.
A „Százforintos bolt” termék-ár fv-e miért nem injektív?

I/4) Geometriai transzformáció

Geometriai transzformációnak nevezzük az olyan függvényt, amely értelmezési tartománya is és értékkészlete is ponthalmaz.
Típusai: pl.: egybevágósági; hasonlósági, stb.

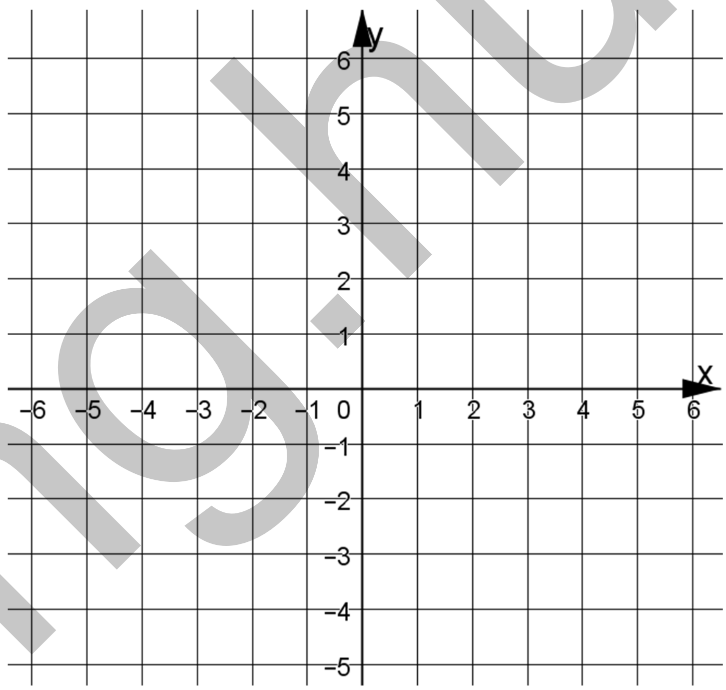
Def.: Egybevágósági transzformáció az a geometriai transzformáció, amelyeknél bármely szakasz képe az eredetivel egyenlő hosszúságú szakasz.

II. A geometriai szerkesztések menete

III. **A tengelyes tükrözés** (egybevágósági transzformáció)

A derékszögű koordináta rendszer
tengelyei: a vízszintes az „abszcissza” – neve x a függőleges az „ordináta” – neve y
I. II. III. IV. síknegyed
Pontjai: Q(0;0)≡középpont,

Rajzold be és írd be a koordinátájukkal:



A(–2,3)

B(–1;2/3)

C(1;5)

D(5;1);

E(0;2)

F(–5;0)

G(1; bármi)

H(bármi; –2)

III/1) Definíció + tulajdonságok

a) Definíció

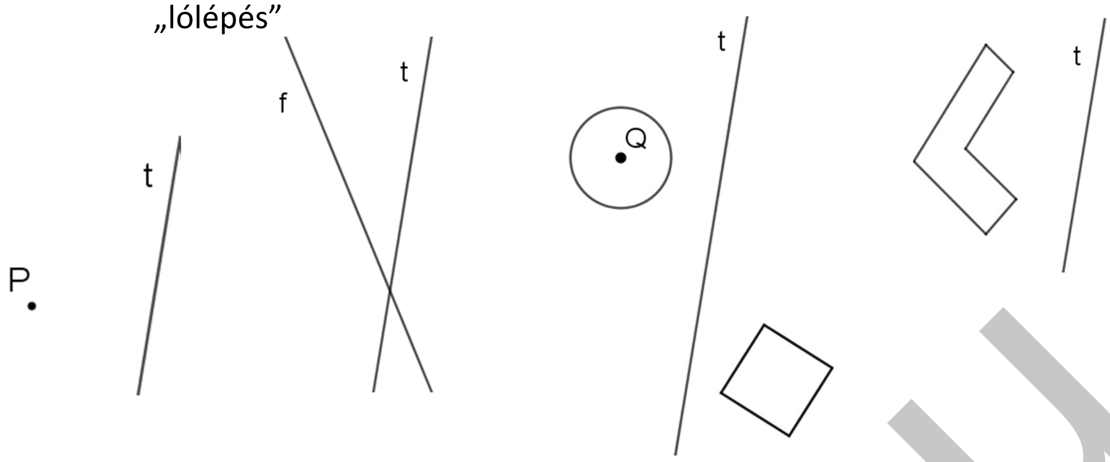
Rajzolj egy tengelyt és egy nem ráeső P pontot.
Tükrözzük P-t a tengelyre

Def.: tengelyes tükrözés. Adott *t* tengely. ekkor:
$t(\ )$: $S \rightarrow S$; $t(P)=P'$, ahol:
ha $P \in t \Rightarrow P' \equiv P$
ha $P \notin t \Rightarrow t$ merőlegesen felezi PP’-őt.

b) Példák rá

tanm_geometria_B_3_1_b_i_tengelyes_tukrozes_kezileg.ggb

(i) Először csak „kézzel”, szerkesztés nélkül: pont, egyenes, kör, négyzet, „lólépés”

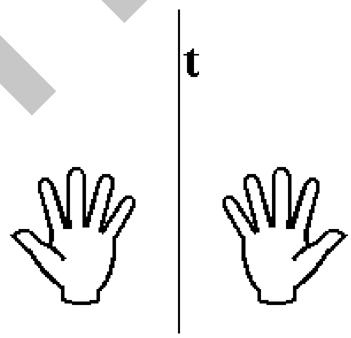


(ii) Észrevételek:

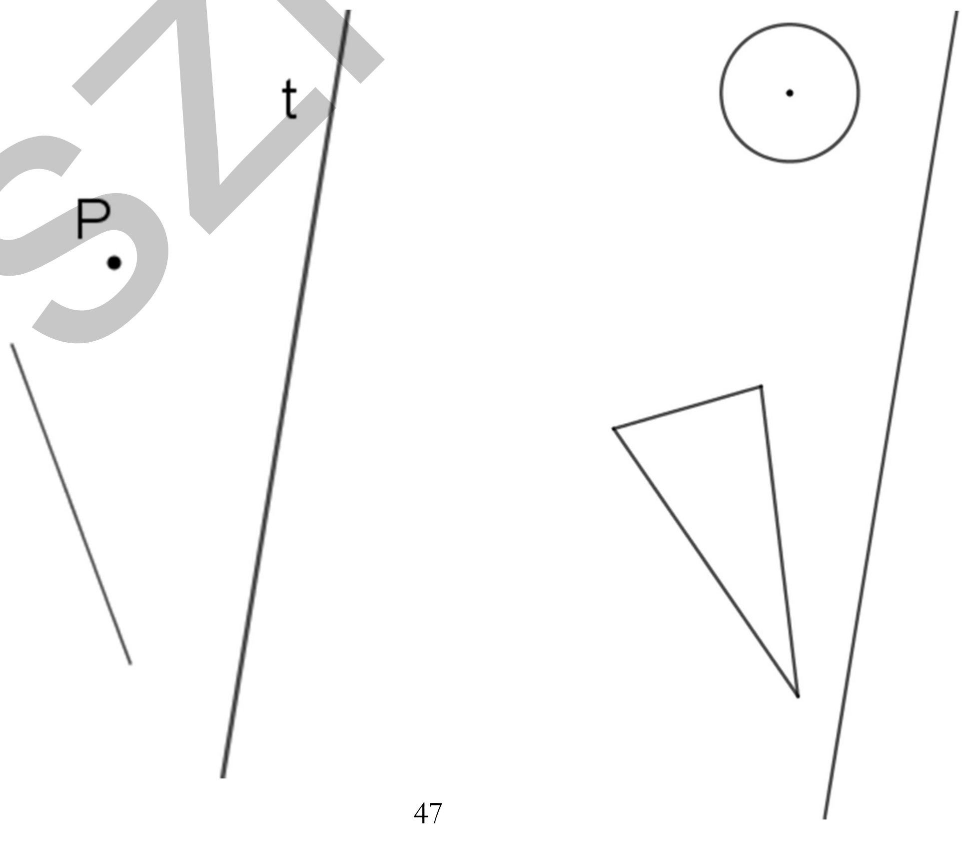
tanm_geometria_B_3_1_b_iii_tengelyes_tukrozes.ggb

A körüljárást megváltoztatja

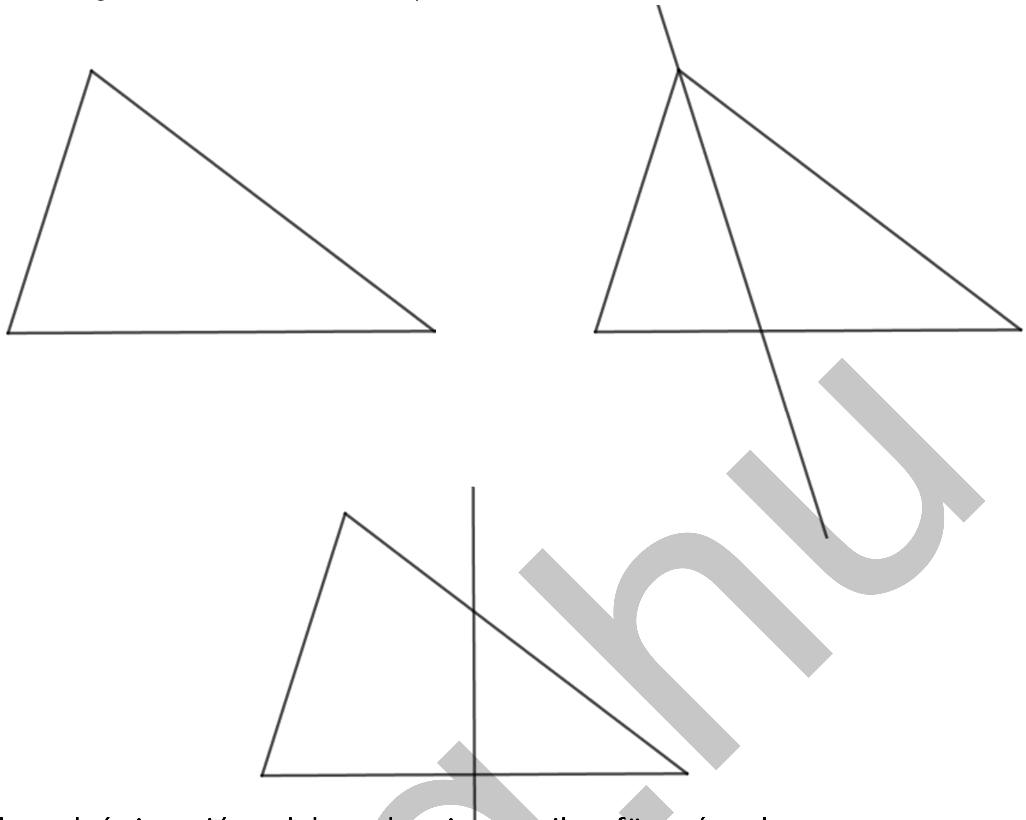
Fixpontjai:



(iii) Pontos szerkesztéssel: Az alakzatoknak a meghatározó pontjait kell megszerkeszteni: pl.: egyenesnél 2 pont, körnél pl: Q és tudni a sugarat, sokszögnél: a sokszög csúcsai.



(iv) Háromszöget tükrözzünk egyik oldalára; szögfelezőjére; oldalfelező merőlegesére. (Nevezzük el a pontokat, szakaszokat, vonalakat!)



c) Fixalakzatok és invariáns alakzatok; szimmetrikus függvények

Def.: Egy transzformációnál a fixpont képe önmaga.

Van-e fixpont a tengelyes tükrözésnél?

Def.: Egy transzformációnál fixegyenes az, melynek minden pontja fixpont.

Van-e fixegyenes a tengelyes tükrözésnél?

Def.: Egy transzformációnál az invariáns egyenes képe önmaga, de nem minden pontja fixpont.

Van-e invariáns egyenes a tengelyes tükrözésnél?

Szimmetrikus transzformációnál/függvénynél pont képének képe önmaga.
Szimmetrikus transzformáció-e a tengelyes tükrözés?
Rajzoljunk:

Van-e olyan valós-valós fv, amely szimmetrikus? (De nem azonosság, vagyis számhoz nem önmagát rendeli.) Képletesen: a gépbe „beledobok” egy számot, ami „kiesik” azt újra beledobom és így visszakapom az eredeti számot.

Vagyis: f(f(x)) = x

d) Tulajdonságok (egyelőre csak egybevágósági transzformációkat tanulunk – melyek távolságtartók)

- **Illeszkedéstartó**
- **Távolságtartó $\Rightarrow$ szögtartó** (később bizonyítjuk)
- **Szimmetrikus**: $t(P)=P' \Rightarrow t(P')=t(P)$ (vagyis: $t(t(P))=P$).
- **A körüljárást megváltoztatja:** „irányításfordító geometriai trafó”
- **Kölcsönösen egyértelmű**, vagyis **injektív** ($\Leftarrow$ szimmetrikus)
  „Őskép”: Egy képpont ősképe az a pont, amelyhez a transzformáció a képpontot rendelte.
  $t^{-1}(A')\equiv A$
  Emlékeztető: Az injektív fv. definíciója: $(\forall x_1;x_2\in D_f \wedge f(x_1)=f(x_2)) \Rightarrow x_1=x_2$
- **Fixpont, fix egyenes, invariáns egyenes**
  Tengelyes tükrözés fixpontjai:
  A tengelyes tükrözés fixegyenese:

  Tengelyes tükrözés invariáns egyenesei:

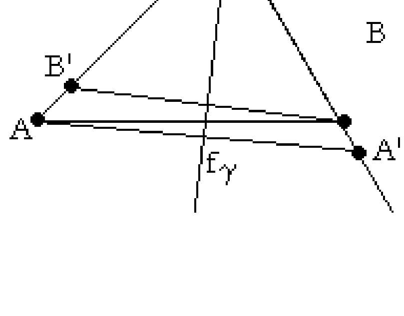
III/2) Tengelyesen tükrös alakzatok

Tengelyesen tükrös alakzatok: egy megfelelő tengelyre nézve invariáns alakzatok.

a) Szakasz, egyenes – mire?

b) Háromszög: szükségszerűn egy csúcs illeszkedik a tengelyre, és a másik kettő szimmetrikus.
Neve:

Speciális helyzetű tengely: **Általános Δ-ben a szögfelező:**
Mivel a tükrözés szögtartó, tehát a két szár egymásra esik a tükrözés következtében.
(De a csúcsok már nem egymásnak a képei!)



c) (Egyszerű) négyszög

(i) $ABCD_{\text{négyszög}}$: Ha pl. $A \in t$ akkor még egy csúcs illeszkedik t-re, és a másik kettő pedig tükrös *t*-re. Egyébként legalább öt csúcsa lenne.

Vagyis: A; C $\in$ t, *t*(B)=D. A négyszög neve:

A tükrözés miatt: AB=AD; BC=CD
Az AC átló merőlegesen felezi BD átlót.
Az AC átló a négyszög tükörtengelye.
$\beta=\delta$

Vegyük észre: Az, hogy az „AC átló merőlegesen felezi BD átlót” azt jelenti, hogy az AC átló tükörtengely, tehát a négyszög deltoid.
Vagyis a „deltoidság” szükséges és elégséges föltétele, hogy legalább az egyik átló merőlegesen felezze a másikat.
Figyelem, lehet konkáv!
VEGYÜK ÉSZRE: A ROMBUSZ SPECIÁLIS DELTOID

(ii) $ABCD_{\text{négyszög}}$: Ha egyik csúcs sem illeszkedik a tengelyre, akkor páronként egymás tükörképei, egyébként több csúcs lenne. Ekkor pl. t(A)=B és t(C)=D.

A négyszög neve:

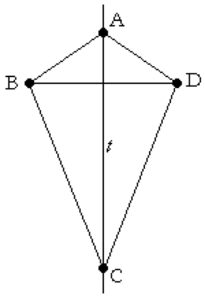
A tükrözés miatt:
t merőlegesen felezi AB-t és CD-t, vagyis: AB $\parallel$ CD.
t(AD)$\equiv$t(BC) $\Rightarrow$ AD=BC, tehát a ________________________ egyenlőszárú is.
(Visszafelé nem igaz)
$\alpha=\beta$ és $\gamma=\delta$ Mit tudnak az átlók?

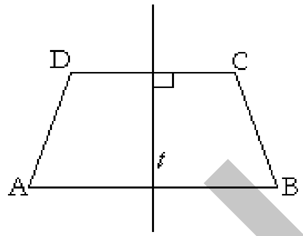
(iii) Speciálisabb tengelyesen szimmetrikus négyszögek:

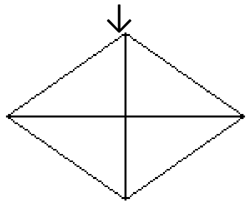
„A négyzet születése”

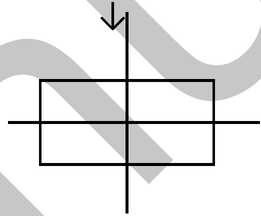
Tengelyesen szimmetrikus

Két átlóra	Két oldalfelező merőlegesre
Deltoid $\rightarrow$ Rombusz	Húrtrapéz $\rightarrow$ Téglalap

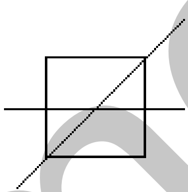


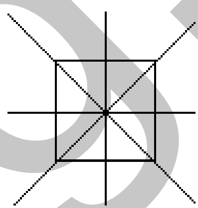






téglalap +rombusz = négyzet

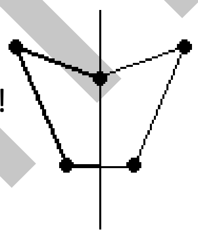


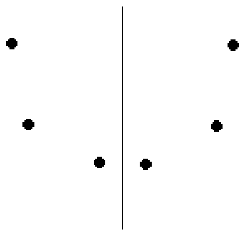


d) sokszögek

(i) Nem szabályos

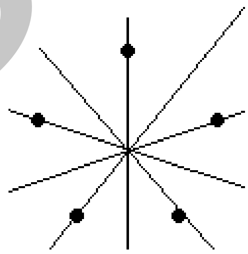
Rajzolj még egyet!

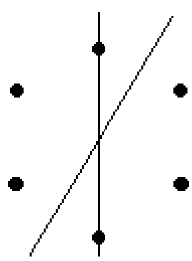




(ii) Szabályos

Annyi tükörtengelyük van, ahány oldaluk v. csúcsuk.





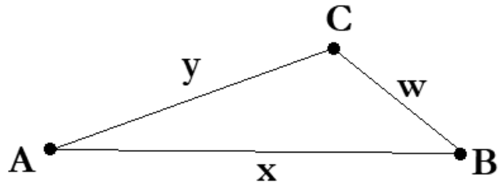
e) Kör

III/3) Alappéldák

A háromszög-egyenlőtlenség: egy Δ bármely két oldalának összege nagyobb mint a harmadik: a+b>c, b+c>a és c+a>b

Illetve: **egy háromszög két nem legnagyobb oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal: a≤b≤c $\Rightarrow$ a+b>c.**

Úgy szoktuk fogalmazni, hogy „két pont között legrövidebb út az egyenes”:



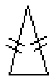
„Az erdészt megkérdezik
az eltévedt túrázók:
Milyen messze van még az erdészház?
Légvonalban úgy kb. 5 km.
De tudok egy rövidebb utat”

y+w >

Feladat: Minimum és maximum mekkora lehet egy háromszög harmadik oldala, ha két oldala:

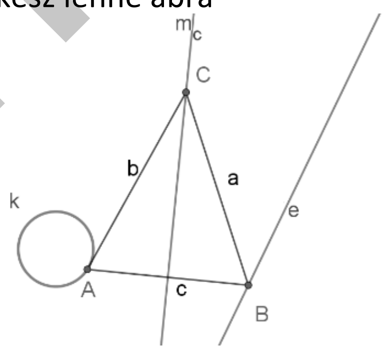
a=3,8 cm b=2,1 cm

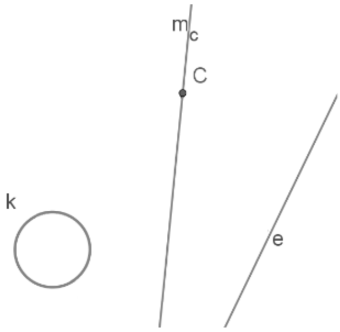
a=7,9   b=3,2

a) -nek: adott az alaphoz tartozó magasság-egyenese (vagyis: szimmetriatengelye) : *m*, az arra illeszkedő *C* csúcs, az A-n áthaladó *k* kör és a B-n áthaladó *e* egyenes. Kell: Δ.

Mo.:

- **Ábrák:** Mintha már kész lenne ábra   vakábra.





- **Elv** - keressük pl:

- **Szerkesztés**

- **Diszkusszió**

b) „Legrövidebb út” – „tükröződő fény” – biliárd

tanm_geometria_B_3_3_d_legrovidebb_ut.ggb

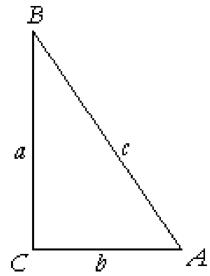
Adott egy *e* egyenes és az egyik oldalán két különböző pont: *A* és *B*.

Kell P$\in e \rightarrow AP+BP$=minimális

Mo.:

Vegyük észre, hogy ha *e* egy tükörfelület, akkor így verődik *A*-ból *B*-be a fénysugár. A biliárd asztalon is így pattan a golyó: szögtartással!!!

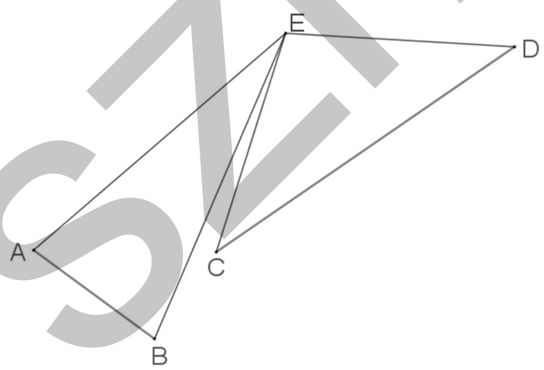
c) A „félszabályos háromszög”: adott egy derékszögű háromszög. α=60°. Mutasd meg, hogy 2*AC*=*AB*.

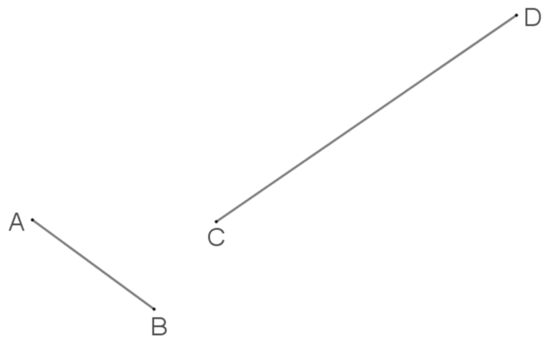


d) Alappélda: két egyenlőszárú háromszögnek közös a szárak által bezárt csúcsa. Adott a két alap: AB és DE. Szerkesztendő a két háromszög.

Mo.:

- **Ábrák:** Mintha már kész lenne ábra vakábra.





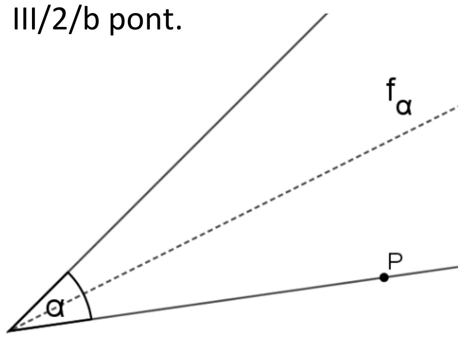
- **Elv** - keressük pl:

- **Szerkesztés**

- **Diszkusszió**

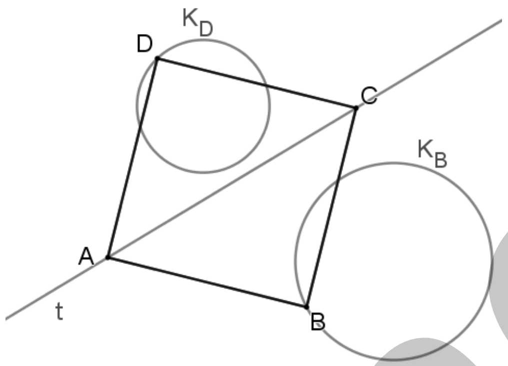
III/4) Egyéb, tengelyes tükrözésen alapuló példák

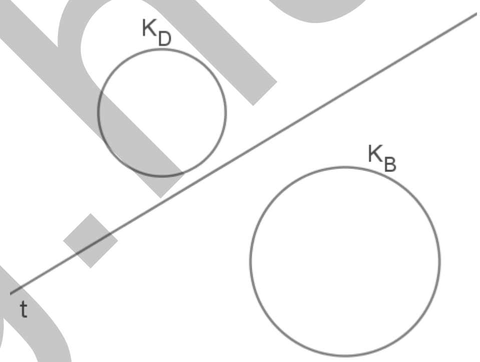
a) Tükrözzük egy szög egyik szárára eső *P* pontot a szögfelezőre. Hol lesz *P'*? Lásd.: III/2/b pont.



b) Egy *ABCD* (ilyen körüljárású) négyzetből adott az *AC* átló egyenese, illetve a *B* és *D* csúcsokon áthaladó k_B és k_D körök. Szerkesztendő a négyzet.
Mo:

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne" ábra Vakábra





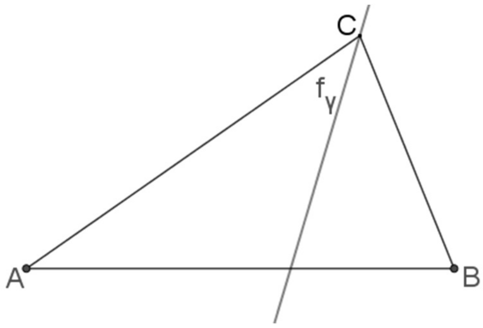
- **Elv** – Keressük pl: B csúcsot.
  Ha egy pontot keresünk, akkor két meghatározó vonalát keressük: pl. egy kört és egy egyenest, vagy két kört. Ha mindkettőn rajta van, akkor a metszéspontjuk a keresett pont.

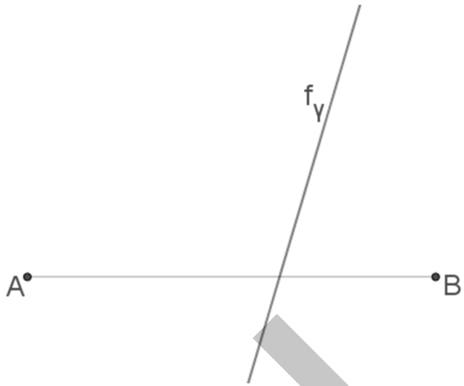
- **Szerkesztés**

- **Diszkusszió**: ______________________ helyzete szerint:

c) Adott egy háromszögből: f_γ egyenese, a *B* és az *A* csúcs. Szerkesztendő a Δ.
Mo:

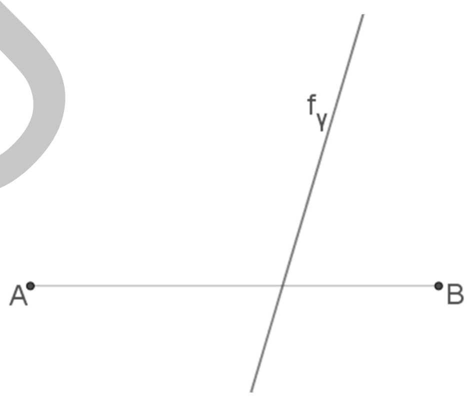
- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





- **Elv**: Keressük

- **Szerkesztés**



- **Diszkusszió**: ________________________ helyzete szerint:

d) Húzd alá a megfelelőt (Igaz/Hamis)

- A tengelyes tükrözés nem szimmetrikus – Igaz/Hamis
- Van olyan háromszög, amelynek van szimmetriatengelye – Igaz/Hamis
- A tengelyesen szimmetrikus négyszög a rombusz – Igaz/Hamis
- A téglalap tengelyesen szimmetrikus az egyik átlójára – Igaz/Hamis

IV. **Forgatás** (egybevágósági trafó)

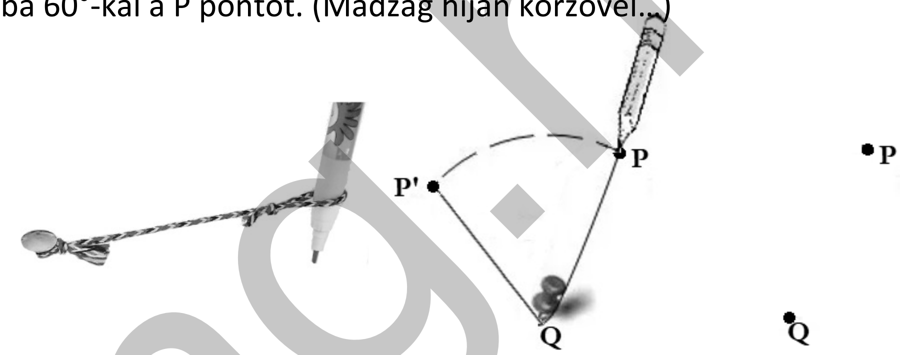
Emlékeztető: Két háromszög egybevágóságának, - vagyis egy háromszög egyértelmű szerkeszthetőségének alapesetei

- Ha oldalaik hossza páronként egyenlők
  $\leftrightarrow$ ha egy háromszögnek adott mindhárom oldala
- két-két oldaluk hossza páronként és a közrezárt szögük is megegyezik
  $\leftrightarrow$ ha egy háromszögnek adott két oldala és a közrezárt szöge
- egy-egy oldaluk hossza és a rajta fekvő két szögük páronként megegyezik
  $\leftrightarrow$ ha egy háromszögnek adott egy oldala és a rajta fekvő két szög
- két-két oldaluk hossza páronként, és a nem kisebbel szemközti szögük megegyezik
  $\leftrightarrow$ ha egy háromszögnek adott két oldala, és a nem kisebbikkel szemközti szöge

IV/1) Definíció + tulajdonságok

a) Definíció

Adott egy Q és egy P pont. A Q pont körül forgasd el az óramutató járásával ellenkező irányba 60°-kal a P pontot. (Madzag híján körzővel...)



Definíció: **Forgatás** (egybevágósági transzformáció)

Adott *Q* középpont és egy α előjeles szög (elfordulás). Ekkor:

$Q^{\alpha}(\ )$: $S \rightarrow S$; $P \mapsto P'$

ahol: ha $P \equiv Q \Leftrightarrow P' \equiv Q$

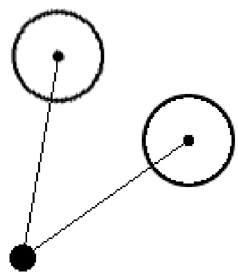
egyébként: $d(Q;P) = d(Q;P')$ és $P'QP_{\angle} = \alpha$ a megfelelő irányban.

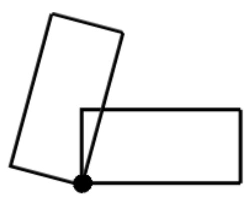
Jelölés: $Q^{\alpha}(P) = P'$

tanm_geometria_B_4_1_b_kezzel_forgatas.ggb

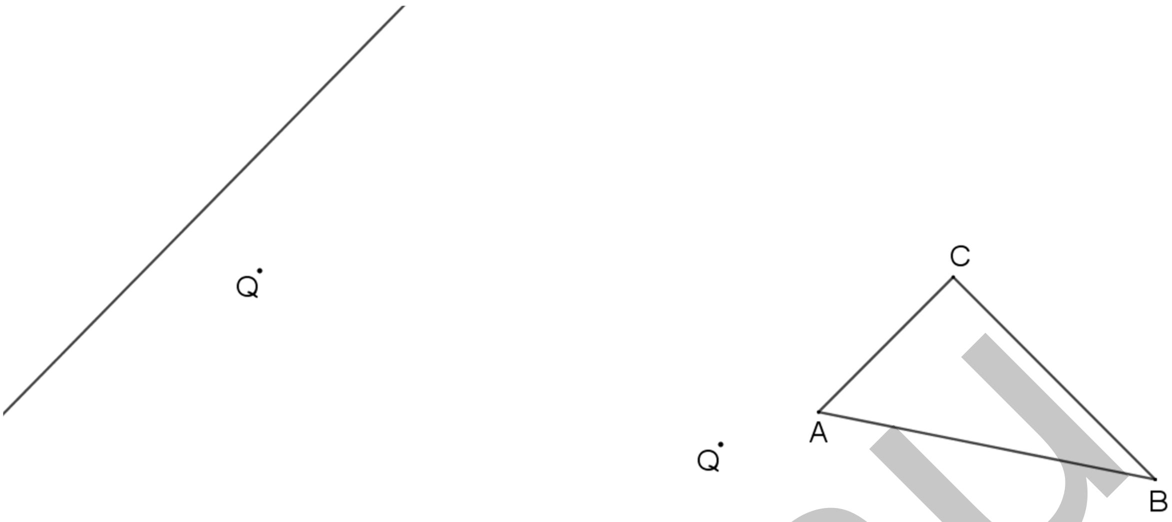
b) Példák rá:

(i) Először „kézileg", szerkesztés nélkül – az ábrák alatt egy adott pont körül te is forgass egy kicsit nagyobb szöggel.





(ii) Szögmérővel, körzővel, vonalzóval!
Q pont körül az egyenest –120°-kal; Q pont körül a ABC_{Δ}-et +75°-kal!



(iii) Észrevételek:
tanm_geometria_B_3_1_b_iii_tengelyes_tukrozes.ggb

A körüljárást ____

Fixpont _________________________________

(iv) Szerkesztésnél: Az alakzatoknak a meghatározó pontjait kell megszerkeszteni: pl.: egyenesnek 2 pontját; körnek a középpontját és egy kerületi pontját (vagy tudni a sugarat); sokszögnek a csúcsait.

c) Tulajdonságok (egyelőre csak egybevágósági transzformációkat tanulunk – melyek távolságtartók)

- **Illeszkedéstartó**
- **Távolságtartó** $\Rightarrow$ **szögtartó** (később bizonyítjuk)
- **Nem szimmetrikus** (Kivéve: $\alpha=(2k+1)\cdot180°$, ahol $k\in\mathbf{Z}$)
- **Körüljárástartó** (a körüljárást nem változtatja meg)
- **Kölcsönösen egyértelmű**, vagyis **injektív**
- **Fixpont, fix egyenes, invariáns egyenes**

A forgatás fixpontja:

Fixegyenese:

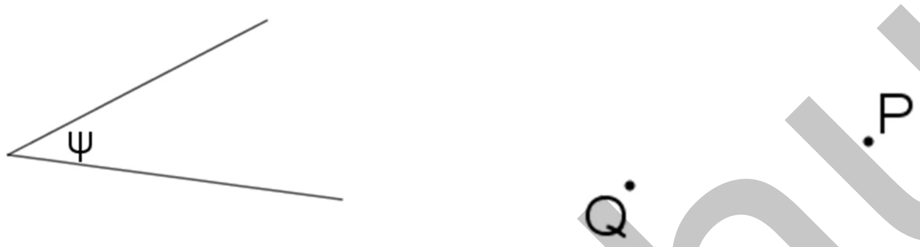
Invariáns egyenesei:

(Kivéve: $\alpha=(2k+1)\cdot180°$, ahol $k\in\mathbf{Z}$, Ekkor a Q tartópontú sugársor elemei)

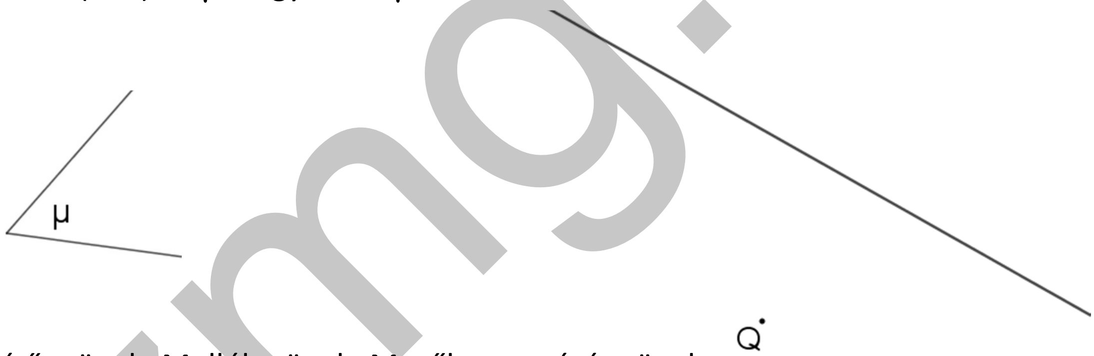
IV/2) Forgassunk

a) Szerkessz: 30°-ot, 45°-ot, 120°-ot!

b) Adott Q, P és ψ szög. Szerkeszd meg: $Q^{+\psi}$ (P)

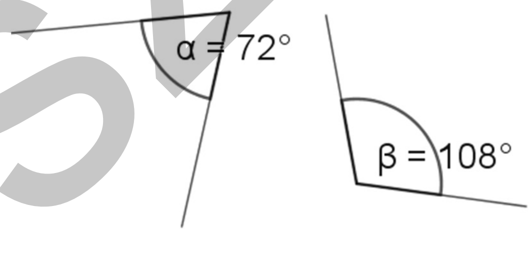


c) Szerkeszd meg: $Q^{+\mu}$ (e). (Valójában egy P_1 és egy P_2 pontját!)
Mekkora lesz (e;e')∠?
Hogy forgatunk μ szöggel?
Állítás: $(e;e')_{\angle} = \mu$ vagy 180°–μ.

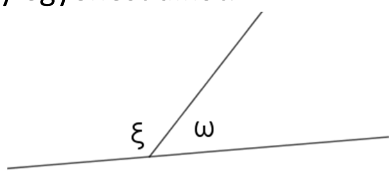


IV/3) Kiegészítő szögek; Mellékszögek; Merőleges szárú szögek

a) Def.: **Kiegészítő szögpár** az, mely két összege 180°.
Így tanuld meg „180°-ra kiegészítő szögek"



b) Def.: **Mellékszögek**: olyan kiegészítő szögpár, melyek egyik szára közös, a másik pár egy egyenest alkot.

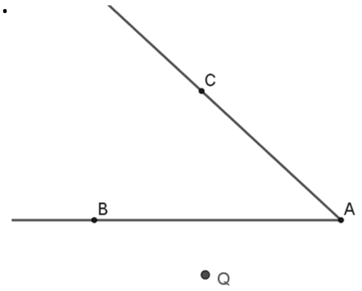


Egy kiegészítő szögpár egyik szöge 4-szerese a másiknak. Mekkorák?

c) Merőleges szárú szögek: (***tanm_geometria_B_4_3_b.ggb***)

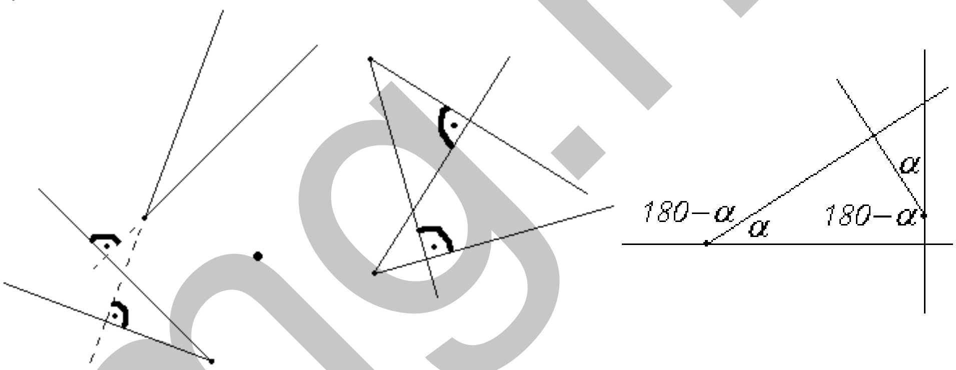
Ha egy a konvex szöget 90°-al elforgatunk, akkor az elforgatott szög, vagy annak mellékszögének szárai merőlegesek az eredeti szögre.

Forgasd el a szöget: Q^{+90° !



Def.: Az olyan konvex szögpárokat, amelyeknek szárai páronként $\perp$-ek egymásra „**merőleges szárú szögek**nek” nevezzük. Az egyik, v. annak mellékszöge 90° elforgatással (egy megfelelő középpont körül) a másikba vihető $\Rightarrow$ a konvex merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek (egymást 180°-ra egészítik ki.)

Példák rá:

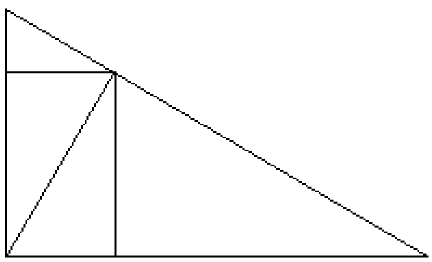


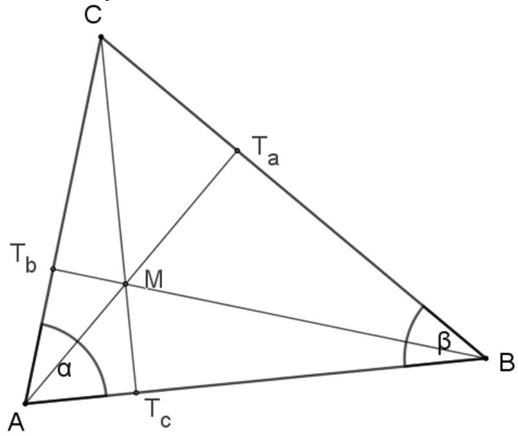
Rajzold át pirossal-zölddel a szárakat!

Gyakorlásuk:

A *baloldali* derékszögű Δ-ben merőleges az, ami annak látszódik. Minden szögnek adj külön nevet (α; β; ε; ϕ; κ;) Add meg az egyenlő merőleges szárúkat. Jelöld az egyenlőket, a merőleges szárú kiegészítőket stb. (A derékszögeket nem kell.)

A *jobboldaliban* a magasságvonalak vannak meghúzva. Keress az $ACT_{c\angle}$ -gel és a $T_aAB_{\angle}$ -gel egyenlő szöget, illetve az α-val egyenlő merőleges szárút, és az α merőleges szárú kiegészítő párját. Hasonlóképp a β-nak is!





IV/4) Forgásszimmetrikus alakzatok

Mindig tegyük hozzá: mi körül és hány fokra. A forgásszimmetria rendjének bevezetése.

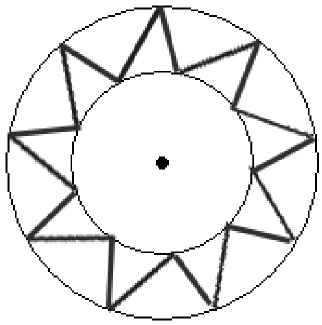
- egyenes, szakasz

- Háromszögek közül:

- Négyszögek közül

- Kör. Vegyük észre: a korábbiak köré kör írható!

Gyártsunk forgásszimmetrikus, nem szabályos alakzatot!



IV/5) „Hány forgatásnál kerül minden a helyére vissza?" (Csoport- és számelmélet a forgatásnál)

a) Forgatás rendje egész mértékű szögeknél: Az egész mértékű α szögű forgatások rendje az a legkisebb $n \in \mathbf{N}$ szám, amelyre $(Q^{\alpha}(\ ))^n$=identitás

pl: 20°-os forgatás rendje: 18. 60°-os forgatás rendje: 6.

Ha egy alakzat 5°-ra forgásszimmetrikus, akkor még hány fokra az?

Ha egy alakzat 361°-ra forgásszimmetrikus, akkor még hány fokra az?

* Ha egy alakzat 7°-ra forgásszimmetrikus, akkor még hány fokra az?

b) $*$ α egész mértékű, de $\alpha \nmid 360°$.

Ha egy alakzat 65°-ra forgásszimmetrikus, akkor még hány fokra az?

$x_0 \cdot 65 + y_0 \cdot 360 = 5$.

A rendje:

Igazából kell az lkkt: [360°;65°]=4680.

$\frac{4680}{65}$=72. Vagyis 72 az a legkisebb szám, ahányszor 65°-ot körbeforgatva identitáshoz jutok.

Ha egy alakzat 16°-ra forgásszimmetrikus, akkor még hány fokra az?

c) * Forgatás rendje – nem egész, racionális mértékű szögeknél: A 360°-hoz racionális arányú α szögű forgatások rendje az a legkisebb $n \in \mathbf{N}$ szám, amelyre $(Q^{\alpha}(\;))^{n}$=identitás

* Ha $\alpha = \frac{p}{q} \cdot 360°$ ahol $(p;q)=1 \Rightarrow$ a forgatás rendje: q.

IV/6) Alappéldák

a) Adott e; $P \notin \boldsymbol{e}$; $Q \notin e$; $P \neq Q$. Forgasd el P-t Q körül, hogy e-re essék.

Mo.: ***tanm_geometria_B_4_6_ab_pont_forgatasa_egyenesre_es_forditva.ggb***

Valójában itt a a „Mintha már…” ábra jó felvétele magával hozza a megoldást.

Mit is keresünk?

Valójában azt az ____

b) Adott e; $P\notin e$; $Q\notin e$; $P\neq Q$. Forgasd el e-t Q körül, hogy P-re essék.

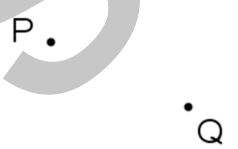
tanm_geometria_B_4_6_ab_pont_forgatasa_egyenesre_es_forditva.ggb
Valójában itt a a „Mintha már…” ábra jó felvétele magával hozza a megoldást.

Mit is keresünk?
Valójában azt az ____

„Kopernikuszi fordulat”:

c) Adott $P\neq Q$.

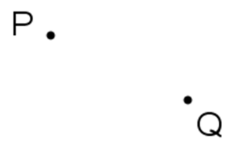
Kell azon pontok halmaza, melyekből P a Q-ba forgatható valamilyen
pozitív v. negatív szöggel.
Mo.:



Elv:

Kell azon pontok halmaza, amelyből P a Q-ba forgatható $\pm 30°$-kal.

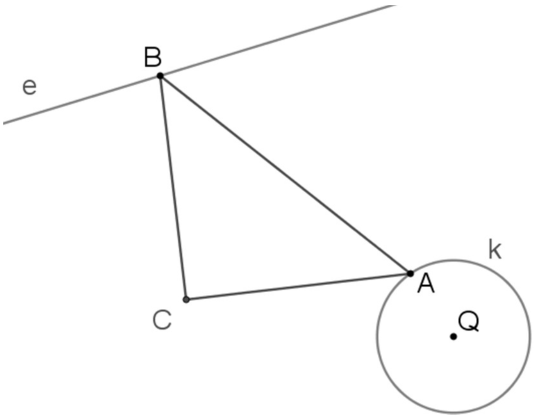
Mo.:

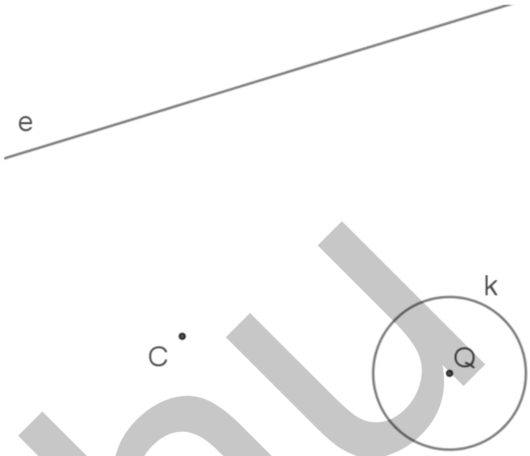


Elv:

d) Egyenlőszárú derékszögű háromszögből (szokásos jelölések mellett) adott *C* csúcs, illetve az *A*-n áthaladó *k* kör és a *B*-n áthaladó *e* egyenes. Kell: Δ.
tanm_geometria_B_4_6_d.ggb
Mo:

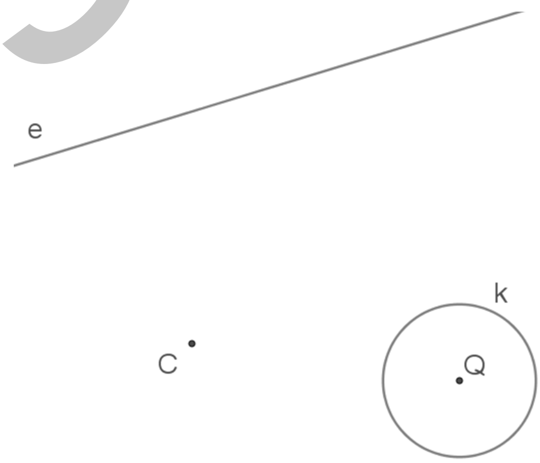
- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





- **Elv**: Keressük

- **Szerkesztés**

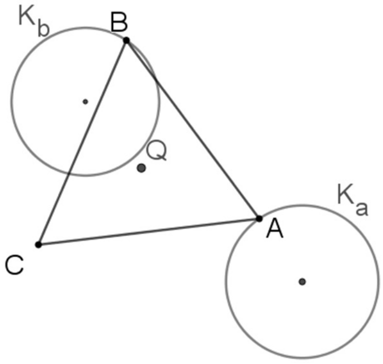


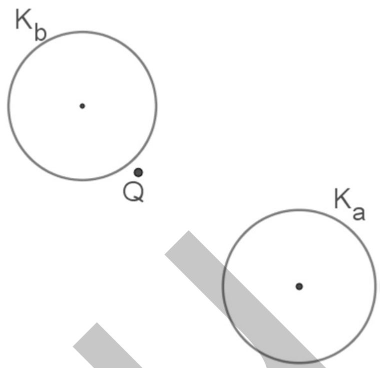
- **Diszkusszió**: ________________________ helyzete szerint:

e) Adott egy egyenlőoldalú Δ középpontja: Q, illetve az A-n áthaladó K_a és a B-n áthaladó K_b körök. Szerkesztendő a Δ.

Mo:

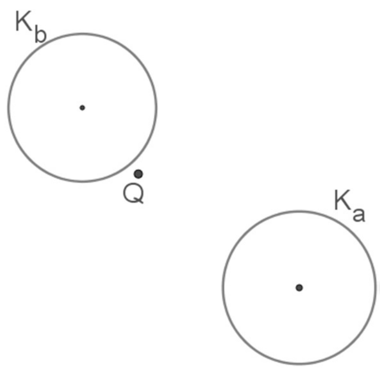
- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





- **Elv**

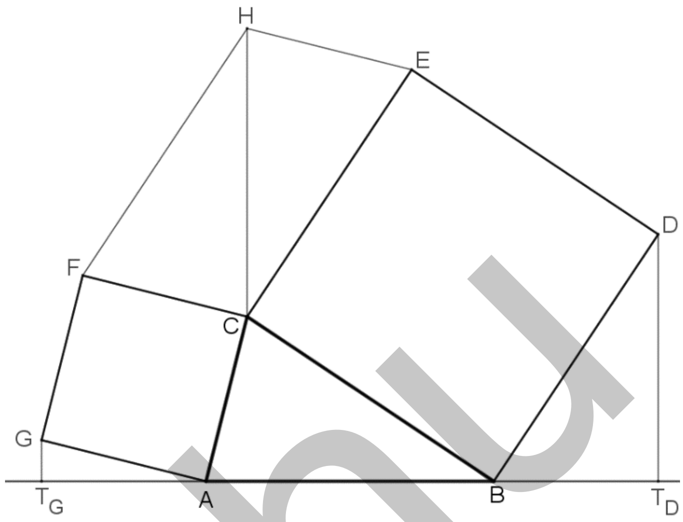
- **Szerkesztés**



- **Diszkusszió**

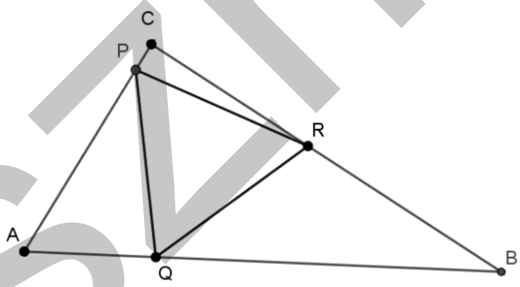
IV/7) Egyéb gyakorlópéldák

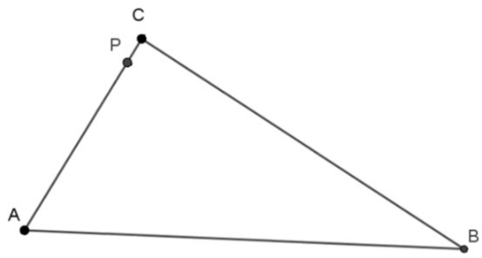
a) Egy háromszög *a* és *b* oldalára kifelé négyzeteket emelünk. Majd E-ből ‖-ost húzunk CF-el, F-ből CE-vel. A metszéspontjuk: H.
Állítás: HC $\perp$ AB és: $DT_D + GT_G = HC$
Biz.:



b) Adott ABC_Δ. $P \in AC$. Kell a háromszögbe rajzolt *PQR* egyenlőoldalú háromszög.
tanm_geometria_B_4_7_b.ggb:

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra   Vakábra



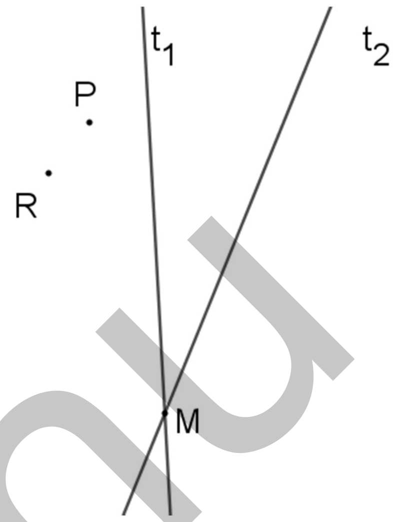


- **Elv**

- **Szerkesztés**
- **Diszkusszió**

c) Két egymást metsző tengelyre történő tükrözés egymásutánja (szorzata, kompozíciója):

Bizonyítsuk be!
tanm_geometria_B_4_7_c__ket_tengelyes_tukr.ggb
Csak az ábrán látható esetet vizsgáljuk,
a többire elhisszük.



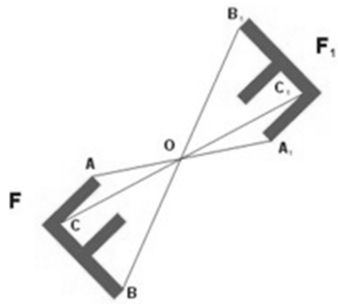
d) Adott egy *k* körben egy P pont, és egy *h* hosszúságú szakasz („mint egy bot, lerakva”). Szerkesszünk a körbe egy *P*-n áthaladó *h* hosszúságú húrt.
Mo.:

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra

- **Elv**

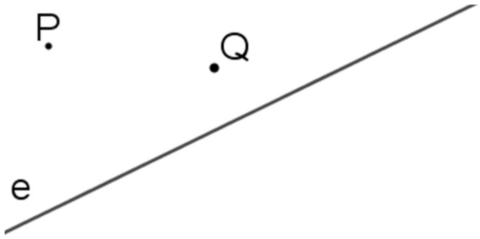
- **Szerkesztés**
- **Diszkusszió**

V. A **középpontos tükrözés** (egybevágósági trafó) mint a forgatás speciális esete – a 180°-os forgatás.



V/1) Tükrözzünk
tanm_geometria_B_5_2.ggb

a) Q-ra P pontot



Q-ra *e* egyenest. Mekkora lesz (e;e')∠?

b) Szakasz tükörképe: Q(AB)=A'B'.
Így Q(AB')=

Vagyis a kapott négyszög szemközti oldalai ________________ : ______________
A szó jelentése:

c) Észrevételek:
tanm_geometria_B_3_1_b_iii_tengelyes_tukrozes.ggb
A körüljárást ____
Fixpont __________________________________
Q(Q(A))= vagyis ha A'≡Q(A) ⇒ Q(A') ≡ Tehát:

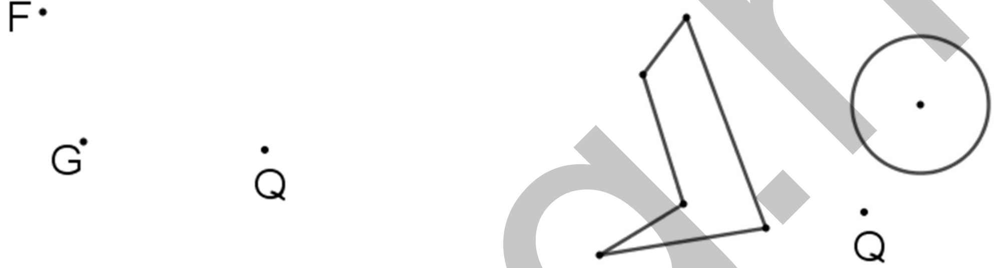
V/2) Definíció + tulajdonságok
a) **Definíció**
Adott *Q* középpont. Ekkor:
Q( ): S→S; P↦P'
ahol: P≡*Q* ⇔ P' ≡*Q*
egyébként: *Q* felezi PP' szakaszt.
Jelölés: *Q*(P)≡P'

b) A forgatás egy speciális esete: $Q(\ )\equiv$ Bizonyítás: triviális.

c) Tükrözzünk Q-ra:

- Először kézileg, szerkesztés nélkül: pont, egyenes, kör, „lólépés”

- Utána pontos szerkesztéssel ugyanezek



d) Tulajdonságok (egyelőre távolságtartó transzformációkat tanulunk – melyek egybevágósági transzformációk)

- **Illeszkedéstartó**
- **Távolságtartó** $\Rightarrow$ **szögtartó** (később bizonyítjuk)
- **Szimmetrikus**: Q(P)=P' $\Rightarrow$ vagyis: Q(Q (   ))
- **A körüljárást megtartja (nem változtatja meg)**
- **Kölcsönösen egyértelmű**, vagyis **injektív** ($\Leftarrow$ szimmetrikus)
  Az injektív függvény definíciója jelekkel:

- **Fixpont, fix egyenes, invariáns egyenes**
  A fixpont definíciója jelekkel:

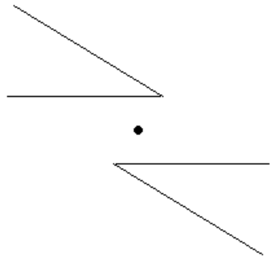
  A középpontos tükrözés fixpontjai:

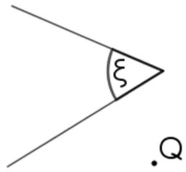
  Fixegyenes:

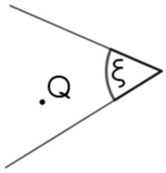
  A Q középpontú középpontos tükrözés invariáns egyenesei:

V/3) Fordított állású szögek **tanm_geometria_B_5_3.ggb**

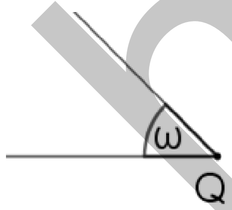
a) Def.: **váltószögek**: Két szög váltószögpárt alkot, ha ∃ egy olyan Q pont a síkban, amelyre nézve ők egymás tükörképei.
A váltószögek így egymással egyenlők, száraik párhuzamosak, ellenkező irányba mutatnak.
Tükrözd a szögeket a Q pontra!



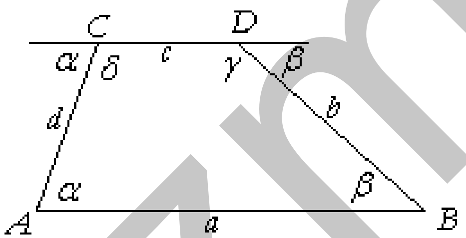




b) Def.: **csúcsszögek** – a váltószögek speciális esete
A váltószögek így egymással egyenlők, száraik párhuzamosak, ellenkező irányba mutatnak.
Tükrözd a szöget a Q csúcspontra!



c) A trapéz, és a szögei
Trapéz: az a négyszög, melynek létezik párhuzamos szemközti oldalpárja.
Alap, szár. Áll: a trapéz száron fekvő szögei kiegészítő szögek
Mire tükrös a két α szög? Mire tükrös a két β szög?

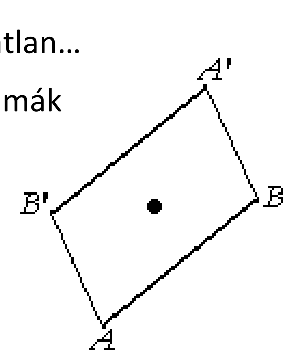


V/4) Középpontosan szimmetrikus alakzatok

Mindig tegyük hozzá: **mely pontra!**

a) Egyenes; Szakasz
Háromszögek közül: egyik sem, mert a csúcsok száma páratlan…

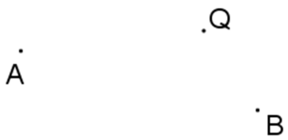
b) A középpontosan szimmetrikus négyszögek: paralelogrammák



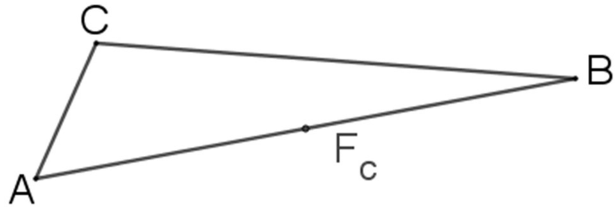
Q(AB)=CD $\Rightarrow$ AB $\|$=CD
Mivel azonban a kp-os trafó szimmetrikus, ezért:
Q(AB')=A'B $\Rightarrow$ AB' $\|$=A'B

Így tehát:

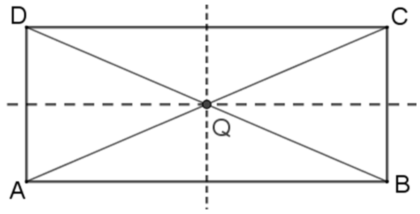
- a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők,
- szemközti szögei egyenlők.
- Egy oldalon fekvő szögei: kiegészítők

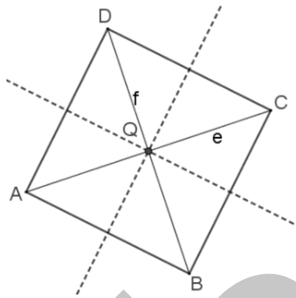


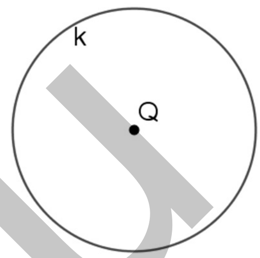
A paralelogrammát általában háromszög oldalfelező-pontjára tükrözve kapjuk!



Téglalap: olyan paralelogramma, amely oldalfelező merőlegeseire tengelyesen szimmetrikus, szögei 90°-osak.







Négyzet: olyan téglalap, amely átlóira is szimmetrikus.

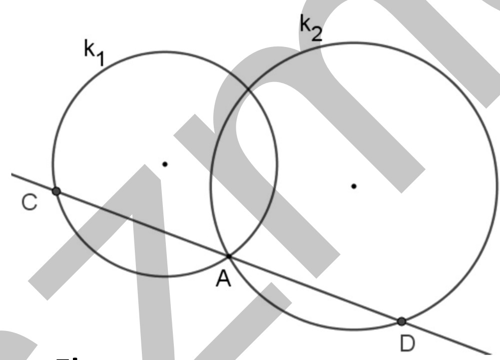
c) Kör – ld. ábra!

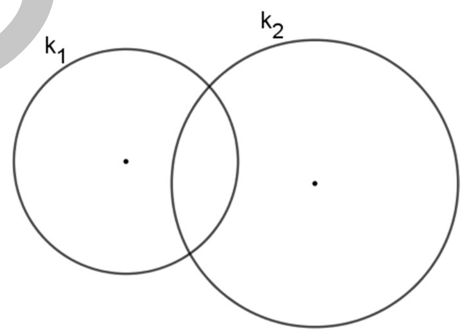
V/5) Alappéldák

a) Adott két egymást metsző kör, k_1 és k_2. Kell a P metszéspontjukon áthúzott olyan közös szelő, mely egyenesnek a két körbe eső húr része egyenlő hosszú!

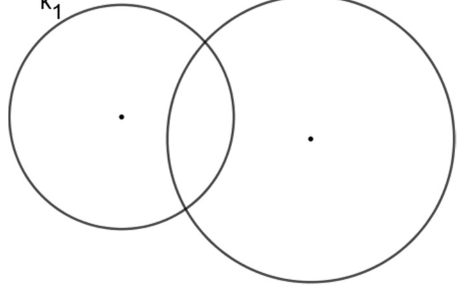
Mo.:

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





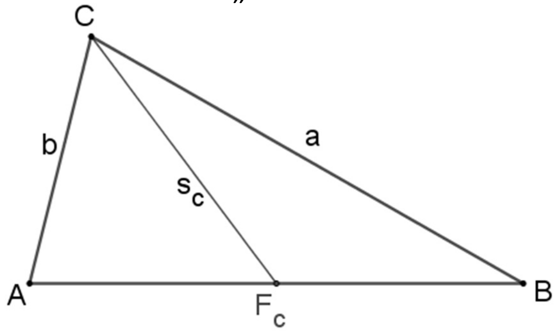
- **Elv**

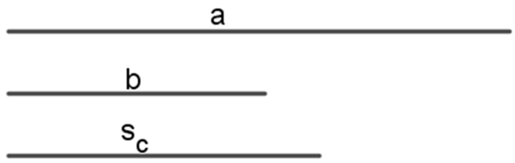


- **Szerkesztés**
- **Diszkusszió**

b) **Súlyvonal – alappélda - Adott egy Δ-ből: a;b; s_c. Kell a Δ.**

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





- **Elv**:

- **Szerkesztés:**

- **Diszkusszió**:

c) Tükrözzünk a koordináta rendszerben pontokat pontokra!
tanm_geometria_B_5_5_c__kp_tukr_koordinatasik.ggb

Add meg a tükörképek koordinátáit!

$A(Q_3) \leftrightarrow Q_3'$(;)

$Q_3(Q_2) \leftrightarrow Q_2'$ (;)

$Q_1(B) \leftrightarrow B'$ (;)

$B(A) \leftrightarrow A'$(;)

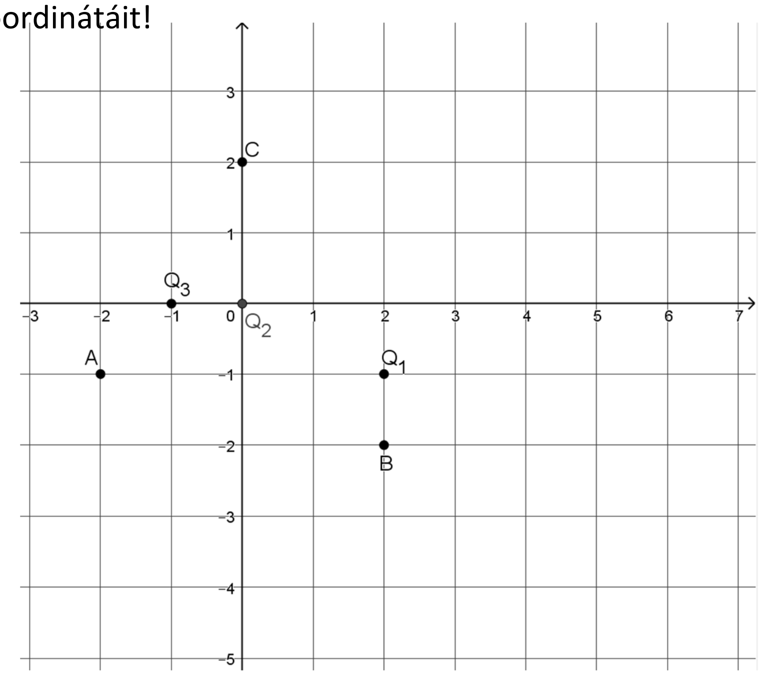
$Q_1(A) \leftrightarrow A''$(;)

$B(Q_3) \leftrightarrow Q_3''$ (;)

$Q_2(B) \leftrightarrow B''$(;)

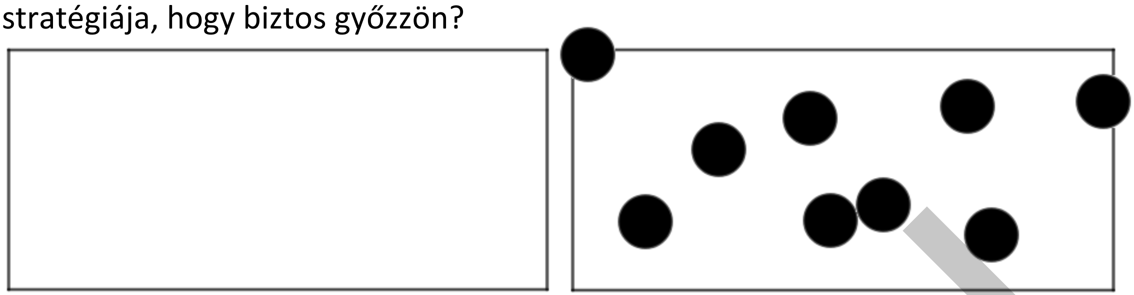
$Q_2(A) \leftrightarrow A'''$(;)

$A(B) \leftrightarrow B'''$(;)



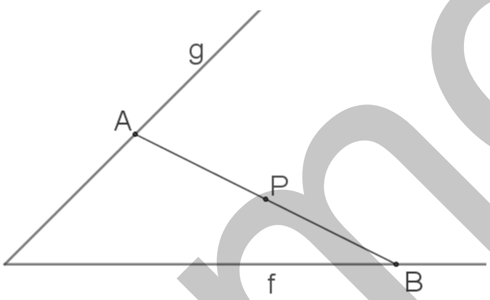
V/6) Gyakorlópéldák

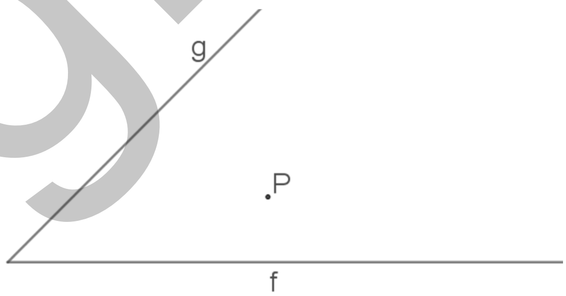
a) Stratégiai játék:
Aladár és Béla egy téglalap alakú asztalra 200 Ft-os érméket helyez felváltva. Az érmék egymáshoz hozzáérhetnek, de nem tehetők egymásra. Az nyer, aki úgy tud még tenni érmét az asztalra, hogy az nem esik le. Aladár kezd. Mi legyen a stratégiája, hogy biztos győzzön?



b) Adott egy α szög, a szögtartományban egy P pont. Kell $e \to P$ felezi az e-nek a szögtartományba eső szakaszát.

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra





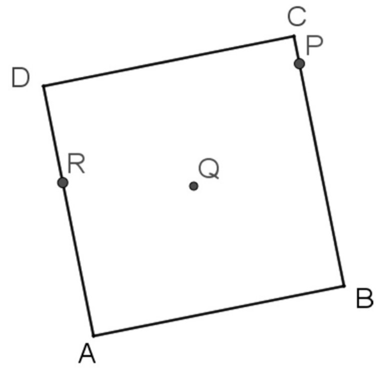
Hogy érdemes egy mintha már kész lenne ábrát felvenni?

- **Elv**

- **Szerkesztés**
- **Diszkusszió**

c) Adott egy *ABCD* négyzetből a középpontja *Q*, illetve $R \in AD$ és $P \in BC$. Kell a négyzet.

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra

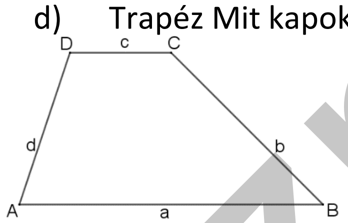


- **Elv**

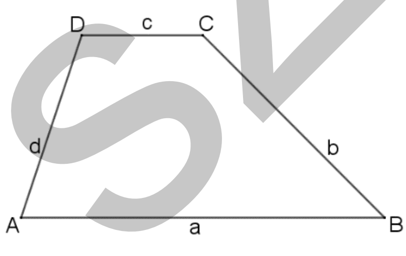
- **Szerkesztés**

- **Diszkusszió**

d) Trapéz Mit kapok, ha egy trapézt tükrözök az egyik szárfelezőjére?

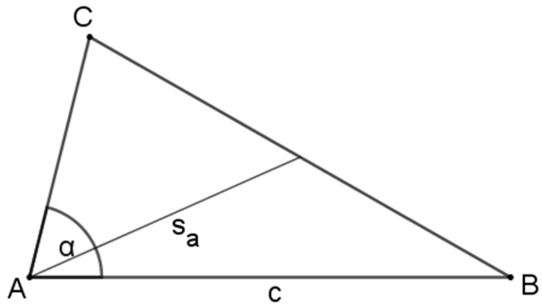


Adott trapézból: *a*+*c* (a két alap összege); *m*; *b*; *d*. Kell a trapéz.



e) Δ-ből adott c, s_a, α. Kell a Δ.

- **Ábrák:** „Mintha már kész lenne” ábra Vakábra



- **Elv**

- **Szerkesztés**

- **Diszkusszió**

f) Áll.: egyenlőszárú háromszög alapjának bármely pontjának a két szártól vett távolságösszege állandó.

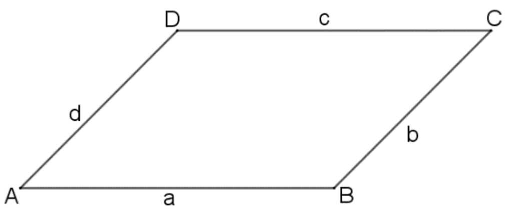
g) * Adott egy ABC$_\Delta$. Szerkeszd meg azt a P pontot az AB oldalon, melynek az *a* és *b* oldaltól vett távolságösszege egy adott szakasz.

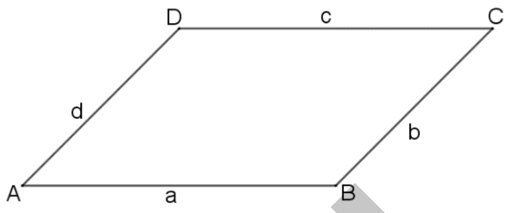
h) A paralelogramma hét ekvivalens definíciója:

A paralelogramma olyan négyszög, amely(ben):

(i) „oldalak”:

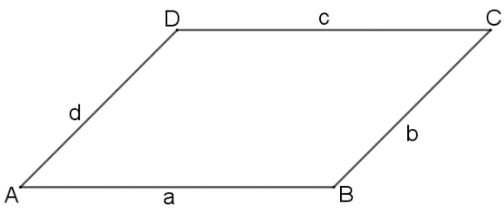
- … a szemközti oldalai párhuzamosak (alapdefiníció);
- … a szemközti oldalai egyenlők

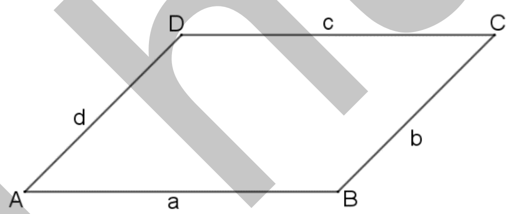




(ii) „szögek”

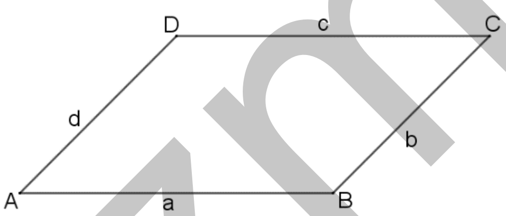
- … a szemközti szögek egyenlők;
- … az egy oldalon található szögek kiegészítők

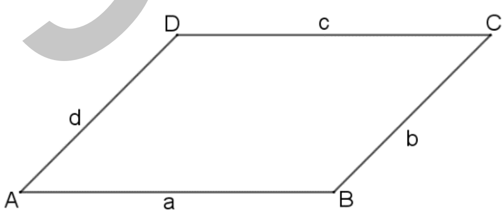




(iii) „tükrösség”

- … középpontosan szimmetrikus;
- … átlói felezik egymást





(iv) „kakukktojás”

- melynek létezik $\|$ és = oldalpárja.

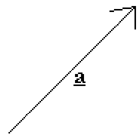
VI. A párhuzamos eltolás bevezetése: A vektorok

VI/1) Definíció: **Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük**.

tanm_geometria_B_6_1_eltolas_bevezetes.ggb

Jelük írásban:

kezdőpont és végpont, fölötte nyíl:

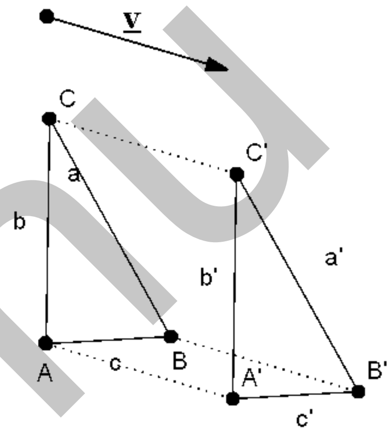


Vagy kisbetű, aláhúzva:

Nyomtatásban: vastagon szedik.

$\vec{AB}$ =$\underline{\mathbf{a}}$.

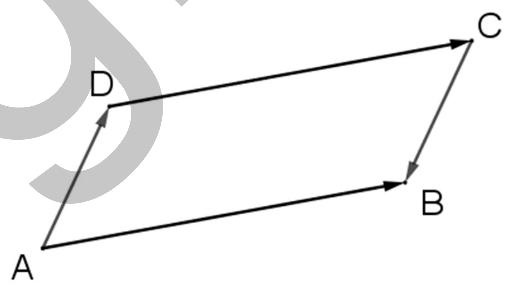
Ha egy háromszöget tologatok, akkor elég egy irányt és egy hosszt megadni, és el lehet oda tolni az alakzatot. Látható, hogy az eltolás során mindegy, hogy melyik csúcsra mondjuk meg ugyanazt az irányt és hosszt, az alakzat ugyanúgy, ugyanoda kerül.



Ugyanígy megadható:
repülő milyen irányba mennyit megy stb.

VI/2) Elnevezések

Nézzünk egy **paralelogrammát**,
azon nézzük a következő fogalmakat!



Vektor **hossza** (vektor abszolút értéke) az őt definiáló szakasz hossza.: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; $|\underline{\mathbf{u}}|$.

A definícióból következik, hogy csakis nemnegatív szám lehet.

Állása: relatív fogalom - 2 vektor összehasonlításakor használjuk. Két vektor *egyállású* (v. párhuzamos), ha tartóegyenesük azonos v. párhuzamos.

$\overrightarrow{AD} \parallel$ illetve $\overrightarrow{AB} \parallel$

Irányítása: Egy adott állásnál a vektornak két irányítása lehet, kezdő és végpontjuk kiválasztása szerint. Két vektornál csak akkor beszélhetünk azonos v. ellentett irányításról, ha egyállásúak (párhuzamosak)

Az ábrán azonos irányítású: Ellentett irányítású:

Kakukktojás: „Iránya”: állása + irányítása együtt.

VI/3) A relációkról

a) A relációkról általában

Emberek között lehet többféle relációt, kapcsolatot megállapítani.

- Koruk alapján (években): Ez bármely két ember között felállítható
  - „egyenlő korú”
    Ha A=B, akkor B=A, vagyis ha Aladár egykorú Bélával, akkor Béla egykorú Aladárral.
  - „Nem idősebb”
    Aladár nem idősebb Bélánál, (A≤B) és Béla nem idősebb Cecilnél (B≤C), akkor Aladár nem idősebb Cecilnél.
    Sőt, az is igaz, hogy Aladár nem idősebb Aladárnál. (A≤A)

- Rokonság:
  - Apaság
    Ez a reláció nem bármely két ember között van meg.
    És ha Aladár apja Bélának, akkor Béla nem apja Aladárnak
    De pl.: Aladár apja Bélának, Béla apja Cecilnek, akkor Aladár már nem apja Cecilnek.
    Sőt: Aladár nem apja Aladárnak
  - Testvérség
    Ha Aladár testvére Bélának, akkor Béla testvére Aladárnak.
    Sőt, ha Aladár testvére Bélának, és Béla testvére Cecilnek, akkor Aladár testvére Cecilnek.

  Van olyan reláció, amely nem létezik két ember között: pl. „osztja”

Számok között pl.: < vagy ≥ vagy: egészek közt „osztja”

- Természetes számok között:
  - „osztja”
    $5|15$ de $5\nmid 16$
    $5|5$.
    Ha $5|10 \not\Rightarrow 10|5$ De: ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a=b$.
- Valósaknál:
  - „Kisebb”
  - „Törtrészük megegyezik”

Egyenesek között:

- Párhuzamosság
  $e \parallel e$ $e \parallel f \Rightarrow f \parallel e$ $e \parallel f$ és $f \parallel g \Rightarrow e \parallel g$
- Merőlegesség
  $e \not\perp e$ $e \perp f \Rightarrow f \perp e$ $e \perp f$ és $f \perp g \not\Rightarrow e \perp g$

Van olyan reláció, amely nem létezik két szám között pl. „testvére” v. „párhuzamos”, vagy „része”. És van olyan mely nem létezik két egyenes között: pl. „nagyobb”, „osztja” stb.

b) Egy reláció lehet:

- **reflexív:** **a** ρ **a** („Az *a* relációban áll önmagával")
  Reflexív reláció, kapcsolat:
  - párhuzamosság: $e \parallel e$ (Vagyis „*e* párhuzamos önmagával")
  - „Nem nagyobb" $a \leq a$ (Vagyis az „*a* szám nem nagyobb önmagánál")
  - Osztja: $a|a$; (Vagyis: Minden egész osztója önmagának)

  Nem reflexív reláció:
  - Egyenesek közt a „merőleges", mert egy egyenes nem merőleges önmagára…
  - „kisebb": egy szám $a<a$ ☠,
  - „apja" egy ember nem apja önmagának…
- szimmetrikus: $\underline{a\rho b} \Rightarrow \underline{b\rho a}$
  Szimmetrikus reláció, kapcsolat:
  - merőlegesség: $e\perp f \Rightarrow f\perp e$
  - párhuzamosság: $e\parallel f \Rightarrow f\parallel e$
  - „testvér": Péter *testvér* Sárának $\Rightarrow$ Sára *testvér* Péternek

  Nem szimmetrikus:
  - $a|b \not\Rightarrow b|a$;
  - $a<b \not\Rightarrow b<a$;
  - Péter „apja" Dénesnek $\not\Rightarrow$ Dénes „apja" Péternek
- tranzitív: $(a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c$
  Tranzitív reláció, kapcsolat:
  - párhuzamosság: $(e\parallel f \wedge f\parallel g) \Rightarrow e\parallel g$
  - Kisebb egyenlő: $(a\leq b \wedge b\leq c) \Rightarrow a\leq c$
  - „Osztja": $(a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$
  - „Testvér": (Péter *testvér* Sárának $\wedge$ Sára *testvér* Ubulnak) $\Rightarrow$ Péter *testvér* Ubulnak

  Nem tranzitív: merőlegesség $(e\perp f \wedge f\perp g) \not\Rightarrow e\perp g$

DEF.: AZ EKVIVALENCIA RELÁCIÓ

Ha egy reláció szimmetrikus, reflexív és tranzitív, akkor az a reláció ekvivalencia reláció.

Mérleghintán: nem számít, hogy fekete, fehér, sárga vagy mesztic kisgyerek ül a mérleghinta egyik végében, csak az számít, hogy ugyanakkora tömegű legyen mint a másik. A játék szempontjából bárkivel helyettesíthető bárki.

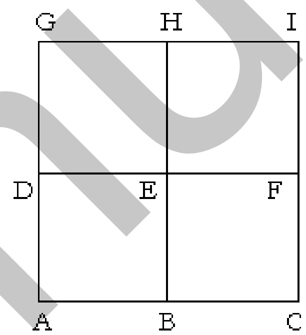
Pénz esetében bizonyos tulajdonság ekvivalens, bizonyos tulajdonság nem.
A bevásárlókocsinak nem ekvivalens 2 db 50 Ft-os és egy 100 Ft-os, pedig az értékük ugyanannyi.
De a boltos számára 2 db 50 Ft-os ekvivalens egy 100 Ft-ossal…

Két 100 Ft-os pedig nagyon sok tekintetben ekvivalens, de ha pl. a legyártási évüket nézzük, akkor máris több osztályba sorolhatók: a 2019-ben, v. a 2020-ban gyártottak.

Ha jól megnézzük, bizonyos szempontból a következő három számpár is ekvivalens:
(5;2)=(25;10)=(250;100))=(35;14) Milyen esetben?

VI/4) Vektorok „azonossága”

a) Két vektor „azonos”, egyenlő, ekvivalens, vagyis azonos vektorosztályba tartozik, ha:
- egyállású
- azonos irányítású
- egyenlő hosszú



Adj meg az $\overline{AE}$ vektorral egyenlő vektorokat!

Vigyázat: fizikában nem mindegy, hogy egy vektornak hol van a „támadáspontja” a testen, mert előidézhet forgó v. haladó mozgást, tehát a fizikában bizonyos esetekben, bizonyos tulajdonságukat tekintve a $\overrightarrow{BH}$ és az $\overrightarrow{AG}$ vektor!

A vektorok egyenlősége **ekvivalencia** *reláció*.
Mert:

szimmetrikus: $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}$
reflexív $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}$
tranzitív ($\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{c}}$) $\Rightarrow \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{c}}$

Azok a vektorok, amelyek egymással egyenlők, egy vektorosztályba tartoznak, vektoregyenlőséget tekintve ugyanabba az ekvivalencia osztályba.

$<\overset{\rightarrow}{AD}>$: Az $\overset{\rightarrow}{AD}$ vektor által reprezentált vektorosztály. Jelen esetben néhány elemét látjuk:
$<\overrightarrow{AD}> \supset \left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BE}; \overrightarrow{FI} \quad stb.\right\}$
Bármely elem reprezentáns elem: a többit reprezentálja.
Tehát nem „fölrajzolok egy vektort”, hanem a „kiszínezek” egyet pl. a táblán.
Az egyik **<u>képviselőt</u>**. De végtelen sok van **<u>belőle</u>**. (Sic: egyes számban…)

b) Analógia a számokhoz

(i) A **0** vektor – „Nullvektor”

A számok között létezik a „nulla”. Amit bármihez hozzáadva vagy kivonva nem változik az eredeti szám. Mégis „van”.

A nullvektor

Hossza: 0

állása, irányítása, vagyis iránya: tetszőleges

(Ez azt jelenti, hogy bármivel párhuzamos, vagy épp bármire merőleges)

Ő vektor!!!!

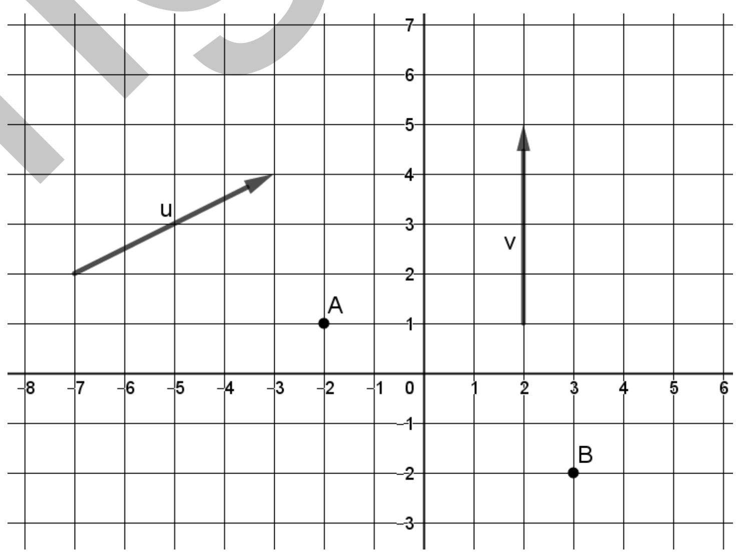
0 = $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{ZZ}$

A síkban a pont ilyen, a számok között a 0.

(ii) Definíció: egy **vektor ellentett vektora**: a vele egyenlő hosszú, egyállású, fordított irányítású vektor: **a** $\rightarrow$ –**a**.

Rajzolj fel egy vektort, és az ellentett vektorát!

VI/5) Pontok és vektorok a koordináta-rendszerben



Origó: Q(0;0)

Pontok koordinátával:
A(–2;1) B(3;–2)

Rajzold be:
C(1;–2) D(3;2) E(–5;2) F(0;–1)
G(–4;0) H(0;4)

Rajzold fel a $\overrightarrow{AB}$ vektort.

Rajzold fel a $\overrightarrow{DC}$ vektor.

Rajzold fel az $\overrightarrow{EF}$ vektor.

Mi a köze $\overrightarrow{AB}$ vektornak az $\overrightarrow{EF}$ vektorhoz?

Rajzolj G-ből a $\overrightarrow{CD}$ -vel egyenlő vektort!

Rajzolj G-ből a $\overrightarrow{CD}$ -vel egyenlő vektort!

VI/6) Műveletek vektorokkal

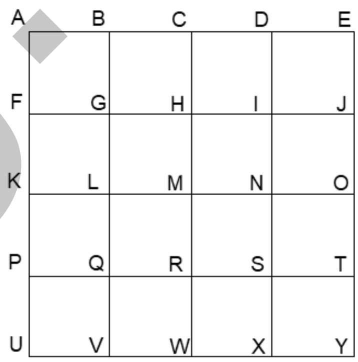
a) Összeg: mozgással érdemes szemlélni

(i) Utasítás: „Menj először É-nak 2 m-t, majd DK-nek 3 m-t.”
Vegyük észre, hogy ez két vektor megadása, amelyeket először teljesen függetlenül felvehetek – hiszen bárkinek mondhatom, és aki hallja, úgy teszi.
Mégis egyértelmű, hogy a vektorokat egymás után kell felmérni, úgymond egymáshoz illesztve!

Rajzold fel, hogy ha az „A” pontban állsz, akkor hová jutsz!

Ha A-t B-be, majd B-ből H-ba tolom,
akkor az azt jelenti, hogy az A-t H-ba tolom.

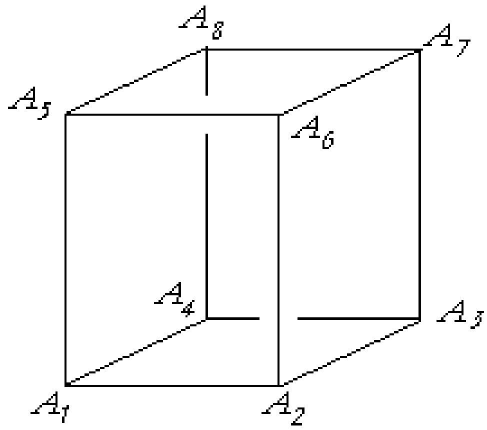
Vagyis legyen: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}$
Rajzold fel a két vektor, és az összegvektor!



$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MW} =$
Rajzold fel a két vektor, és az összegvektor!

A millió dolláros kérdés: mi lehet az
$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DM} =$

Nézzük mindezt egy kocka élein – ahol a vektorok „nincsenek egy síkban” (miért van ez idézőjelbe téve?)



$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_7} =$

$\overrightarrow{A_5A_7} + \overrightarrow{A_8A_4} =$

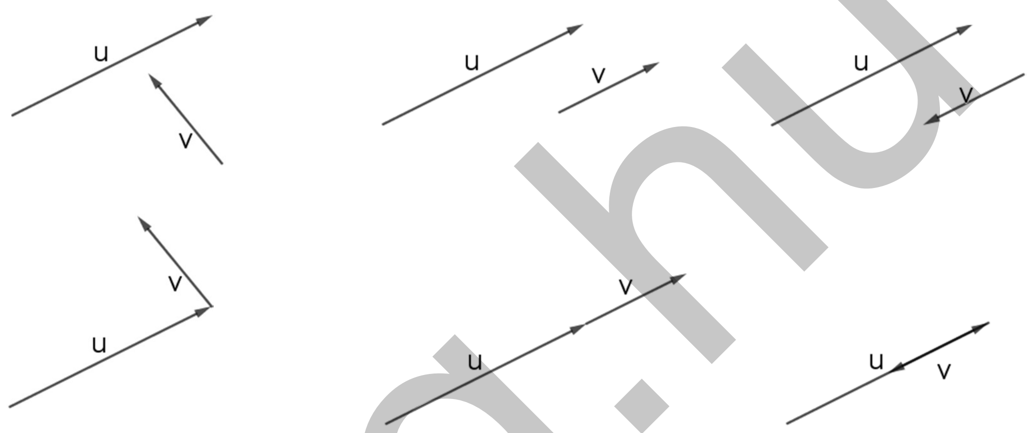
$\overrightarrow{A_1A_5} + \overrightarrow{A_7A_8} =$

$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_8} + \overrightarrow{A_8A_3} + \overrightarrow{A_3A_1} =$

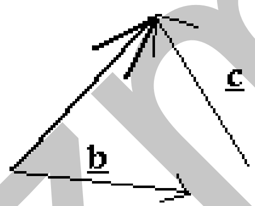
$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_4A_8} + \overrightarrow{A_5A_8} + \overrightarrow{A_7A_1} =$

(ii) **Definíció**: **két vektor összege**. Az **a** és **b** vektor összege egy vektor, melyet úgy kapok meg, hogy az **a** végpontjából felmérem a **b** vektort, és az összegvektor az **a** kezdőpontjából a **b** végpontjába mutat.

Vagyis egymáshoz csatlakoztatva sorban felmérem őket, és az összegvektor a keletkezett háromszög (ha nem párhuzamosak) még meg nem rajzolt éle mely a kezdőpontból a végpontba mutat.
Ha párhuzamosak, akkor lásd ábra.
PIROSSAL rajzold meg az összegvektorokat (**u**+**v**)! (Javítsd ki a nevüket aláhúzással!) Az összegzéseket a két vektor alatt látod.

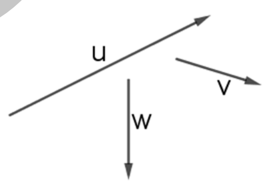


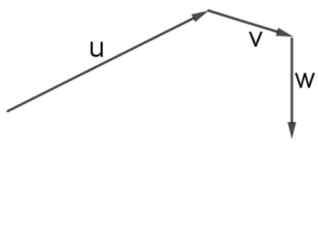
Hibás összeadás: miért?
Mert innentől kezdve mindenki azt mond, amit akar.



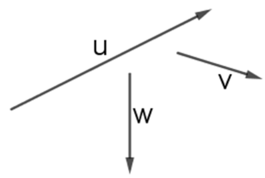
Láncszabály: 3 vagy több vektort úgy adok össze, hogy a „végponthoz a kezdőpontot" illesztve felméregetem őket, és az összegvektor a keletkezett sokszög hiányzó éle, az első kezdőpontból az utolsó végpontba mutatva.

u+ **v**+ **w**



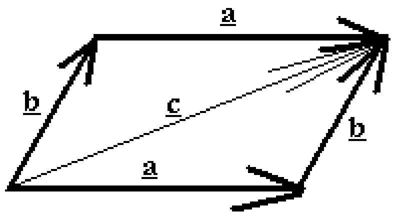


Most ebben a sorrendben add össze:
w+ **v**+**u**



(iii) Tulajdonságok

tanm_geometria_B_6_4_a_iii__paralelogramma_szabaly.ggb



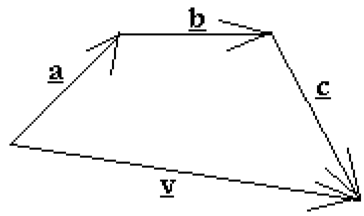
Nézzünk két összeadandó vektort:
<u>**a**</u> és <u>**b**</u>.
A közös pontból indított két vektor egy paralelogrammát feszít ki, amelynek a másik két oldalvektora megfelelően irányítva megegyezik a közös pontból indított vektorokkal. Vagyis az <u>**a**</u>+<u>**b**</u>=<u>**b**</u>+<u>**a**</u>, hiszen mindkettő a közös pontból a szemközti csúcsba mutató átlóvektor.
Az eredmény független a képviselők kiválasztásától: ez a háromszögek egybevágósági tételén alapszik.

A paralelogramma-szabály: Két nem párhuzamos vektor összege az általuk kifeszített paralelogramma közös pontból indított átlóvektora.

Szerkeszd meg paralelogramma szabállyal a következő vektorokat:

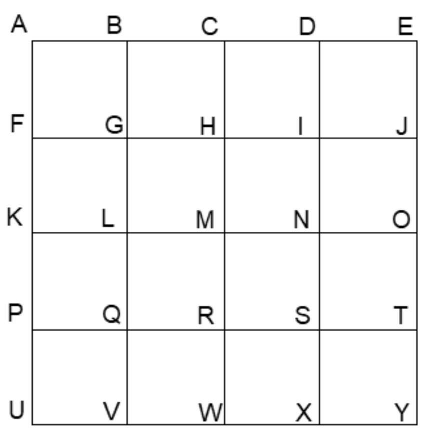
A vektorok összeadása:

- **Kommutatív**: felcserélhető a két tag (lásd paralelogramma szabály).
  <u>**a**</u> + <u>**b**</u> = <u>**b**</u> + <u>**a**</u>
- **Asszociatív**: csoportosíthatók a tagok
  <u>**a**</u>+(<u>**b**</u>+<u>**c**</u>)=(<u>**a**</u>+<u>**b**</u>)+<u>**c**</u> = <u>**v**</u>



Az összegve $\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LD}=C$ tort szokás a tagok **eredőjének** is nevezni.

Egészítsd ki:



$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QA}=A$ $\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LD}=C$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QA}=A$

$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{CG}=H$ $\overrightarrow{GV}+\overrightarrow{VQ}=G$

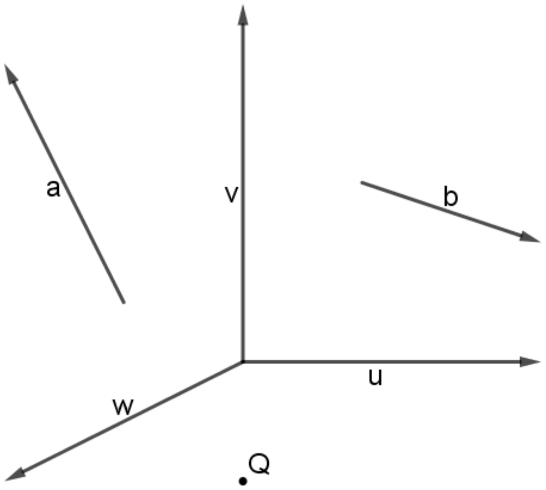
$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{CG}=H$ $\overrightarrow{GV}+\overrightarrow{VQ}=G$

$\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{SD}=X$ $\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{CY}=W$

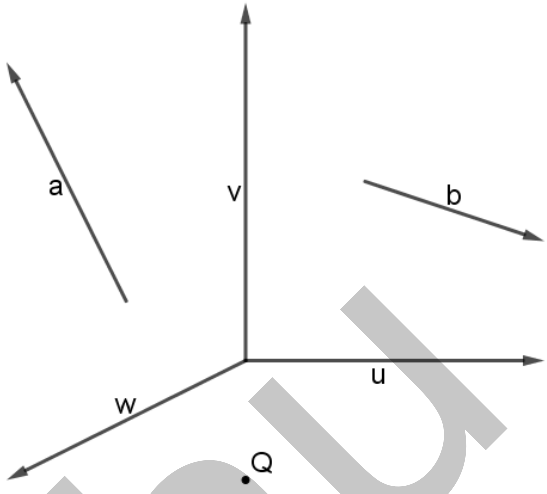
$\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{GS}=K$ $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MQ}=C$

Szerkeszd meg a következő összegvektorokat Q-ból!

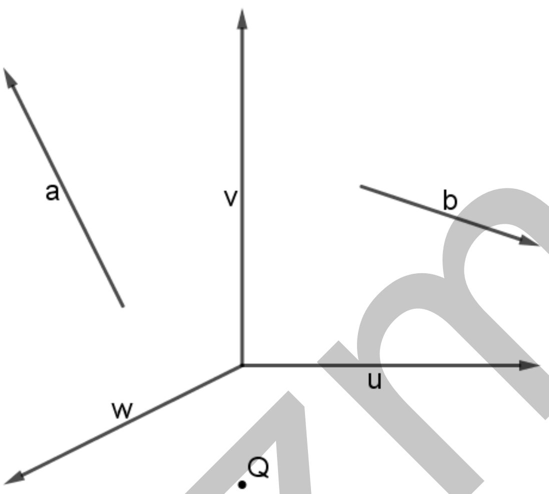
u + **v**



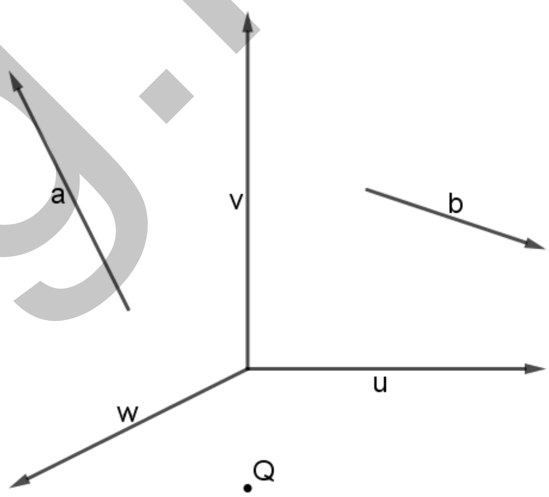
v + **w**



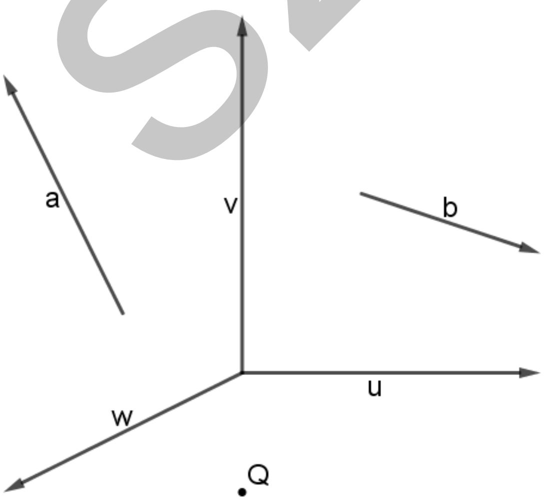
a + **u**



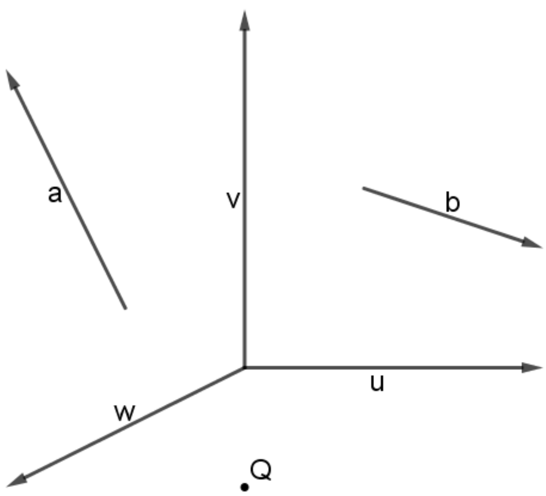
v + **b**



a + **b** + **u**



u + **b** + **w**



b) Különbség

(i) Bevezetés

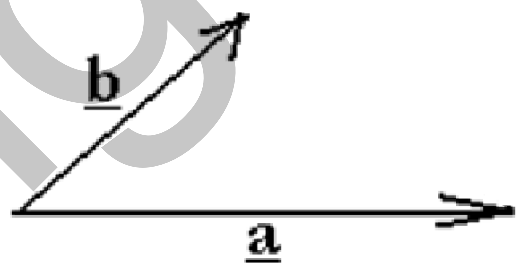
Mennyi a 20 – 8? Nyilván 12.
Mennyit kell adni az 8-hoz, hogy 20 legyen? Válasz: 12-őt.
Hogy számoltuk ki? Egyszerűen ki kell vonni a 20-ból az 8-at.

Ha azt kérdezem, hogy mondjuk az üres villamoskocsiba 7-en szálltak föl.
Hánynak kell még fölszállnia, hogy 10-en legyenek?
Válasz: 3-nak.
Vegyük észre: senki sem vonta ki 10-ből a 7-et!!!
Azt nézte, hogy mennyivel kell kiegészíteni a 7-et, hogy 10 legyen.

Pedig: ez az a szám, amit úgy kapok meg, hogy 10–7=3.
Mondóka: 10–7 az a szám, amelyet a 7-hez kell adni, hogy 10 legyen.

(ii) Szerkesztése
tanm_geometria_B_6_4_b__kulonbseg.ggb

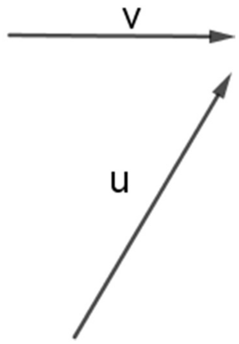
Mi is a **b**–**a** vektor?
Úgy kell kérdezni: „Mennyit kell adni az **a**-hoz, hogy **b** legyen?”
„Az a vektor, amelyet **a**-hoz kell adni, hogy **b** legyen.”
Rajzoljuk fel azt a **k** vektort, amelyet az **a**-hoz adva az összeg éppen **b** lesz.
Látható: **k**-t.



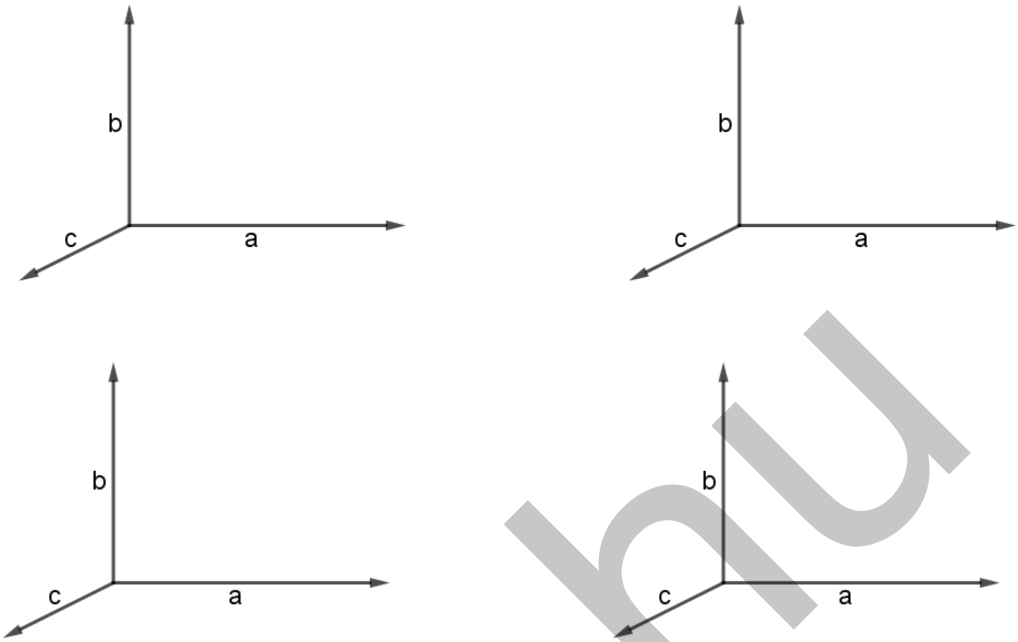
Vagyis, ha egy pontból indítom őket, akkor jól látom, hogy mennyit kell adni az **a** vektorhoz, hogy **b** legyen: **c**-t. Vagyis az **a**–**b**=**c**.

Definíció:
a mínusz **b** vektor az a vektor, melyet **b** -hez kell adni, hogy **a** -t kapjunk.

„Módszer két vektor különbségéhez”:
Egy pontból indítjuk a két vektort, és a különbségvektor a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutat.

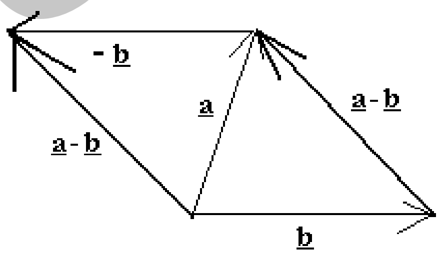


Gyakoroljuk:
Adott **a**, **b**, **c**. Szerkeszd meg: **a–b**, **c**–**a**, **b**–(**a**+**c**), **a**+(**b**–**c**) vektorokat!



(iii) Ellentettel

9–5=? 9–5 az a szám, amit az 5-höz kell adni, hogy 9-et kapjunk
v. 9–5 az a szám, amit úgy kapok meg, hogy a 9-hez hozzáadom az 5 ellentettjét.



Definíció:
Egyik: –**b**:=**b** ellentettje.
a–**b**:=**a**+(–**b**)
Vagyis az **a** végpontjából indítjuk a –**b**-t.

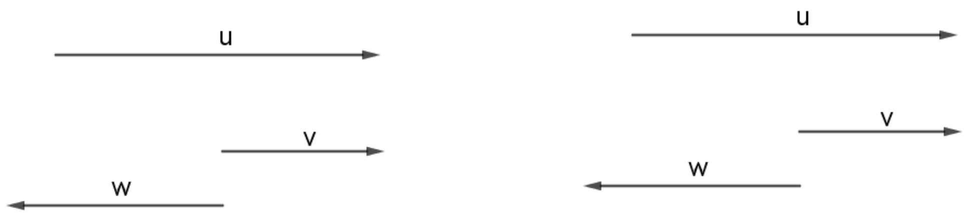
Másik: **a**–**b**:= az vektor, amelyet **b**-hez kell adni, hogy **a**-t kapjuk.

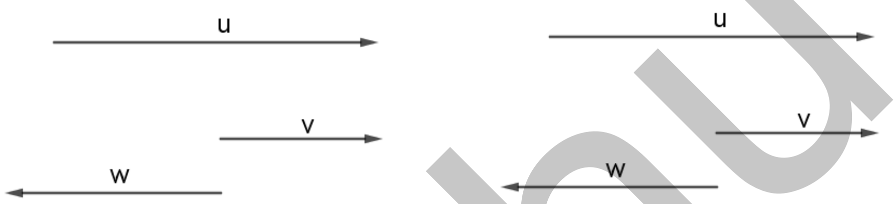
A két definíció ekvivalenciája - módszer a szerkesztéshez

Tudjuk, hogy ha egy pontból indítjuk a két vektort, akkor a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutat a különbségvektor.
Egészítsük ki az ábrát az **a** és **b** által kifeszített paralelogrammával. Ekkor látható, hogy az egyik átlóvektor az összegvektor, a másik a különbség. Húzzuk meg a (két) különbségvektort azonos színnel!

Emlékeztető: párhuzamos vektorok összeadása, kivonása

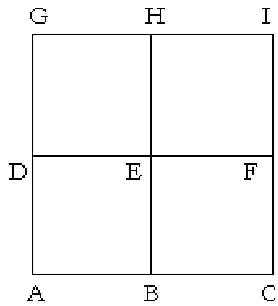
<u>**u**</u>+<u>**v**</u> <u>**u**</u>+<u>**w**</u> <u>**w**</u>–<u>**v**</u> <u>**v**</u>–<u>**u**</u>





Rövid gyakorlás

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} =$ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} =$ $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{EH} =$

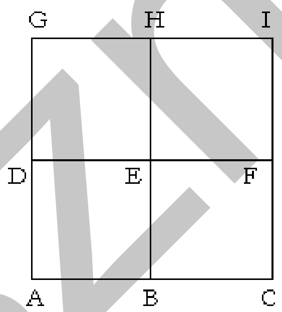


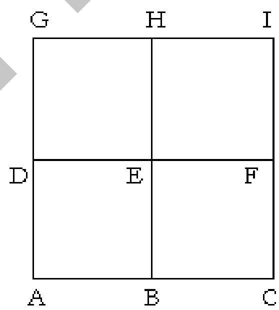
DE vegyük észre: $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE} =$

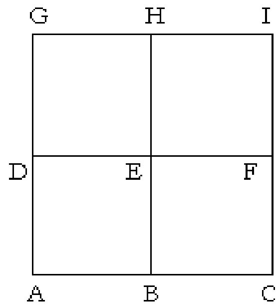
És ekkor már akár nem is kellene az ábra…

$\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{EF} =$ $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CF} =$ $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EB} =$

$\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{BE} =$ $\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{BE} =$ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DF} =$







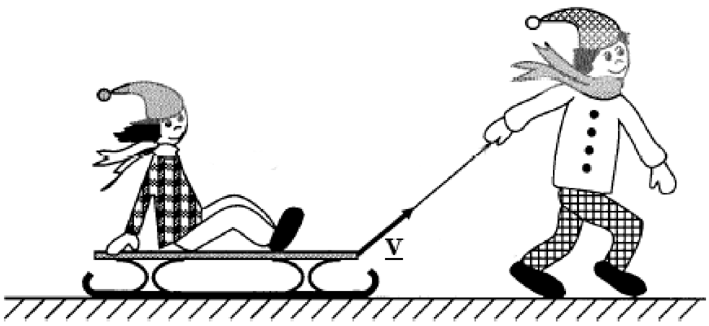
(iv) Tulajdonságai

- Nem kommutatív, nem asszociatív!

Vigyázat: műveleti sorrend:
Ahogy a számok kivonásánál, úgy itt is:
<u>**a**</u>–<u>**b**</u>–<u>**c**</u> ≠ <u>**a**</u>–(<u>**b**</u>–<u>**c**</u>)
Mutassuk is meg!

c) Vektor **skalárral** (valós számmal) történő szorzása

Rajzold be pirossal azt a vektort, hogyha a fiú kétszer olyan erősen húzza a szánkót!



(i) Definíció: $\lambda \in \mathbf{R}$. Ekkkkor:

$\lambda \cdot \underline{\mathbf{a}}$ = az a **vektor**, mely

hossza:

állása:

irányítása:

$\lambda > 0 \Rightarrow$

$\lambda = 0 \Rightarrow$

$\lambda < 0 \Rightarrow$

Például a $-3 \cdot \underline{\mathbf{v}}$ vektor

Hossza:

Állása:

Irányítása:

(ii) Tulajdonságai

A disztributivitás:

A valós számok <u>szorzása az összeadásra</u> nézve disztributív (széttagolható), (vagyis „összeget szorzunk…")

azaz ha valós számok összegét kell egy valós számmal szorozni, akkor az eredmény nem változik, ha az összeadás eredményét szorozzuk a számmal, vagy pedig az összeg tagjait külön-külön szorozzuk a valós számmal, majd a szorzatok eredményét adjuk össze: $3(4+5)=3\cdot4+3\cdot5$

Tehát az összeg tagonként is szorozható.

Legyen a, b és c három tetszőleges valós szám. A szorzás disztributivitása az összeadásra nézve tehát azt jelenti, hogy $a(b+c)=ab+ac$

Például: $15\cdot(8+2)=15\cdot8+15\cdot2$.

Vagyis: „feltagoltuk a zárójelet: először a 8-at szoroztuk 15-tel, majd a 2-őt 15-tel, és utána adtuk össze.

Tehát a szorzás az összeget feltagolva részletenként is elvégezhető.

Fordítva nem igaz: $15+(8\cdot2)\neq(15+8)(15+2)$

(Az összeadás a szorzásra nézve nem széttagolható…)

A vektorok skalárra történő szorzásának tulajdonságai:
Asszociatív: $\alpha(\beta\underline{\mathbf{a}})=\beta(\alpha\underline{\mathbf{a}})=\alpha\beta\underline{\mathbf{a}}$ pl.: $2(3\underline{\mathbf{a}})=3(2\underline{\mathbf{a}})=6\underline{\mathbf{a}}$

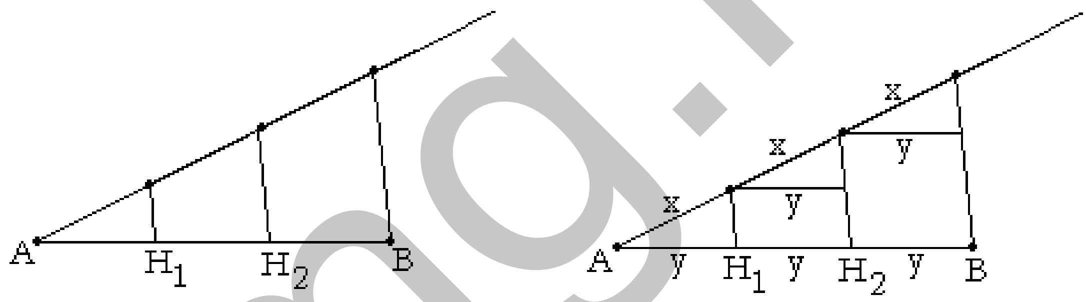
Állítás: a vektorok skalárral történő szorzása a vektorok összeadására nézve disztributív (széttagolható), vagyis:
$\alpha\underline{\mathbf{a}}+\beta\underline{\mathbf{a}}=(\alpha+\beta)\underline{\mathbf{a}}$; $\alpha(\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}})=\alpha\underline{\mathbf{a}}+\alpha\underline{\mathbf{b}}$
Például: $5\underline{\mathbf{a}}-3{,}5\underline{\mathbf{a}}=(5-3{,}5)\underline{\mathbf{a}}=1{,}5\underline{\mathbf{a}}$
$12\underline{\mathbf{a}}+12\underline{\mathbf{b}}=12(\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}})$
$12\underline{\mathbf{a}}+20\underline{\mathbf{b}}=4(3\underline{\mathbf{a}}+5\underline{\mathbf{b}})$

Vagyis pontosan úgy „működnek” mint a változók és a valós számok.

d) Szakaszok darabolása

Pl.: szakasz harmadolása.

Vegyük észre, hogy egybevágó háromszögek és paralelogrammák születnek, vagyis ha fent egyenlő szakaszokat (x x x) mértünk fel, és párhuzamosokkal szelünk, akkor lent is ugyanolyan hosszú (y y y) szakaszok születnek.



Oszd fel a következő szakaszt 5 egyforma részre:

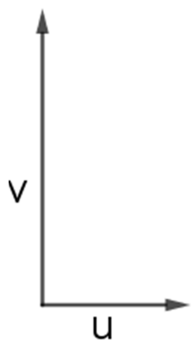
e) Vektorok lineáris kombinációja

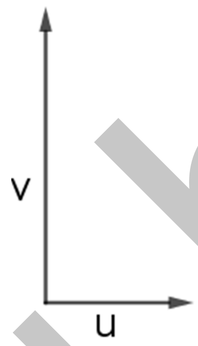
a és **b** vektor lineáris kombinációján a következő összeget értjük:
$\alpha\underline{\mathbf{a}}+\beta\underline{\mathbf{b}}$, ahol α, $\beta \in \mathbf{R}$.
Pl.: $\underline{\mathbf{a}}-3\underline{\mathbf{b}}$; vagy $-\frac{1}{3}\underline{\mathbf{a}}-2\underline{\mathbf{b}}$; vagy $1{,}5\underline{\mathbf{b}}-7\underline{\mathbf{a}}$;
(Az egyik „valahányszorosához” hozzáadjuk a másik „valahányszorosát”)
A „triviális” lineáris kombináció: amikor $\alpha=0$ és $\beta=0$.

Gyakorlás

Adott két vektor, amelyeknek csak a hosszát tudjuk: |**a**|=2 cm és |**b**|=2 cm. Tudjuk, hogy |**a**+**b**|=3. Szerkesszük meg ezt a két vektort.

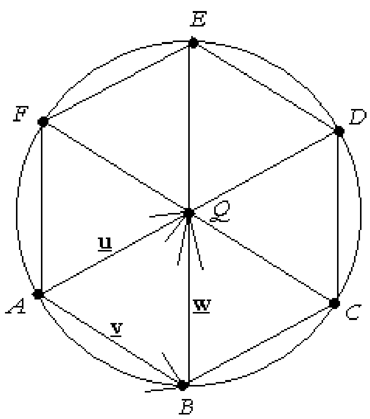
Adott az u és a v vektor. Szerkeszd meg: **a** = 2**u**–1/2· **v**; b=3**u**+**v**/2





VI/7) Gyakorlás – műveletek, lineáris kombinácó

a) Lineáris kombináció: Állítsuk elő **u** és **v**-ből:



$\overrightarrow{AD} =$

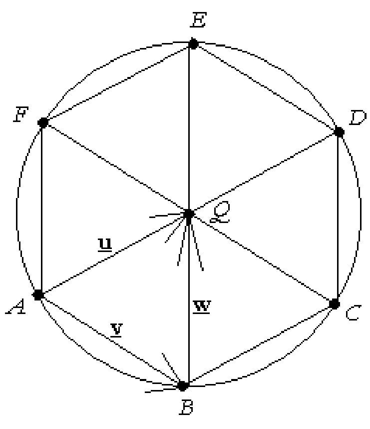
$\overrightarrow{FC} =$

$\overrightarrow{DF} =$

$\overrightarrow{EC} =$

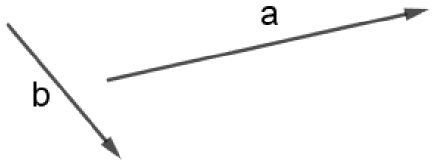
$\overrightarrow{BD} =$

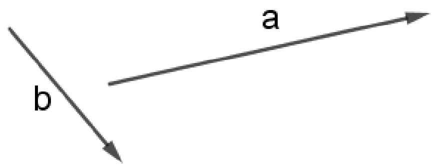
Majd ugyanezeket **v** és **w**-ből.



b) Adott az **a** és a **b** vektor. Szerkesszük meg két vektor következő lineáris kombinációit:

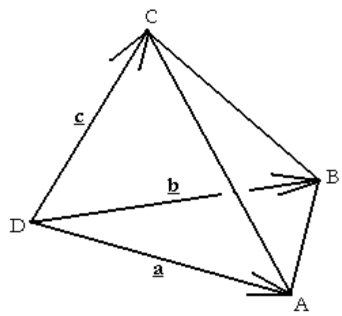
$\underline{\mathbf{a}}-2\underline{\mathbf{b}}$ illetve $-\frac{2}{3}\underline{\mathbf{a}}+\underline{\mathbf{b}}$ (írd is rájuk a lineáris kombinációt)





c) Rajzolj 3 olyan vektort, amelyek összege **0**. Majd 4-et!

d) Tetraéder:



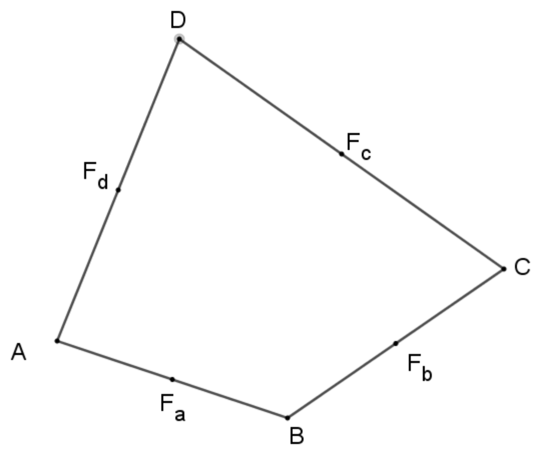
a,**b**,**c**-ből:

$\overrightarrow{AC}=$ $\overrightarrow{BA}=$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$

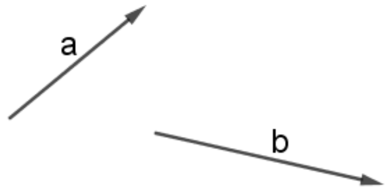
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=$

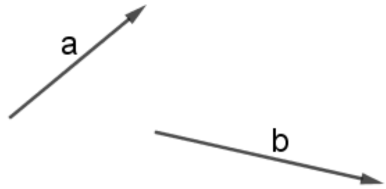
e) Egy ABCD négyszög oldalvektorai: **b**= $\overrightarrow{AB}$; **d**= $\overrightarrow{AD}$, **c**= $\overrightarrow{DC}$.
Állítsuk ezekből elő az átlóvektorokat majd a középvonal-vektorokat! Állítsuk elő két-két szomszédos oldal oldalfelező pontjai által meghatározott vektorokat! Mit veszünk észre?

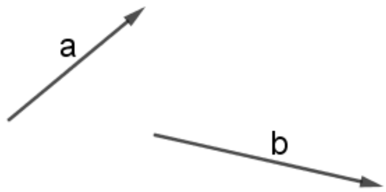


f) Adott **a** és **b**. Szerkeszd meg a következő vektorokat:

$\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}+\frac{\underline{a}-\underline{b}}{2}$ $\qquad 3\underline{a}-\frac{\underline{b}}{2}$ $\qquad -6\left(\frac{\underline{a}}{2}-\frac{\underline{b}}{2}\right)$

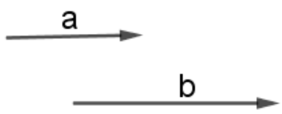




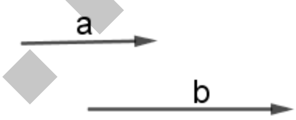


g) Párhuzamos vektorok összege, különbsége:

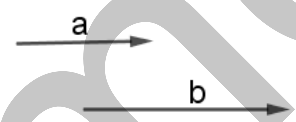
2**a**+**b**



–2**a**–2**b**



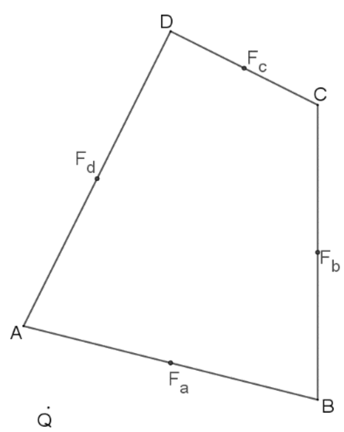
a–2**b**;



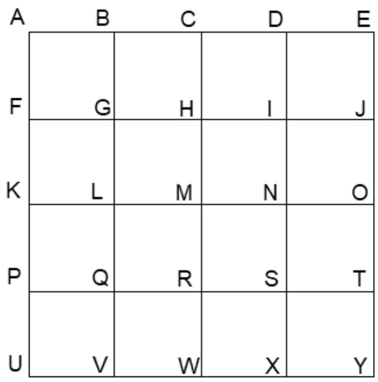
VI/8) Felezőpont és egyéb gyakorlás

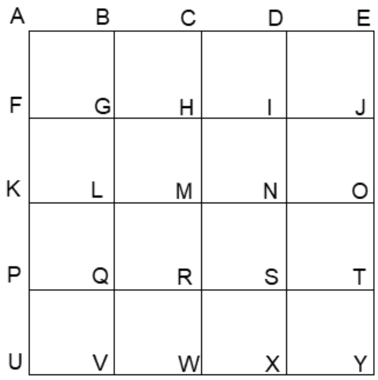
a) Szakasz felezőpontjába mutató vektor

b) Bizonyítsuk be, hogy egy Q pontból egy négyszög négy csúcsába mutató vektorok összege = a felezőpontokba mutató vektorok összegével!



c) Gyakorlás (megadom az eredményvektor kezdőpontját)





$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{LN}=P$

$\overrightarrow{HR}-\overrightarrow{LN}=\mathrm{Q}$

$\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BD}=\mathrm{Q}$

$\overrightarrow{MS}-\overrightarrow{NS}=\mathrm{H}$

$\overrightarrow{WL}+\overrightarrow{LH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AW}=\mathrm{T}$

VI/9) Vektorok koordinátákkal

a) Vektorok koordinátái

Vegyük észre, hogy bármely vektort (egyértelműn!) le tudok gyártani az ***i*** és **j** vektorokból! Írjuk mellé egyszerűbben a legyártás módszerét egy zárójeles kifejezéssel!

v= ⇔ **v**(;)

u= ⇔ **u**(;)

a= ⇔ **a**(;)

d=

w=

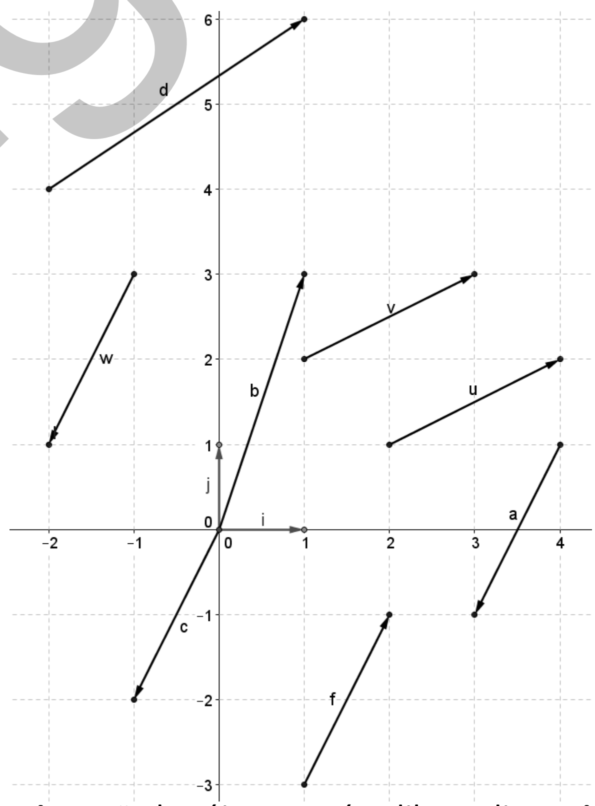
b=

c=

f=

HIBA: **a**=(–1;–2)

Nem írunk egyenlőségjelet!



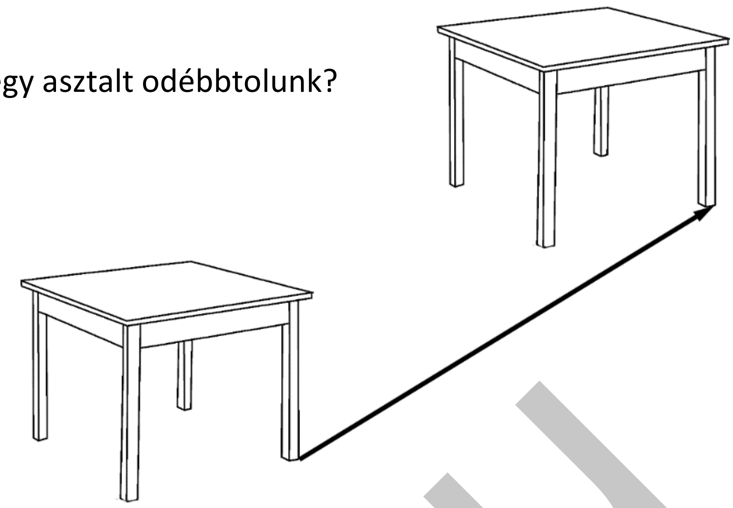
Legyen a vektor 1. koordinátája az **i** együtthatója, a második pedig a **j** együtthatója.

Vegyük észre: csak azok a vektorok egyeznek meg, melyek koordinátái ugyanazok, és amelyek koordinátái ugyanazok, azok egyenlők!

VII. A **Párhuzamos eltolás** (egybevágósági transzformáció)

VII/1) Definíciója és tulajdonságai

a) Mit állapíthatunk meg, ha egy asztalt odébbtolunk?



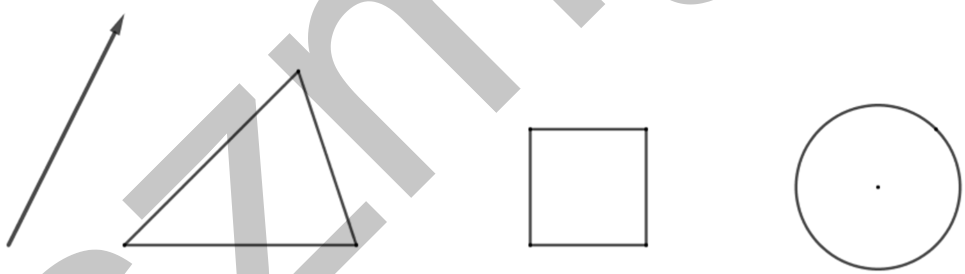
Definíció: „Eltolás”
adott $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$. Ekkor:

$E^{\underline{\mathbf{v}}}(\ )$: $S \to S$; $P \mapsto P'$

ahol: $\overrightarrow{PP'} = \underline{\mathbf{v}}$.

(Ha $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$, akkor identitás, de ezzel nem foglalkozunk)

b) Példák rá:
tanm_geometria_B_7_2_eltolas_bevezetes.ggb
Először kézileg, szerkesztés nélkül: Toljuk el az alakzatokat a megadott vektorral!



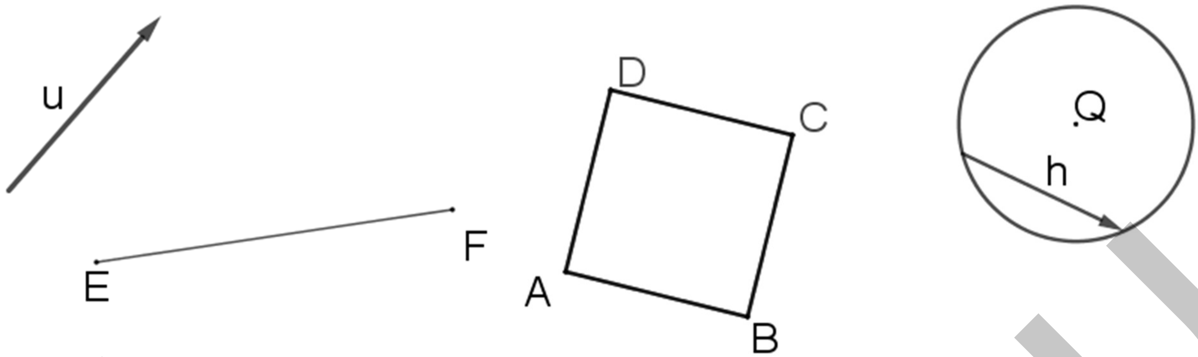
c) Tulajdonságok (egybevágósági transzformáció!)

- **Illeszkedéstartó**
- **Távolságtartó** $\Rightarrow$ **szögtartó** (később bizonyítjuk)
- **Nem szimmetrikus**
- **A körüljárást megtartja (nem változtatja meg)**
- **Kölcsönösen egyértelmű**, vagyis **injektív**
  Az injektív függvény definíciója jelekkel:

- **Fixpont, fix egyenes, invariáns egyenes**

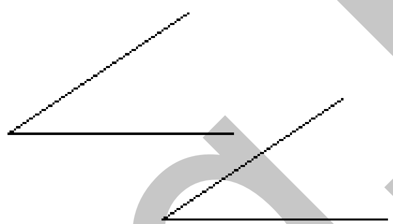
VII/2) Végezzünk eltolást

a) EF szakaszt – vagyis a két végpontját… (illetve egy rá illeszkedő e egyenest)
b) Négyzetet az AC átlóvektor felével
c) Kört egy húrral

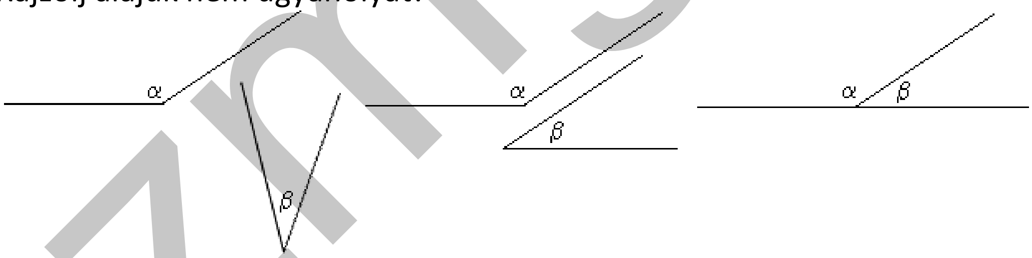


VII/3) A párhuzamos szárú szögek – és a korábbi szögpárok

- Egyállású szögek azok, melyek eltolással egymásba vihetők
  Száruk párhuzamos és ugyanabba az irányba mutat.

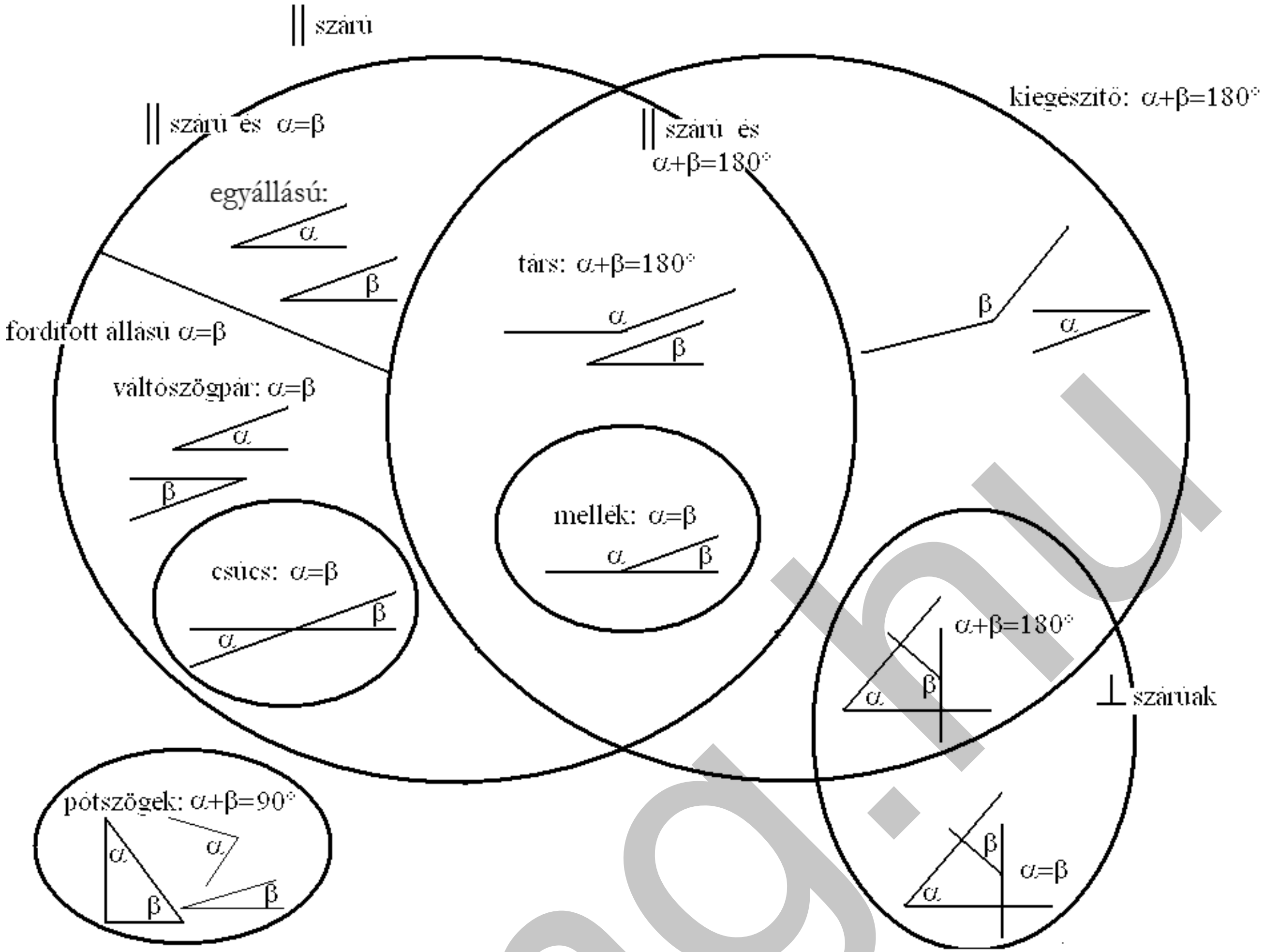


- Kiegészítő szögek → Társ szögek → Mellékszögek
  Rajzolj alájuk nem ugyanolyat!

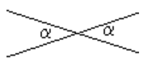


- Fordított állású szögek: Váltószögek → csúcsszögek (Láttuk)
  Rajzoljunk ilyet!

VII/4) Az ismert szögpárok összefoglalása

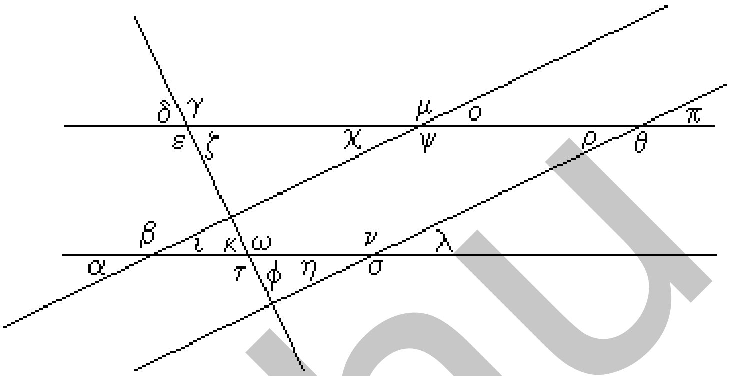


Rajzold be őket a táblázatba

Pótszög α+β=90°	Fordított állású α=β	Egyállású α=β	⊥ szárú		Kiegészítő α+β=180°
	Váltószög - kp-os tükrözés	Eltolás	⊥ szárú 90° forgatás a=b	⊥ szárú kieg.: mellékszög forgatása 90°-kal α+β=180°	általános
↓	↓				↓
Derékszögű Δ-ek két hegyesszöge	Csúcsszög pár: 				Társszög ‖-os szárú
					↓
					Mellékszög

VII/5) Szögpárok gyakorlása - keressünk szögpárokat

α (alfa), β (béta), γ (gamma), δ (delta), ε (epszilon), ζ (zéta),
η (éta), ϑ (théta), ι (ióta), κ (kappa), λ (lambda), μ (mű), ν (nű), ξ (kszí),
ο (omikron), π (pí), ρ (ró), σ (szigma), τ (tau), υ (üpszilon), φ (fí), χ (khí), ψ (pszí), ω (ómega)



α és ι :

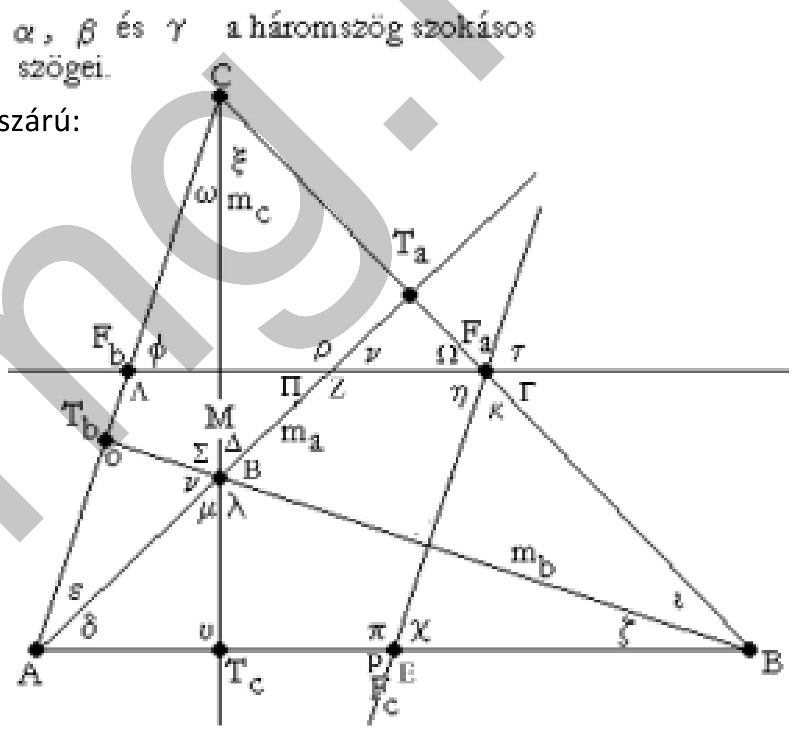
χ és ξ :

α és π :

ψ és ρ :

ο és η:

ι és π:



ζ -val = merőleges szárú:

α -val kiegészítő merőleges szárú:

ϕ -val egyállású:

α váltószöge:

ξ egyenlő merőleges szárú:

χ mellékszöge:

λ pótszögpárja:

ν csúcsszögpárja:

τ -val egyállású:

γ-ra meről. sz. egyenlő:

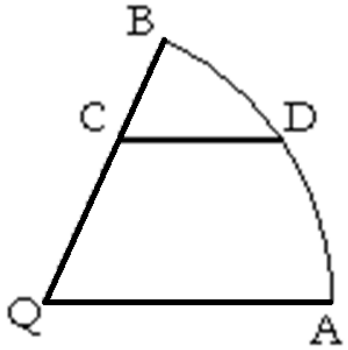
λ –val kiegészítő

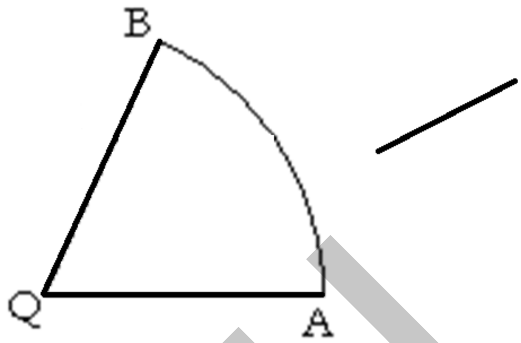
VII/6) Alappéldák

a) Az eltolások kompozíciója és a vektor műveletek:
Vegyük észre, hogy
$E^{\underline{v}}(\ )\circ E^{\underline{u}}(\ ) \equiv E^{\underline{u}+\underline{v}}(\ ) \equiv E^{\underline{u}}(\ )\circ E^{\underline{v}}(\ )$
$E^{\underline{v}}(E^{\underline{u}}(\ ))\equiv E^{\underline{u}+\underline{v}}(\ ) \equiv E^{\underline{u}}(E^{\underline{v}}(\ ))$

Vagyis: ha eltolást végzünk először egy **u** vektorral, majd utána egy **v** vektorral, akkor az olyan, mintha egyetlen eltolást végeztünk volna: (**u**+**v**) vektorral.

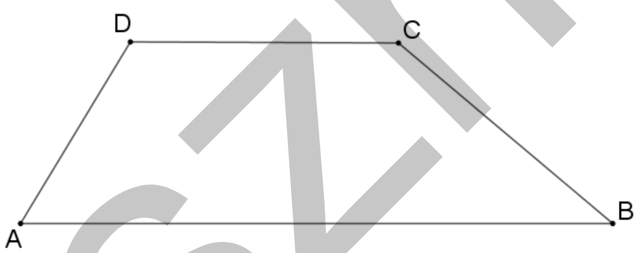
b) Adott egy d szakasz és egy BQA körcikk.
Szerkesszünk QA sugárral párhuzamos, *d* hosszúságú szakaszt, melynek egyik vége aköríven, a másik a QB sugáron van.
”Mintha már kész lenne” ábra „Vakábra”

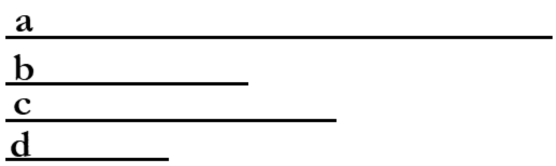




c) Adott egy trapézból: a, b, c, d. Szerkesztendő a trapéz!

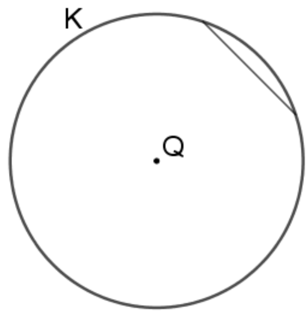
”Mintha már kész lenne” ábra „Vakábra”



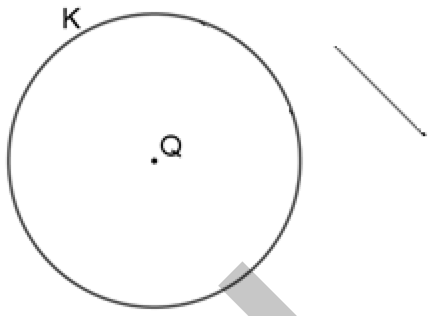


d) Adott egy *d* szakasz, és egy kör. Szerkesszünk a körbe egy *d* hosszúságú, vele párhuzamos húrt.

”Mintha már kész lenne” ábra



„Vakábra”

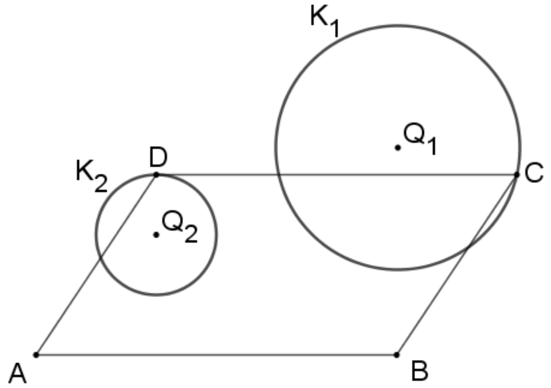


VII/7) Gyakorlópéldák

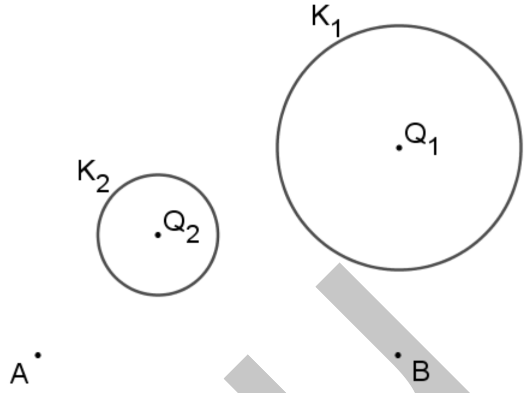
a) * „Legrövidebb utas” példa

b) Adott k_1 és k_2 kör, illetve A és B pontok. Kell az a paralelogramma, amelynek két csúcsa A és B, $C \in k_1$ és $D \in k_2$.

”Mintha már kész lenne” ábra



„Vakábra”



VII/8) Két párhuzamos tengelyre történő tükrözés

VIII. Transzformációk ismétlése

VIII/1) A négy transzformációnk közös jelzője: „egybevágósági transzformáció”

a) Sorold föl a szimmetrikus trafókat

b) Mely transzformációknak van invariáns korlátos alakzata?

c) Lehet-e 13 különböző tengelyre való tükrözés egymásutánja identitás?

d) Létezik-e középpontosan szimmetrikus háromszög?

e) Van-e olyan alakzat, amelynek pontosan 3 szimmetria tengelye van?

VIII/2) Szimmetrikus síkidomok összegyűjtése

Rajzolj a megfelelőn szimmetrikus alakzatot – v. kicsiben rajzold le

Tengelyesen	Középpontosan	Forgásszimmetrikus

VIII/3) Transzformációk szorzata, kompozíciója

a) Def.: Két (vagy több) geometriai transzformációnak az egymás utáni elvégzését a két (vagy több) transzformáció szorzatának, kompozíciójának nevezzük.

Pl.: Adottak a következő transzformációk: $E^{\underline{v}(\ )}$; t( ); $Q^{+45^\circ}(\ )$; R( )
Ekkor kompozíciók: $E^{\underline{v}(\ )}$(t( )) vagy Q^{+45°(t(R( )))

Definíció: … két alakzat egybevágó, ha ∃ egy vagy több egybevágósági transzformáció, amelyek egymás utáni alkalmazásával az egyik alakzat a másikkal fedésbe hozható.

VIII/4) Ismétlő feladatsor

a) Áll.: konvex sokszög külső szögeinek összege=360°.

b) Függvény

(i) Definiáld: injektív fv.; fv. fixpontja,

(ii) Keresd meg az $x^2 - 4x + 6$ hozzárendelésű fv. fixpontjait.

(iii) Egy sokszögnek 51-gyel több átlója van, mint a nála 3-mal kevesebb csúcsúnak. Hány csúcsa van?

c) Trafók + egyéb

(i) A kp-os tükrözés definíciója.

(ii) Mely trafó szimmetrikus? Melyik körüljárástartó? Melyiknek van korlátos invariáns alakzata? Sorolj fel ilyeneket!

(iii) A kp-os tükrözés legfontosabb példája, illetve a trapézzal kapcsolatos legfontosabb példánk.

(iv) Adott egy ABC_{Δ} AB oldalán egy P pont. Kell PQR egyenlőoldalú Δ, olyan, hogy $Q \in a$, $R \in b$.

(v) Adott egy Δ-ből: c; s_a; m_c. Szerkesztendő Δ.

(vi) Az ABC_{Δ}-be írjunk PQRS paralelogrammát úgy, hogy $PQ \in AB$, $R \in BC$, $S \in CA$ PQ=adott d hossz.

(vii) Egy α szög a kiegészítő szögének harmadánál 20°-kal nagyobb. Mekkora α?

(viii) Vektorok összeadása, kivonása

(ix) $\underline{\mathbf{a}}(-5;4)$ $\underline{\mathbf{b}}(6;-3)$ add meg a következő lineáris kombinációjuk koordinátáit $\underline{\mathbf{c}}($; $)$. Ahol: $\underline{\mathbf{c}} = 2\underline{\mathbf{a}} - \frac{4}{3}\underline{\mathbf{b}}$.

(x) Egy 8 cm és egy 10 cm hosszú vektor különbségének hossza 18 cm. Mit mondhatsz róluk?

(xi) Egy egyenlőszárú derékszögű Δ -ből adott a derékszögű csúcs: C, illetve az A-n áthaladó K kör és a B-n áthaladó *e* egyenes. Kell a Δ.

(xii) Egy hegyesszögű Δ-ben meghúztuk a magasságvonalakat és a középvonalakat.
Keress az alábbi szögpárokhoz példákat:
Egyállású; merőleges szárú egyenlő; pótszögpár;
merőleges szárú kiegészítő; váltószögpár;
csúcsszögpár; mellékszögpár

(xiii) A félszabályos háromszög jellemzői.

(xiv) Mondd ki a háromszög-egyenlőtlenséget kétféleképp is.

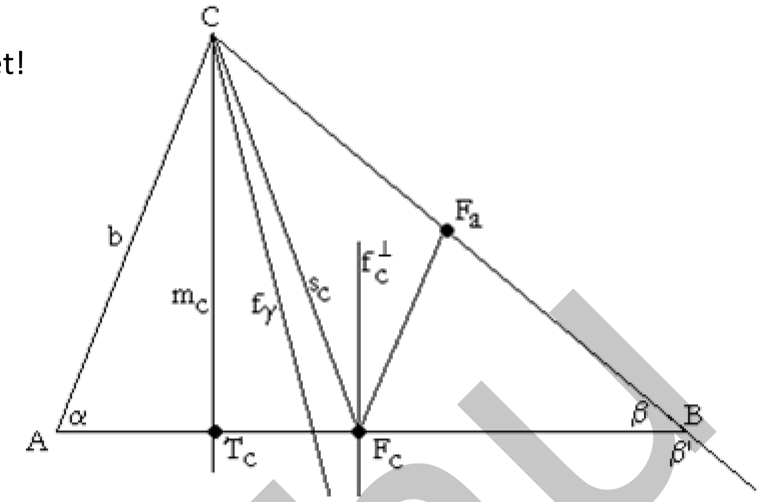
(xv) Egy háromszög két oldala: a=10,8 cm és b=17,3 cm Mekkora lehet a harmadik oldal (c)?

Geometria C: A háromszögek

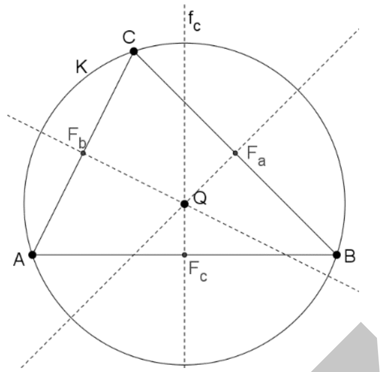
I. Elnevezések, csoportosítások

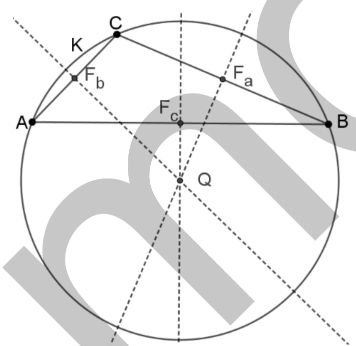
I/1) Elnevezések, definíciók

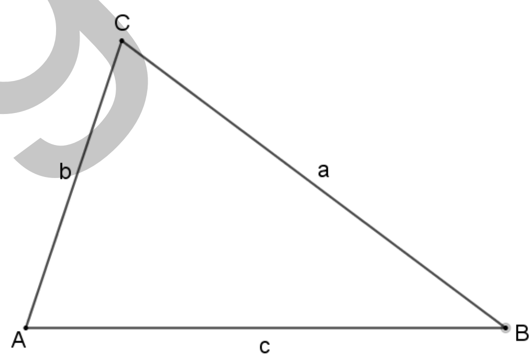
Írjuk le a vonalak, pontok nevét!



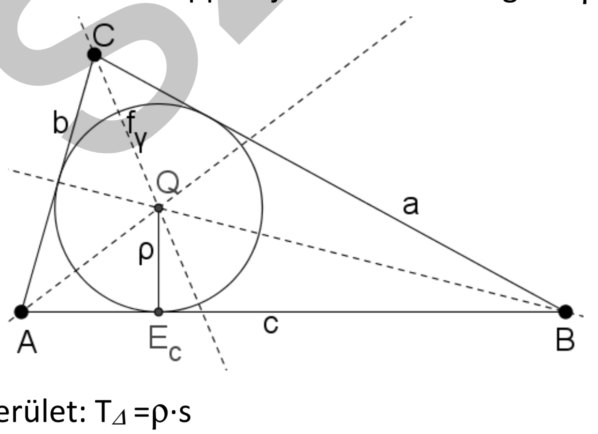
Oldalfelező merőleges: egy pontban metszik egymást, amely pont a háromszög köré írható kör középpontja.
Vegyük észre: tompaszögűnél Q a Δ-ön kívül van, derékszögűnél az átfogó felezőpontja!

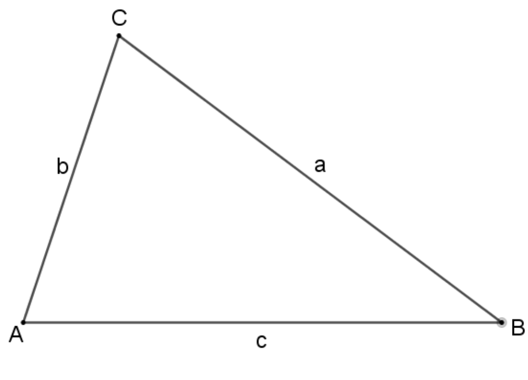






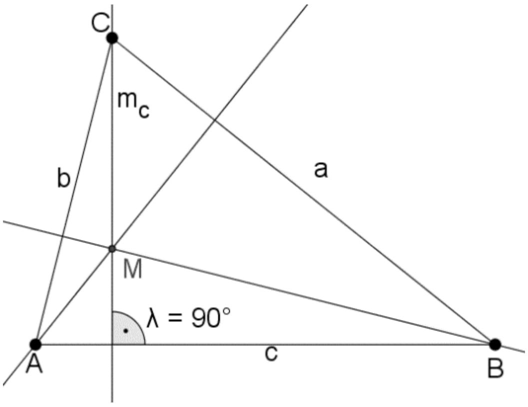
Szögfelező: Δ szögfelezői egy pontban metszik egymást, amely pont a háromszögbe írható kör középpontja. A beírt kör sugara: ρ. (ró)

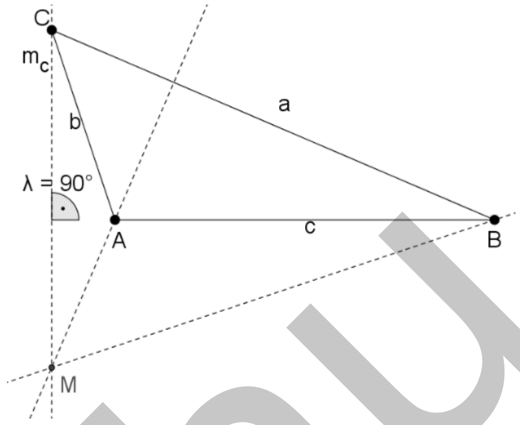


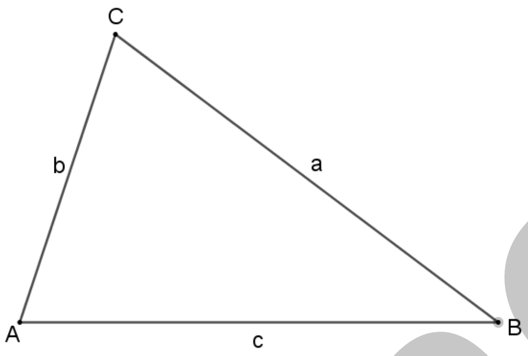


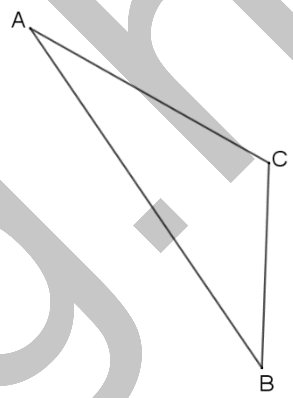
Terület: $T_\Delta = \rho \cdot s$
ahol: s=félkerület, ρ=beírt kör sugara

Magasságvonal: A csúcsból a szemközti *oldalegyenesre* állított merőleges szakasz (v. egyenes – attól függ, mit akarunk). Egy pontban metszik egymást, ez a magasságpont (M), *(amely tükörképe az oldalakra és az oldalfelezőkre ráesik a háromszög köré írt körre.)*
Vegyük észre: a tompaszögűnél m_c és m_b kívül halad, így M kívül van a háromszögön!

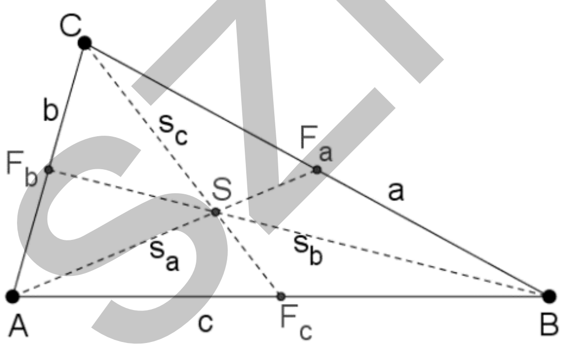


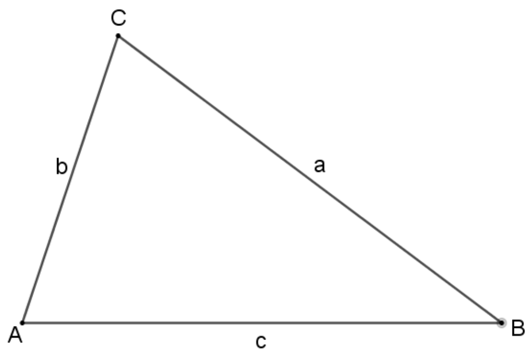






Súlyvonal: csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz (vagy egyenes). Egy pontban metszik egymást, ez a pont a súlypont (S), amely az oldalhoz közelebbi harmadolópontja a súlyvonalaknak.





Külső szög: a belső szögek mellékszöge (egy csúcsnál 2 is van belőle, de azok csúcsszögek!) A IX/1 első ábráján: β'.

Háromszögben a belső szögek összege: 180°. Külső szögek összege: 360°.

Háromszögben egy külső szög = a két nem mellette fekvő belső szög összegével.

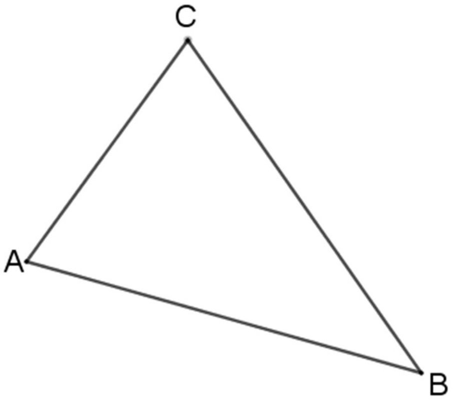
Középvonal: két oldalfelező pontot összekötő szakasz. Párhuzamos a harmadik oldallal és annak fele. Ld. fenti ábra, pl.: $F_bF_a = \frac{c}{2}$ és $F_bF_a \parallel c$.

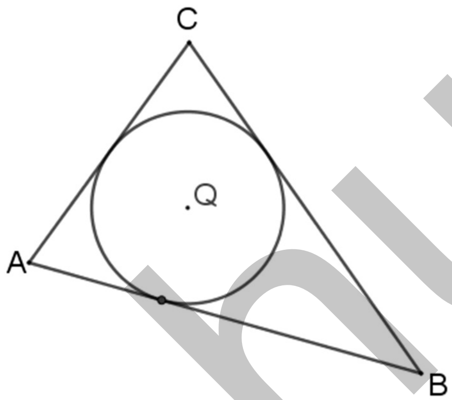
Jelölések: k=kerület=a+b+c;   s=félkerület= $\frac{a+b+c}{2}$

Δ területe: (oldal szorozva a hozzátartozó magasság)/2 $T=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$

Δ területe: beírt kör sugara szorozva a kerület felével: $\rho\cdot s$
(Beírt kör sugara: ρ, félkerület: s)

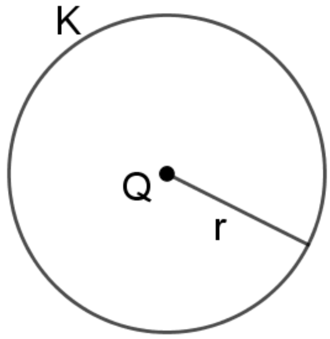
Mérj, és számold ki mindkét háromszög területét (magassággal, beírt kör sugarával).





Kör kerülete: $d\cdot\pi$. (d=átmérő=2r)

Kör területe: $r^2\pi$



$\pi\approx 3{,}14159\approx\frac{355}{113}$ (az első hat jegy ugyanaz!!!)

60°–os körcikk területe: $\frac{60°}{360°}\cdot r^2\pi$

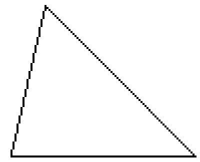
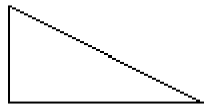
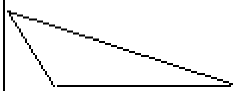
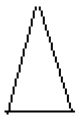
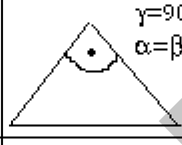
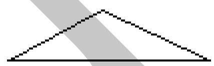
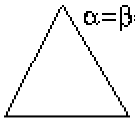
α fokos körcikk területe: $\frac{\alpha}{360°}\cdot r^2\pi$.

Pl.: Mekkora egy 2 m kerületű kör sugara?

Mekkora egy 10 m^2 területű kör sugara?

Egy 72°-os körcikk területe ≈ 251,3 cm^2. Mekkora a sugara?

I/2) Csoportosítások

Szögek \ Oldalak		Hegyesszögű	Derékszögű	Tompaszögű
Minden oldal különböző				
Egyenlő szárú	Pontosan két oldal egyenlő	 $\gamma<90°$ $\alpha=\beta>45°$	$\gamma=90°$ $\alpha=\beta=45°$ 	$\gamma>90°$ $\alpha=\beta<45°$ 
	Egyenlő-oldalú	 $\alpha=\beta=\gamma=60°$	—	—

II. Oldalak közti kapcsolat; Szögek közti kapcsolat

II/1) Háromszög oldalai közti kapcsolat: a **háromszög-egyenlőtlenség**

a) A szokásos és a „sorrendes”

A szokásos: **bármely két oldal összege nagyobb, mint a harmadik.**

a+b>c   b+c>a   c+a>b

Elég-e csak kettő ezek közül?

Nem – lásd ábra:

Sorrendes: **a két nem legnagyobb összege nagyobb a harmadiknál.**

Legyen: a≤ b≤ c

Ekkor elég: a+b>c

Hiszen a legnagyobbhoz bármelyiket hozzáadva a harmadiknál már csak nagyobb oldalt kaphatunk.

Vagyis a két nem legnagyobb összege nagyobb a harmadiknál.

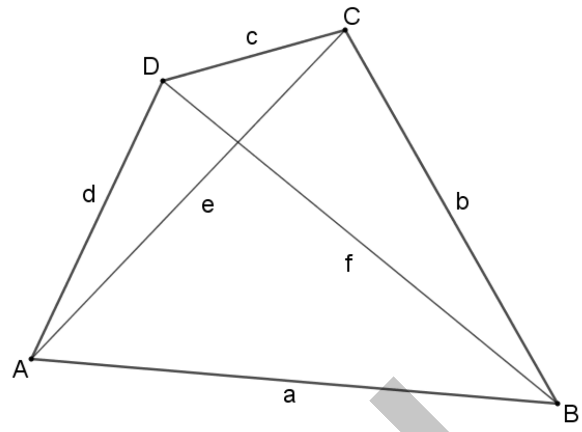
b) Alappéldák a Δ egyenlőtlenséghez.

Adott egy Δ-ből két oldal. Milyen értékek között változhat a harmadik?

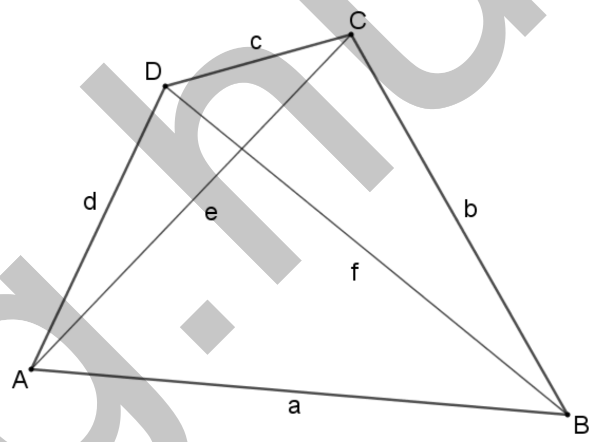
Pl.: a=5,3 és b=2,1.

Mutasd meg, hogyha egy Δ-ben az *a* oldal a legnagyobb, akkor 2*a*; *b*; *c* oldalakból nem szerkeszthető háromszög!

Állítás: konvex négyszögben a két átló összege kisebb, mint a kerület!
Biz.:

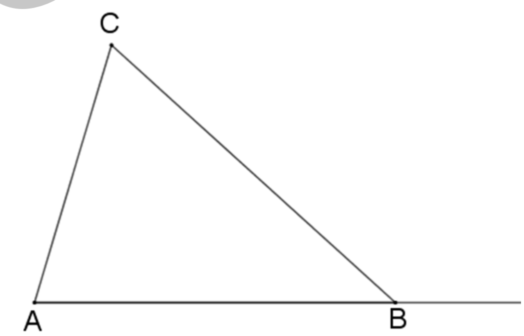


Állítás: konvex négyszögben a két átló összege nagyobb, mint a félkerület!
Biz.:



II/2) A háromszög szögei közötti kapcsolat

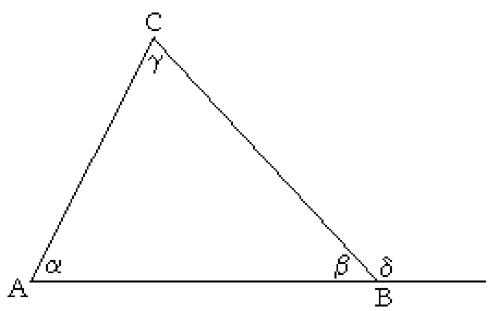
a) Tétel: A Δ külső szöge megegyezik a két nem mellette fekvő belső szög összegével
Biz.:
Sokszor egy jó vonal segít:



Fontos következmény:
Háromszögben $\forall$ külső szög nagyobb a nem mellette fekvő belső szögnél!

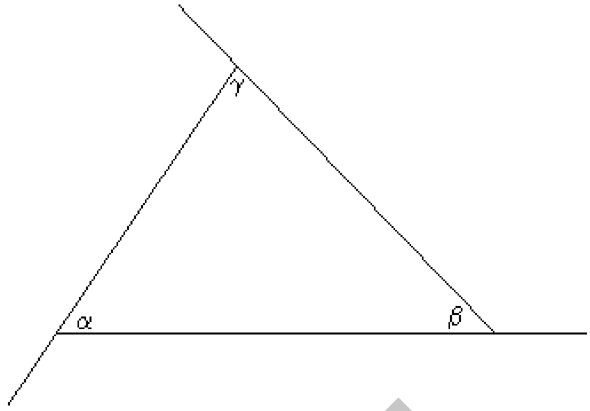
b) Tétel: A Δ belső szögeinek összege 180°
Biz.: ST (Segéd Tétel): az előző tétel!

$\beta+\delta=180°$ $\beta+(\alpha+\gamma)= 180°$ ✓



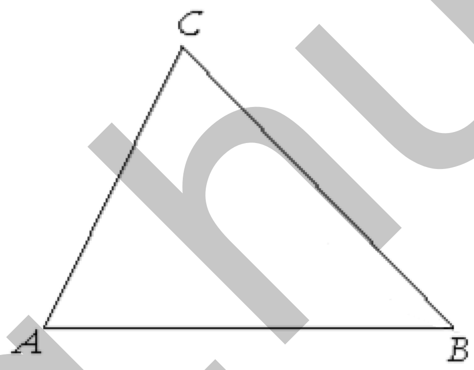
c) Tétel: Δ külső szögeinek összege 360°

Biz.:



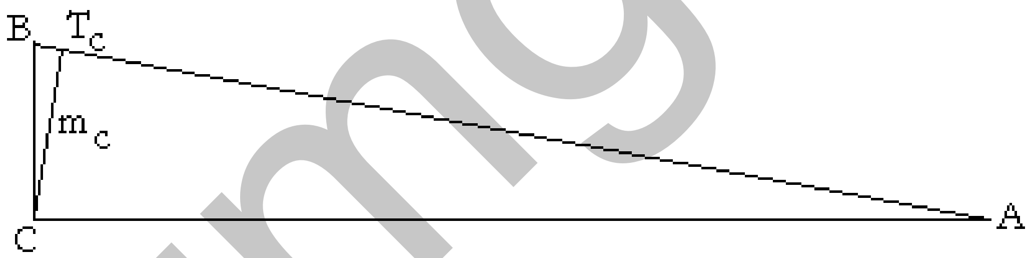
d) Állítás: Δ-ben az egy csúcshoz tartozó külső és belső szögfelező $\perp$ egymásra.

Biz:



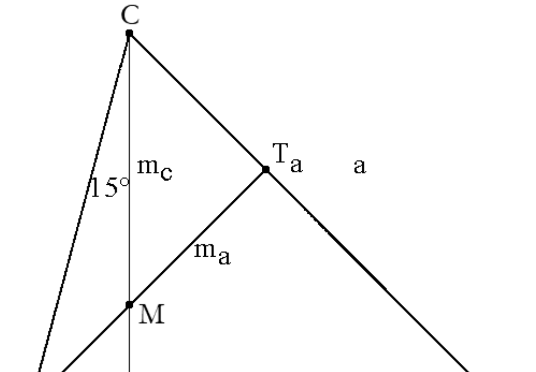
e) Gyakorlópéldák a Δ szögösszegeihez:

(i) Adott egy derékszögű háromszög (γ=90°). $(m_c,a)_\angle$ = 20° Kell α, β.



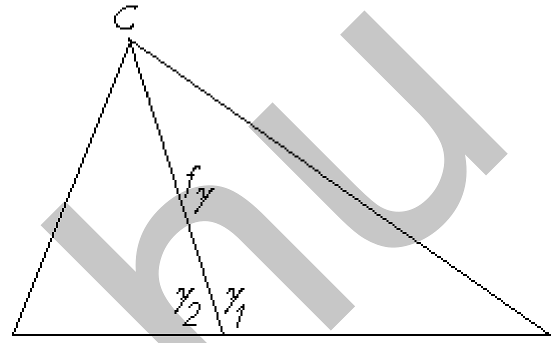
(ii) Hegyesszögű ABC$_\Delta$: β=45° $ACT_{c\angle}$=15° Kell: $CAT_{a\angle}$ és $CMT_{a\angle}$.

Mutasd meg, hogy $AT_a+MT_a=a$.

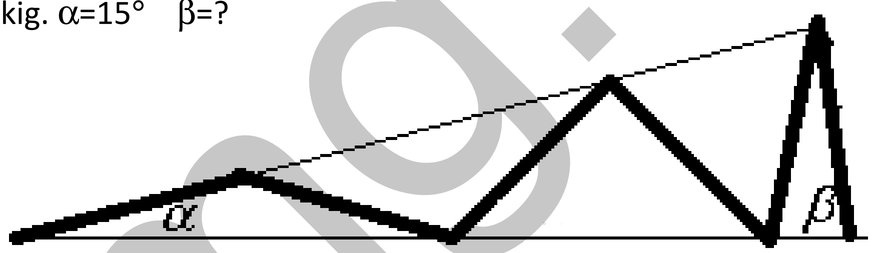


(iii) Egy háromszög belső szögeinek aránya 4 : 7 : 1 Mekkorák a szögek?

(iv) Adott egy Δ. f_γ szögfelező. Áll.: $\gamma_1 - \gamma_2 = \alpha - \beta$
Biz.:
(Aminek nincs neve…)



(v) Egy szögbe az ábra alapján egyenlő szakaszokat rajzolok az egyik szártól a másikig. $\alpha=15°$ $\beta=?$



II/3) Δ-ek egybevágóságának – illetve egyértelmű szerkeszthetőségének alapesetei

a) A tételek – az egybevágósági eseteket mondjuk el szavakkal is!

(i) $ABC_\Delta \cong A'B'C'_\Delta \Leftrightarrow$ a=a'; b=b' és c=c'
Egy ABC_Δ egyértelműn szerkeszthető, ha adott 3 oldala.

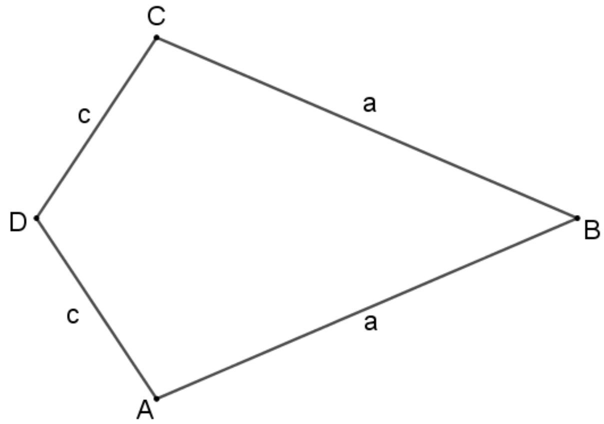
(ii) $ABC_\Delta \cong A'B'C'_\Delta \Leftrightarrow$ a=a'; b=b' és $\gamma = \gamma'$.
Egy ABC_Δ egyértelműn szerkeszthető, ha adott két oldala és a közrezárt szög.

(iii) $ABC_\Delta \cong A'B'C'_\Delta \Leftrightarrow$ a=a'; $\beta = \beta'$ és $\gamma = \gamma'$.
Egy ABC_Δ egyértelműn szerkeszthető, ha adott egy oldal és a rajta fekvő két szög.

(iv) $ABC_\Delta \cong A'B'C'_\Delta \Leftrightarrow$ $a \le b$, a=a'; b=b' és a nem kisebbikkel szemben fekvő szögük: $\beta=\beta'$
Egy ABC_Δ egyértelműn szerkeszthető, ha adott két oldala és a nem kisebbikkel szemben fekvő szög.

b) Gyakorlópéldák

(i) Deltoid (ha úgy van definiálva, hogy két-két szomszédos oldalpár egyenlő.)
Állítás: DCB$_\angle$ =DAB$_\angle$.

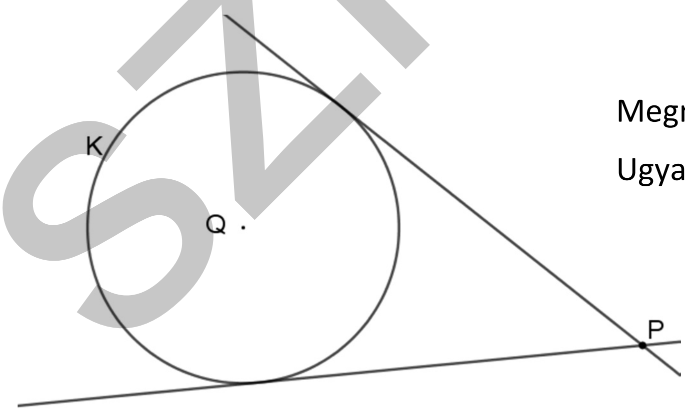


(ii) Hibás gondolat: 3 szög és 1 oldal megegyezik, akkor egybevágó a két Δ.
Pl.:

(iii) Tétel: külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.

Biz.:
ST: (Segédtétel: később bizonyítjuk): Az érintési pontba húzott sugár merőleges a kör érintőjére.

(Aminek nincs neve, arról nem tudunk gondolkodni!)



Megmutatjuk, hogy

Ugyanis:

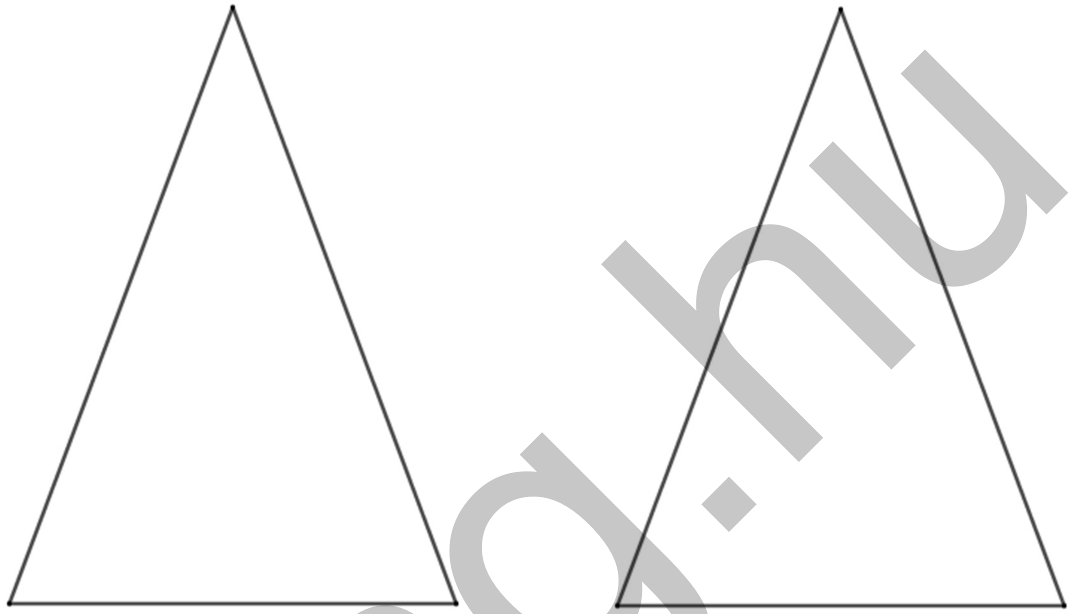
Szakaszok egyenlőségének bizonyításához

II/4) Összefüggés a Δ oldalai és szögei között

TÉTEL: $\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta}$ **és** $\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta}$

Vagyis: **Δ- ben egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szög van, egyenlő szögekkel szemközt pedig egyenlő oldal, – illetve nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van, és nagyobb szöggel szemközt nagyobb oldal.**

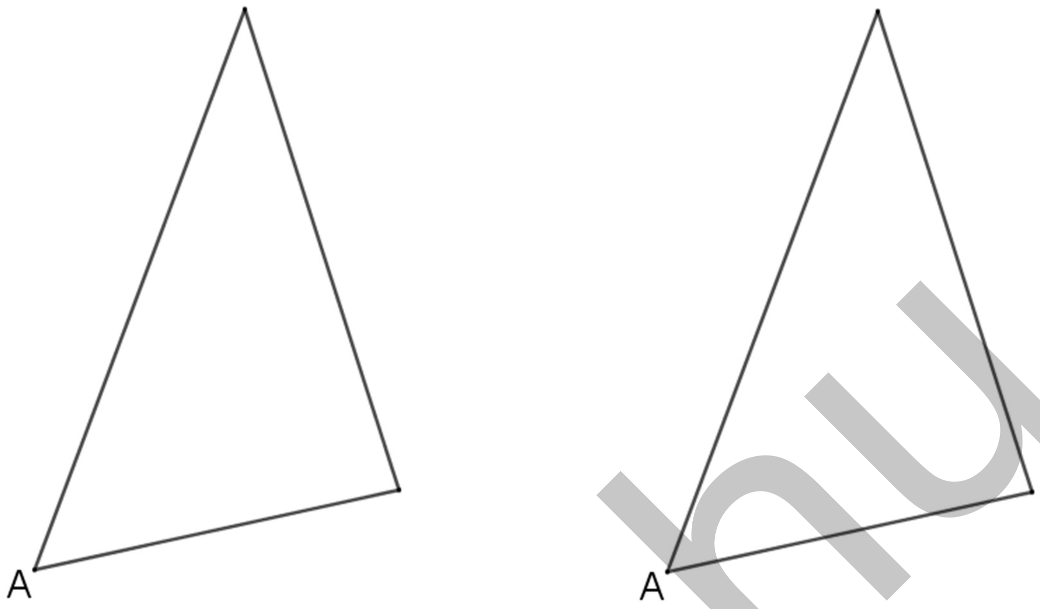
- Áll.: $a=b \Rightarrow \alpha=\beta$ Vagyis Δ-ben egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szög van.
  Biz.:



„Kipottyant" tétel: **Az egyenlőszárú Δ - ben**

Egy egyenlőszárú háromszög egyik szöge 72°. Mekkora lehet a másik kettő?

- Áll.: a < b $\Rightarrow$ $\alpha < \beta$ Vagyis Δ-ben nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van.
  Biz: (A szögek jelölése: α az A csúcsnál, β a B csúcsnál.)
  Nézzük az *ABC*$_\Delta$-et (láthatón hosszabb a *b* oldal).



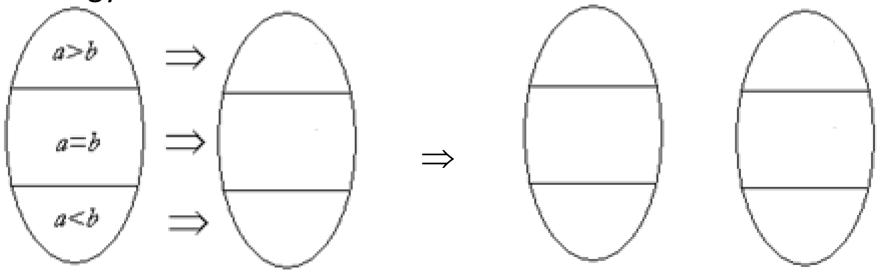
- A FŐTÉTEL bizonyítása: (előbb mi csak oldalból következtettünk szögre!)
  A háromszög *a* és *b* oldalának összefüggését tekintve az a három esemény, hogy *a* > *b*, *a* = *b* és *a* < *b* **teljes eseményrendszert** alkot:

  páronként

  és „összegük”

  Vagyis valamelyik mindig igaz egy Δ-re és csak az egyik.

  Ugyanígy az α és β közti összefüggés is teljes eseményrendszer. Ezért a következések egyben



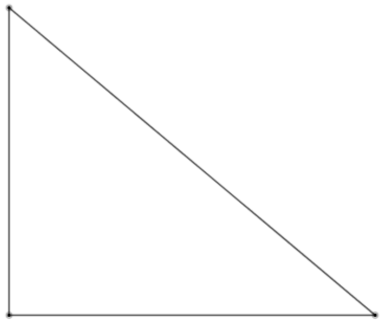
Amit bizonyítani kellett. (Q.E.D.)

II/5) Gyakorlás

a) *a* < *b* < *c.* Két szög: 90° és 50°. Mekkora a 3. szög, és melyik szög melyik?

Mo.:

Érdemes rajzolni…



A 3. szög:

b) γ=90°. c=10. Mekkora lehet a kerület minimuma és maximuma?

Mo.:

Ugyanakkor:

Összefoglalva:

c) γ=60°. c=8. (c-vel szemközt van a γ) Mit mondhatunk az oldalak nagyságbeli sorrendjéről?

Mo.:

III. A Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei: 1 rész

III/1) Oldalfelező merőlegesek $\Rightarrow$ Δ köré írt kör középpontja

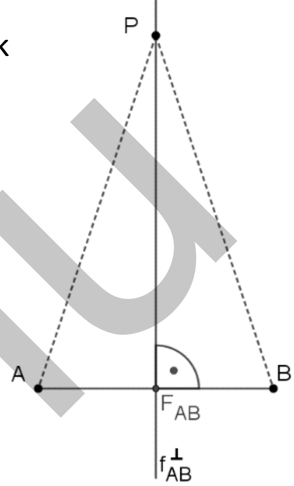
a) Tétel: Δ-ben az oldalfelező merőlegesek 1 pontban metszik egymást, és ez a pont a Δ köré írt kör középpontja.

Segédtétel: P$\in f_{AB}^{\perp} \Leftrightarrow$ d(*P*;*A*)= d(*P*;*B*)

„Az AB szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától, ***és csakis ezek a pontok ilyen tulajdonságúak.”***

„Mértani hely”:

Vagyis: két ponttól azonos távolságra található pontok mértani helye a két pont szakaszfelező merőlegese.



A segédtétel bizonyítása:

1. rész: $\boxed{\Rightarrow}$

Vagyis: A szakaszfelező merőleges $\forall$ pontja egyenlő távol van a szakasz két végpontjától.

Jelekkel: be kell látni, hogy:

P$\in f_{AB}^{\perp} \Rightarrow$ d(P ; A)= d(P ; B)

Igaz, ugyanis:

Ha *P*$\equiv$*F_{AB}* ✓

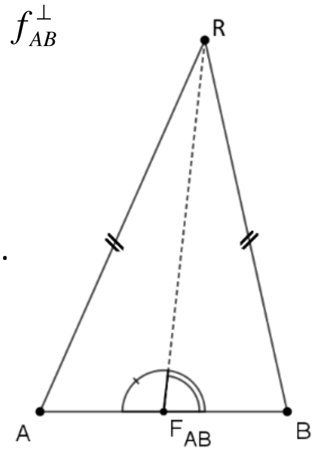
Ha *P*$\not\equiv$*F_{AB}* és *P*$\in f_{AB}^{\perp}$, akkor: $AF_{AB}P_{\Delta} \cong F_{AB}BP_{\Delta}$, mert két oldal és a közrezárt szög megegyezik. (AF_{AB}=BF_{AB} és $F_{AB}P$ közös, szög: 90°)

Így AP=PB ✓

2. rész: $\boxed{\Leftarrow}$

Vagyis: Ha egy R pont egyenlő távolságra van egy szakasz két végpontjától, akkor rajta van a szakaszfelező merőlegesen.

Jelekkel: be kell látni, hogy: d(R ; A)= d(R ; B) $\Rightarrow$ R$\in f_{AB}^{\perp}$



Igaz ugyanis:

Ha: *R*$\equiv$*F_{AB}* ✓

Ha *R*$\not\equiv$*F_{AB}* és *RA*=*RB*,

akkor kössük össze *R*-t F_{AB}-vel.

Ekkor: $AF_{AB}R_{\Delta} \cong F_{AB}BR_{\Delta}$, mert oldalaik egyenlők.

(AR=BR; AF_{AB}=BF_{AB} és F_{AB}R közös)

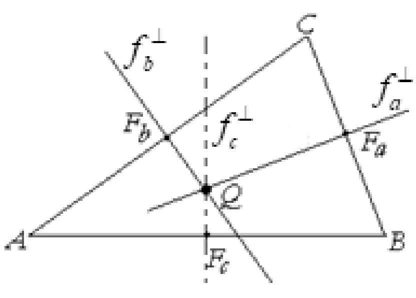
Így $AF_{AB}R_{\angle}$=$RF_{AB}B_{\angle}$, összegük 180°,

ezért külön-külön 90°-osak, vagyis *R*$\in f_{AB}^{\perp}$ ✓

Főtétel biz.:

a$\nparallel$b$\Rightarrow\exists$! *Q*$\in f_a^{\perp} \cap f_b^{\perp}$.

$$\left.\begin{aligned} Q\in f_a^{\perp} \Rightarrow QC = QB \\ Q\in f_b^{\perp} \Rightarrow QC = QA \end{aligned}\right\} \Rightarrow QA = QB \Rightarrow Q\in f_c^{\perp}$$

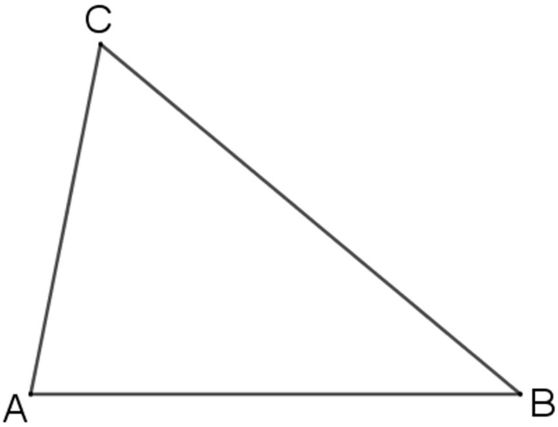


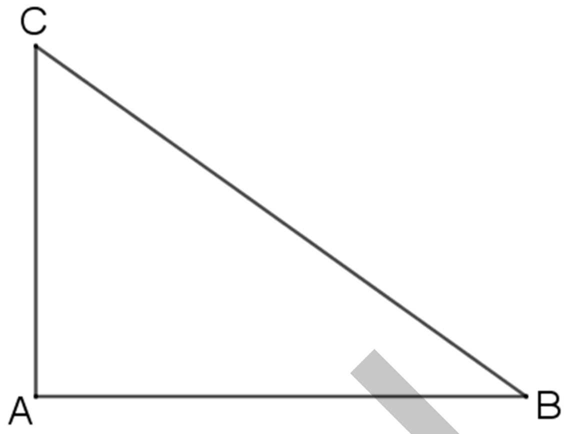
Nyilván ez lesz a Δ köré írt kör középpontja, hiszen *QA*=*QB*=*QC*. Ez lesz a sugár.

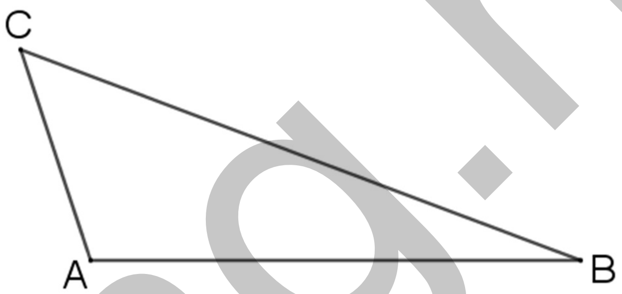
(Rajzold is meg a kört!)

b) Alappéldák:

(i) Szerkessz Δ köré kört: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű

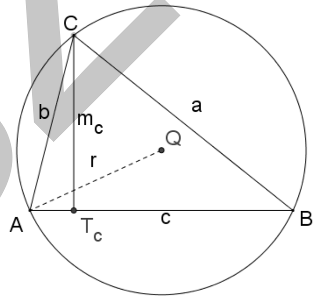






Észrevételek: A köré írt kör Q középpontja:
Hegyesszögű Δ -nél: a Δ-ön belül van;
Derékszögűnél: $Q \equiv F_c$ (az átfogó felezőpontja)
Tompaszögű Δ -nél: a Δ-ön kívülre esik.

(ii) Adott c, R, m_c. Kell Δ.
Mo.:

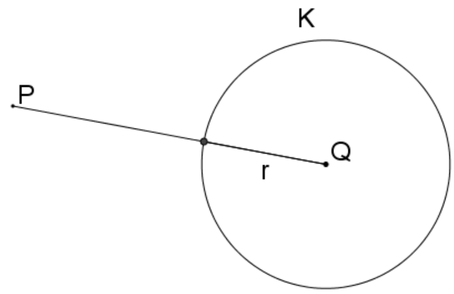


(iii) HF-hoz.: pont körtől való távolsága.
$d(P;K(Q;r))=|d(P;Q)-r|$
Vagyis…

Külső pont:

Körpont:

Belső pont:



(iv) Emlékezzünk
Az egyenlőszárú Δ alaphoz tartozó magassága két egybevágó, derékszögű háromszögre osztja a Δ-et!

A derékszögű Δ átfogóhoz tartozó magassága két olyan Δ -re osztja az eredetit, melyeknek a megfelelő szögei egyenlők az eredeti Δ megfelelő szögeivel.

(v) Mutasd meg, hogy egy hegyesszögű háromszöget fel lehet darabolni 3, 4 illetve * 5 egyenlőszárú háromszögre és így tovább… (Nem kell az egyenlőszárúaknak egybevágónak lenniük.)

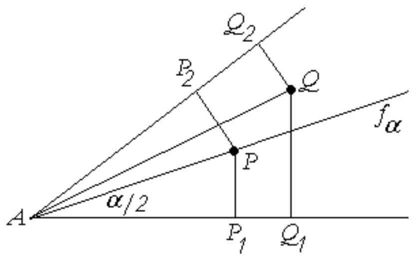
III/2) Szögfelezők $\Rightarrow \Delta$ -be írt kör és hozzáírt kör

a) Tétel: Háromszögben a szögfelezők 1 pontban metszik egymást, és ez a pont a Δ-be írt kör középpontja.

Biz:

ST: Az α konvex szög f_α szögfelezőjének minden pontja egyenlő távolságra van a szög száraitól, és csakis ezek a pontok ilyen tulajdonságúak. Mértani hely!

(Vagyis: konvex szög két szárától azonos távolságra található pontok mértani helye a szög szögfelezője.)



Biz.:

1. rész: a szögfelező pontjai ilyen tulajdonságúak:

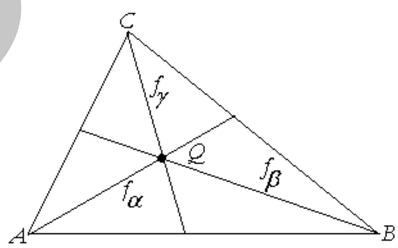
Ui.: $P\in f_\alpha$, P vetületei a két száron P_1 és P_2. Így $AP_1P_\Delta \cong APP_{2\Delta}$, mert egy oldal és a rajta fekvő két szögük megegyezik. Így az egyenlő szögekkel szemközti oldalak is: $PP_1 = PP_2$.

2. rész: amely pont ilyen tulajdonságú, az csakis a szakaszfelezőn lehet.

Vagyis: $Q\in f_\alpha \Leftarrow QQ_1 = QQ_2$.

Vegyük Q-nak a két vetületét a két száron: Q_1 és Q_2 és kössük össze Q-t A-val. Ekkor: $AQQ_{2\Delta} \cong AQ_1Q_\Delta$, ugyanis két oldaluk megegyezik és a nagyobbikkal szemközti szög mindkettőnél derékszög. Így $Q_2AQ_\angle = QAQ_{2\angle}$, vagyis külön-külön $\alpha/2$, vagyis $Q\in f_{AB}$.

Főtétel biz:



$\alpha+\beta<180° \Rightarrow \exists!\ Q\in f_\alpha \cap f_\beta$.

$Q\in f_\alpha \Rightarrow$ d(Q;c)=d(Q;b)

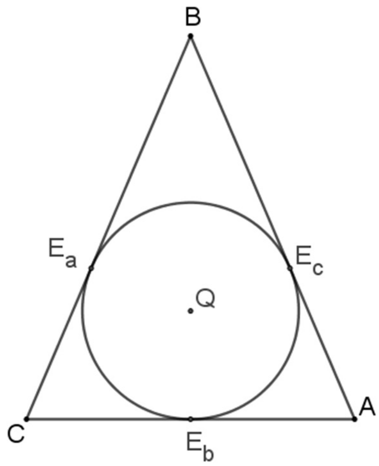
$Q\in f_b \Rightarrow$ d(Q;c)=d(Q;a)

$\Rightarrow$d(Q;a)=d(Q;b) $\Rightarrow Q\in f_\gamma$ ✓

Nyilván ez lesz a Δ-be írható kör középpontja.

Figyelem: csak az egyenlőszárú Δ-eknél van egyedül, hogy a beírt kör érintési pontja az alapon megegyezik a szárak által bezárt szög szögfelezője által az alapból kimetszett ponttal. Egyébként a szögfelezők máshol metszik az oldalt, mint ahol a beírt kör érint!

Rajzold be a sugarakat és a szögfelezőket!



b) Tétel: Δ-ben egy belső és a másik két szög külső szögfelezője egy pontban metszi egymást, és ez a Δ belső szöggel szemközi **oldalhoz kívülről hozzáírt** körének kp-ja.

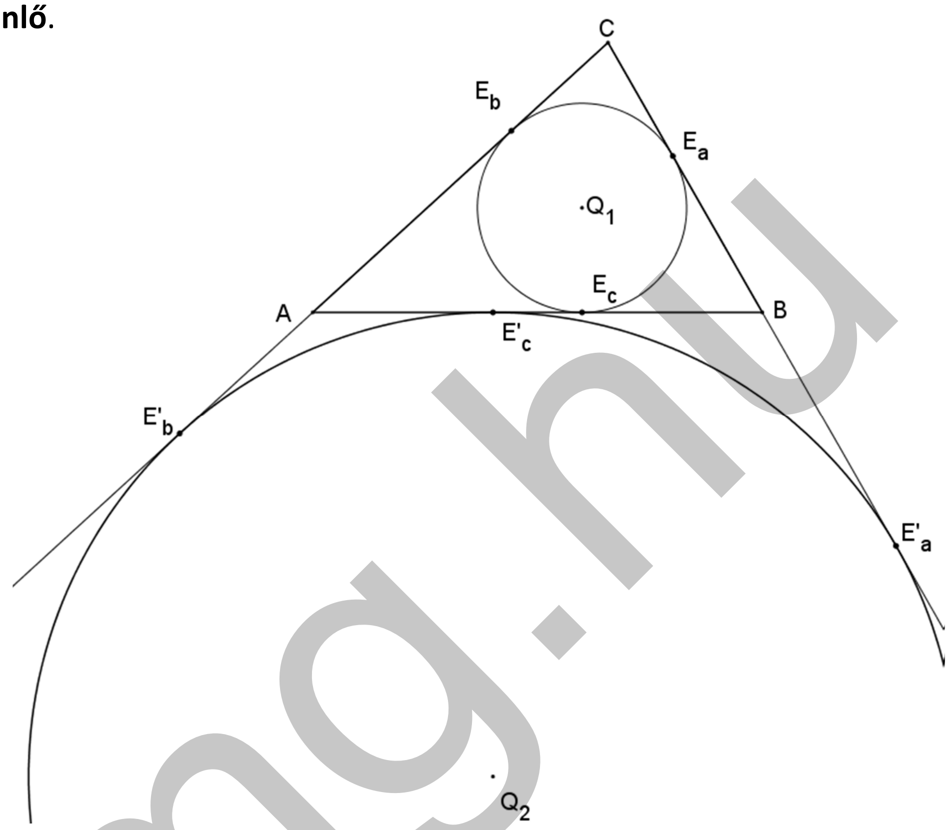
Bizonyításának logikája az előző tétel bizonyítása.

c) Tétel

Δ-ben a *C* csúcstól a szemközti *c* oldal külső érintőköréig húzott érintőszakasz hossza *s* (félkerület), illetve az *a* és *b* oldalegyenesek be- és hozzáírt kör közé eső érintőszakaszaik hossza egyenlő a *c* oldallal.

Csak annyit bizonyítunk, hogy CE_b'=s (félkerület)

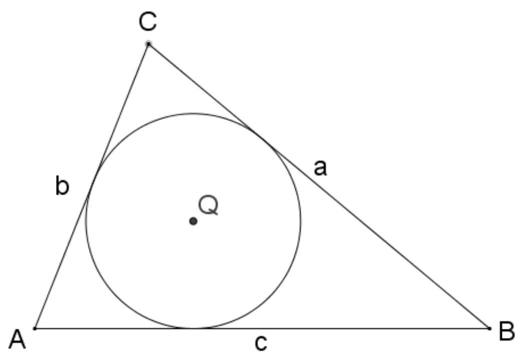
Emlékeztető: II/3/b/iv: **Külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő**.



d) Példák

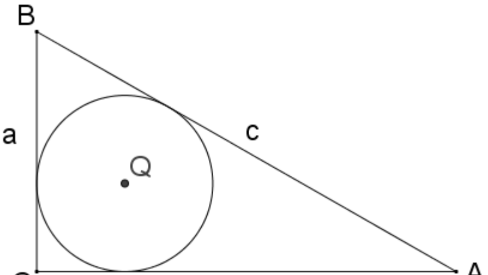
(i) Tétel: Háromszög területe ρ·s=T.

Mo:



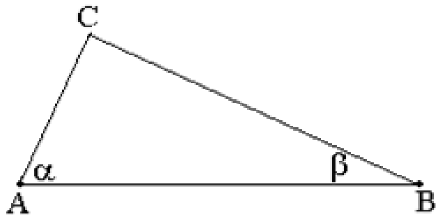
(ii) Tétel.: ⊥-ű Δ-ben: $a + b - 2\rho = c$

Biz.



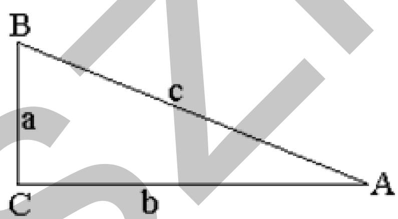
(iii) Alap: Szerkessz Δ-et, ha adott: *k* és α és β.

Mo.: Alapgondolat



(iv) Gyakorló: $\perp$-ű Δ-ből adott: $a+b$ és ρ. Szerkesztendő a Δ.

Mo.:



IV. A Thalész tétel

IV/1) Bevezetés: a mértani hely fontossága

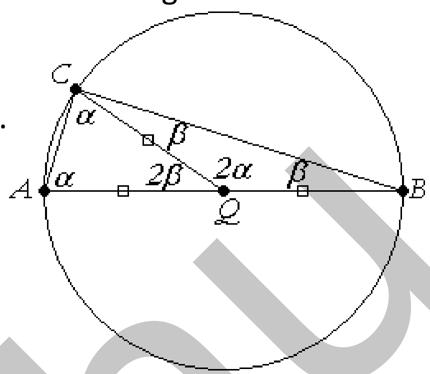
IV/2) A Thalész tétel kimondása - bizonyítása

Az *AB* szakaszra mint átmérőre emelt kör *AB*-n kívüli pontjaiból az *AB* szakasz $\perp$ (90°) alatt látszik, és a sík csak e pontjai ilyen tulajdonságúak. Ezt a hiányos kört hívjuk az *AB* szakasz Thalész körének.

Vagyis: $C\in$ *AB* szakasz Thalész köre $\Leftrightarrow$ ABC_Δ *C*-ben derékszögű.

Biz.:

$\boxed{\Rightarrow}$



Vegyük a Thalész kör egy *A* és *B*-n kívüli *C* pontját.

Ekkor az AQC_Δ és a BCQ_Δ egyenlőszárú.

Így a $ACQ_\angle=\alpha$ és a $BCQ_\angle=\beta$.

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \gamma = 90°$. ✓

$\boxed{\Leftarrow}$

Igazából nem azt fogjuk bizonyítani, hogy ha az *AB*-t derékszög alatt látom egy *C* pontból, akkor $C\in AB$ Thalész köre, hanem a következőt:

Ha *C* belül van a Thalész körön $\Rightarrow \gamma > 90°$

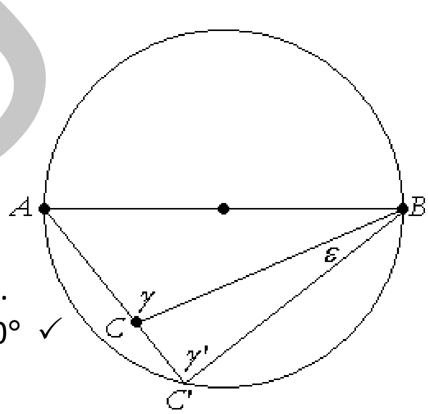
Vagyis a körön belül tompaszög alatt látom az *AB*-t

Ha *C* kívül van a Thalész körön $\Rightarrow \gamma < 90°$

Vagyis a körön kívül hegyesszög alatt látom az *AB*-t

Biz.:

C belső pont



Kössük össze *A*-val és B-vel.

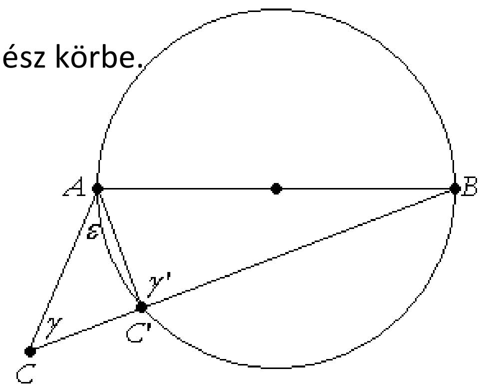
Az *AC* meghosszabbítása C'-ben metszi a kört.

Rajzoljuk meg az $AC'B_\Delta$-et.

Ez előző bizonyítás alapján derékszögű: $\gamma' = 90°$.

Mivel γ a $CC'B_\Delta$ külső szöge, ezért $\gamma = 90°+\varepsilon > 90°$ ✓

C külső pont



Kössük *A*-val és *B*-vel.

Az egyik ilyen szakasz biztos belemetsz a Thalész körbe.

Legyen a metszéspont *C'*.

Ott a keletkezett szög

az előző bizonyítás alapján: $\gamma'=90°$.

Mivel γ' a $CC'A_\Delta$ nem γ melletti külső szöge,

ezért $\gamma = 90°-\varepsilon < 90°$ ✓

(Az AB egyenes pontjai természetesen nem megfelelők – így mindig van ABC_Δ.)

Így: az *AB* Thalész körön kívül $\nexists$ olyan pont, melyből 90° alatt látnám az *AB* szakaszt.

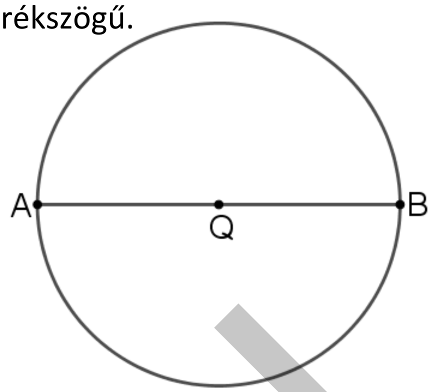
Tehát bebizonyítottuk a tételt.

A Thalész kör végeredményben egy átmérő két végpontjánál lukas kör.

Újra, kézzel kitölteni: **Az *AB* szakaszra mint átmérőre emelt kör *AB*-n kívüli pontjaiból az *AB* szakasz $\perp$ (90°) alatt látszik, és a sík csak ezen pontjai ilyen tulajdonságúak. Ezt a hiányos kört hívjuk az *AB* szakasz Thalész körének.**

Vagyis: $C\in$ *AB* szakasz Thalész köre $\Leftrightarrow$ $ABC_{\triangle}$ *C*-ben derékszögű.

Biz.:



$\boxed{\Rightarrow}$

Vegyük a Thalész kör egy *A* és *B*-n kívüli *C* pontját.

Ekkor az $AQC_{\triangle}$ és a $BCQ_{\triangle}$ ……………………………

Így a $ACQ_{\angle}$=……….. és a $BCQ_{\angle}$=..............

$2\alpha + 2\beta$ =……………. $\Rightarrow$ $\alpha + \beta$ = ………… $\Rightarrow$ γ=………… ✓

$\boxed{\Leftarrow}$

Igazából nem azt fogjuk bizonyítani, hogy ha az *AB*-t derékszög alatt látom egy *C* pontból, akkor $C\in AB$ Thalész köre, hanem a következőt:

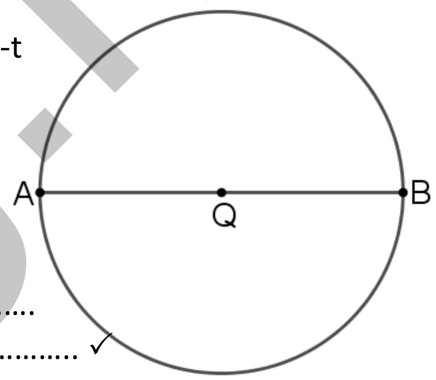
Ha *C* belül van a Thalész körön $\Rightarrow$ γ>90°

Tehát a körön belül tompaszög alatt látom az *AB*-t

Ha *C* kívül van a Thalész körön $\Rightarrow$ γ<90°

Tehát a körön kívül hegyesszög alatt látom az *AB*-t

Biz.:



C belső pont

Kössük össze *A*-val és B-vel.

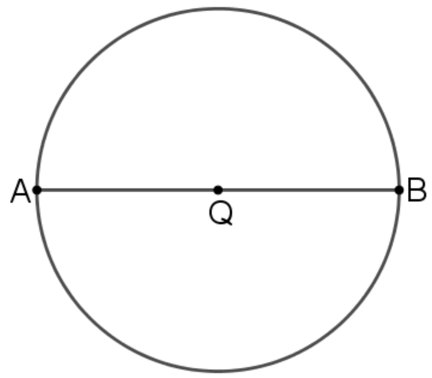
Az *AC* meghosszabbítása C'-ben metszi a kört.

Rajzoljuk meg az $AC'B_{\triangle}$-et.

Ez előző bizonyítás alapján ……………………: γ'=……….

Mivel γ a $CC'B_{\triangle}$ külső szöge, ezért γ=………………………….. ✓

C külső pont



Kössük *A*-val és *B*-vel.

Az egyik ilyen szakasz

biztos belemetsz a Thalész körbe.

Legyen a metszéspont *C'*.

Ott a keletkezett szög

az előző bizonyítás alapján: γ'=……………

Mivel γ' a $CC'A_{\triangle}$ nem γ melletti külső szöge,

ezért γ=………………………. ✓

(Az AB egyenes pontjai természetesen nem megfelelők – így mindig van $ABC_{\triangle}$.)

Így: az *AB* Thalész körön kívül $\nexists$ olyan pont, melyből 90° alatt látnám az *AB* szakaszt.

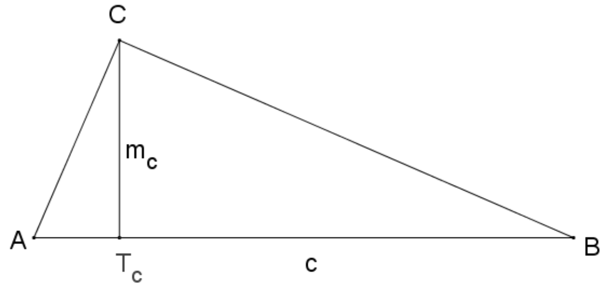
Tehát bebizonyítottuk a tételt.

A Thalész kör végeredményben egy átmérő két végpontjánál lukas kör.

IV/3) Alappéldák

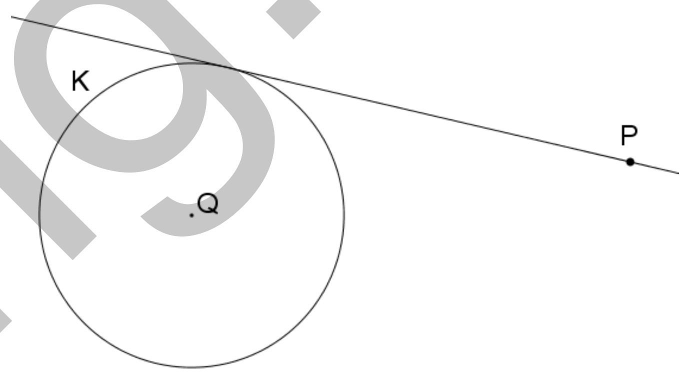
a) $\perp$-ű Δ-ből adott: c és m_c. Kell Δ.

Mo.:

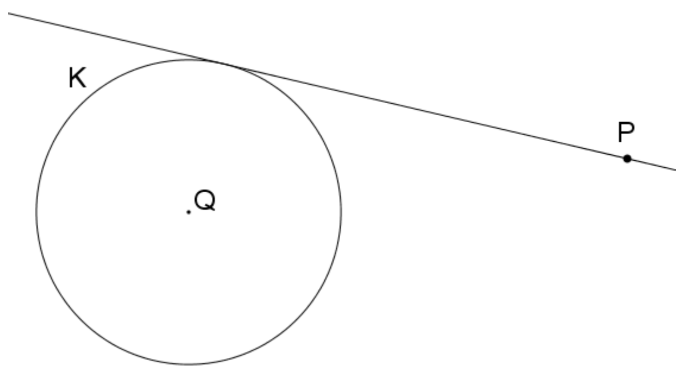


b) Szerkessz külső pontból körhöz húzott érintőt.

Mo.:



Szerkeszd is meg!

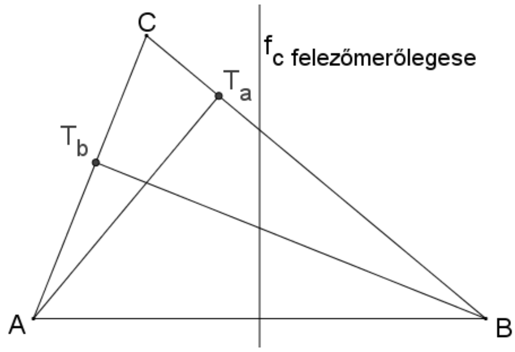


Valójában nem kellene a Thalesz tétel, anélkül is szerkeszthető. Hogyan?

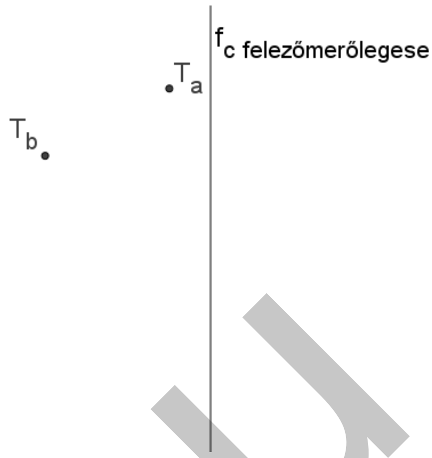
c) Adott egy Δ-ből: T_a, T_b. és $f_{AB}^{\perp}$ Szerkesztendő a Δ.

Mo.:

Mintha már kész lenne…

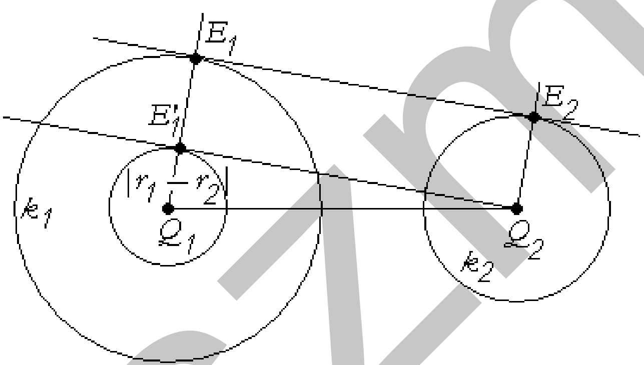


Vakábra



IV/4) Két kör közös érintői

Közös külső érintő: ***tanm_geometria_C_4_3_d_kulso_erinto.ggb***



A „Mintha már kész lenne ábrán”:

Húzzunk a két középpontból merőlegest a két érintési pontba,

majd a kisebbik sugarú kör középpontjából párhuzamost az érintővel.

Látható, hogy a keletkezett $Q_1Q_2E_1'$ Δ derékszögű E_1'-ben.

Ez a Δ szerkeszthető, hiszen

derékszögű, és a Q_1E_1' befogó nagysága ismert: $|r_1 - r_2|$.

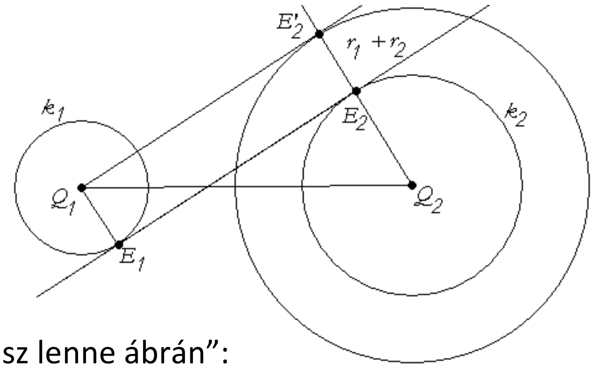
(Itt szokták ösztönösen rávágni a diákok, hogy a befogó r_2, pedig nem annyi! ☹)

$$\left.\begin{array}{l} E_1' \in Thalesz_{Q_1Q_2} \\ E_1' \in K\left(Q_1;|r_1 - r_2|\right) \end{array}\right\} \Rightarrow E_1' \in Thalesz_{Q_1Q_2} \cap K$$

Q_1E_1' meghosszabbítása megadja E_1-et,

illetve $E_1'Q_2$-re merőleges Q_2-ben megadja E_2-őt.

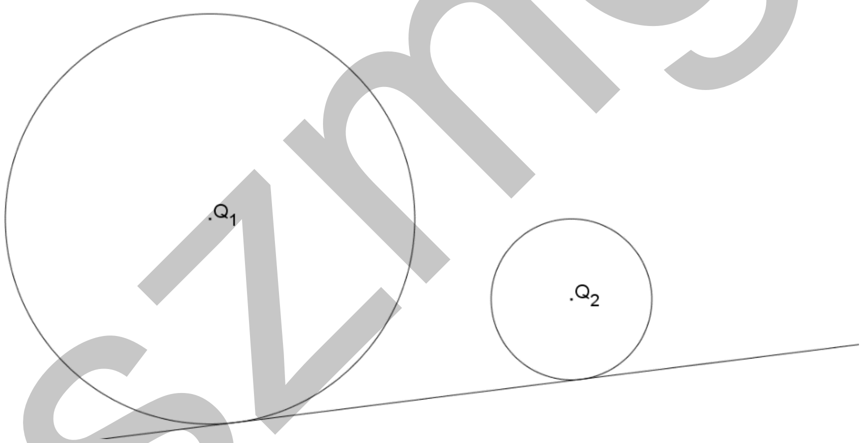
Közös belső érintő ***tanm_geometria_C_4_3_d_kozos_belso.ggb***

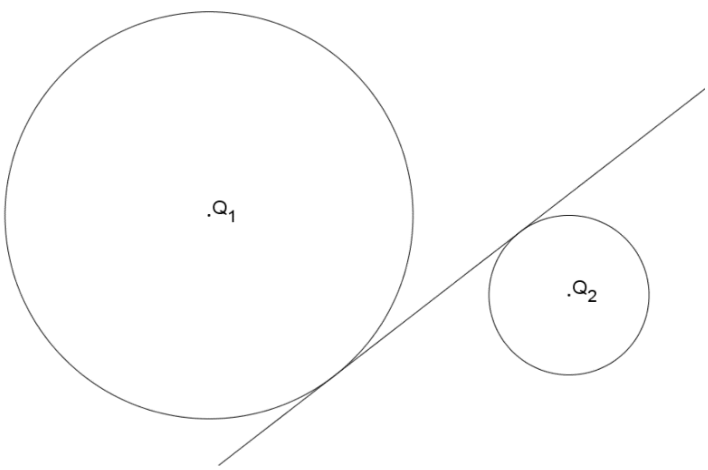


A „Mintha már kész lenne ábrán”:
Húzzunk a két középpontból merőlegest a két érintési pontba,
majd Q_1-ből párhuzamost az érintővel.

Látható, hogy a keletkezett $Q_1Q_2E_2'$ Δ derékszögű E_2'-ben.
Ez a Δ szerkeszthető,
hiszen derékszögű, és a Q_2E_2' befogó nagysága ismert: r_1+r_2.
$E_2' \in Q_1Q_2$ Thalész köre
$E_2' \in K(Q_2;\ r_1+r_2)$ sugarú kör.
$\Rightarrow E_2' \in$ Thalesz$\cap$K
Q_2E_2' kimetszi k_2-ből E_2-őt,
illetve Q_1E_2'-re merőleges Q_1-ben kimetszi k_1-ből E_1-et.

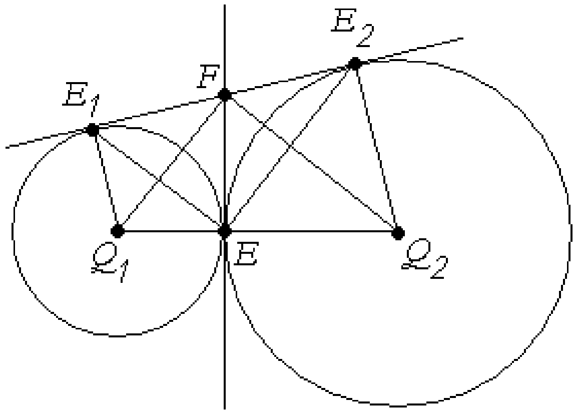
Gyakorlás
Szerkeszd meg a másik közös külső, illetve belső érintőt.





Mutasd meg, hogyha két egymást érintő körnél meghúzom a közös külső és belső érintőt, akkor a Q_1Q_2F és E_1EE_2 háromszögek derékszögűek!

Biz.:

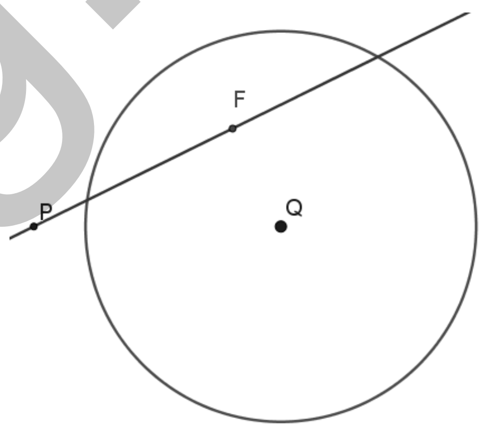


IV/5) * Példa a mértani hely fontosságára

Adott egy K(*Q*;r) kör és rajta kívül egy *P* pont. Illesszünk egy *e* egyenes a *P* pontra és forgassuk. Mi a kör és az egyenes által kimetszett húr felezőpontjainak mértani helye a síkon? (***tanm_geometria_C_4_3_e.ggb***)

Mo:

1. Megmutatjuk, hogy



2. Kérdés:

Készítsünk ebből egy példát:

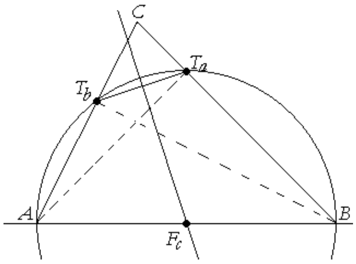
Adott egy kör, benne egy *h* húr, és egy P külső pont. Szerkesszünk a P pontból egy szelőt úgy, hogy annak a körbe eső szakaszát a h húr felezi.

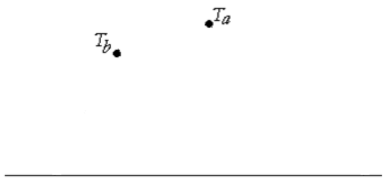
a) Egy háromszög egyik oldalánál 1 egységgel kisebb a hozzátartozó magassága. A területe 10 egységnégyzet. Mekkora az adott oldal?

IV/6) Gyakorlópéldák

a) Szerkessz Δ-et, ha adott: T_a, T_b és c egyenese!

Mo.:



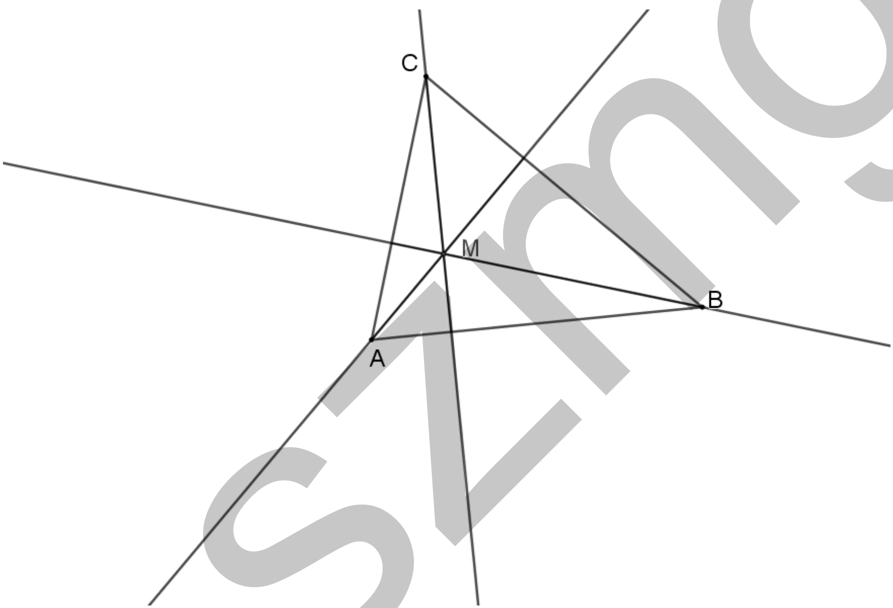


V. Δ nevezetes pontjai, körei: 2. rész: Magasság $\Rightarrow$ magasságpont

V/1) Áll.: a magasságvonalak egy ponton mennek át, és ez a magasságpont: M.

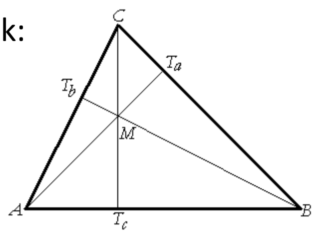
tanm_geometria_C_5_1_magassagvonalak_magassag.ggb

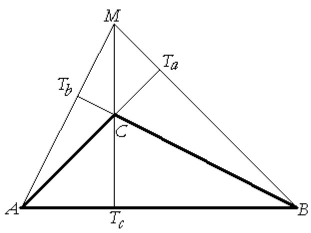
Biz.: (később vektoroknál látunk majd egy másik bizonyítást is)

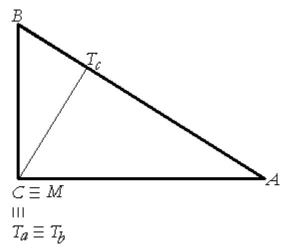


Vegyük észre:

Észrevételek:

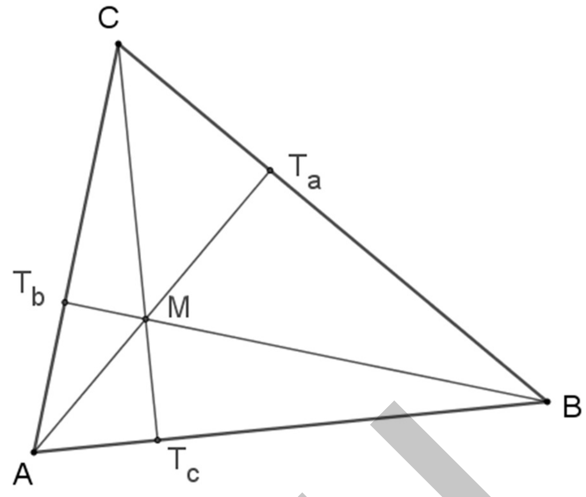




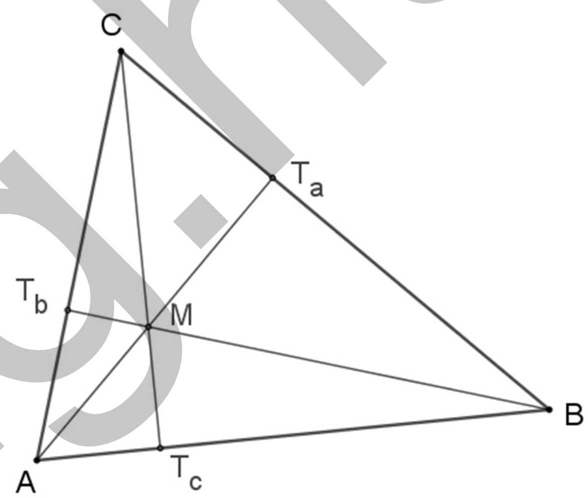


V/2) Példák

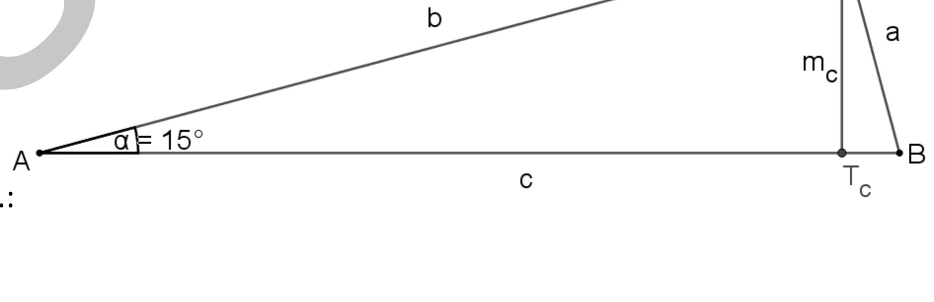
a) Mely Δ-ek magasságpontja található meg az ábrán – és melyik az?



b) Áll.: Δ-ben: MT_aCT_b egy körön van.
Hány pontnégyest lehet találni, amelyek egy körön vannak – és miért vannak egy körön?

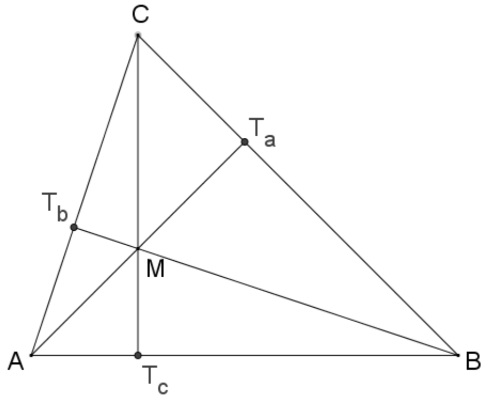


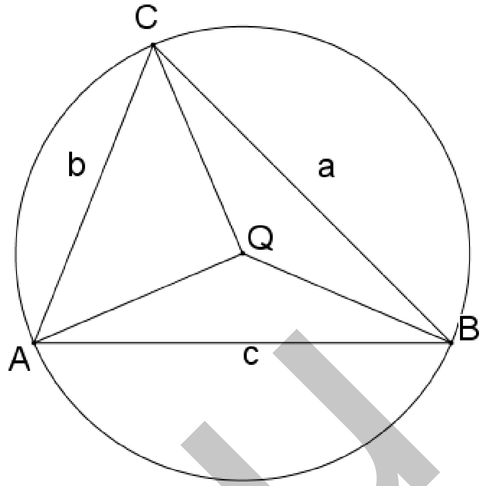
c) Áll.: 15°-os $\perp$-ű Δ-ben: $4m_c=c$.



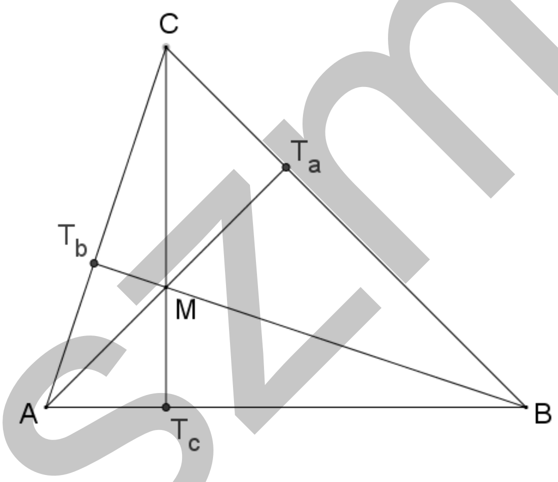
Mo.:

d) Δ szögei: α=72 β=45 γ=63°. Mekkora szögekben látszódnak az oldalak az *M*-ből, és a körülírt kör középpontjából?





e) Adott az ABCΔ, T_a, T_b, T_c, M. Hány „négypontos kör” van az ábrán? Van-e α-val, β-val illetve γ–val egyenlő, vagy kifejezhető szög?

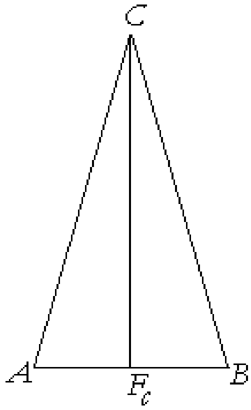


VI. Speciális Δ-ek

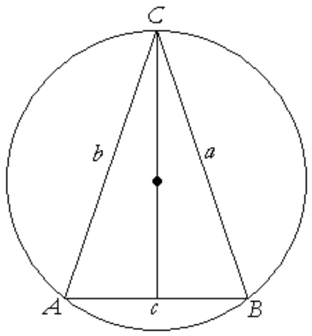
VI/1) Egyenlőszárú Δ.

a=b $\Leftrightarrow$ α=β

$m_c = f_\gamma = s_c = f_c$



Gyakorlás: Egyenlőszárú Δ-ből adott a c alap és R (köréírt kör sugara).
Kell az egyenlőszárú Δ.
Mo:



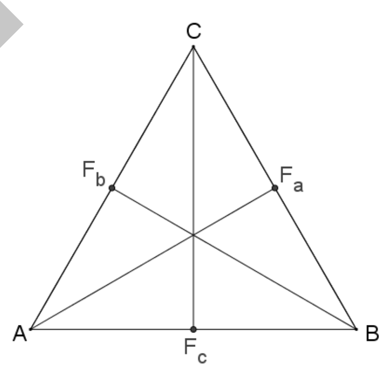
VI/2) Egyenlőoldalú Δ

$a = b = c \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma.$

$m_c \equiv f_\gamma \equiv s_c \equiv f^\perp{}_c.$

$m_a \equiv f_\alpha \equiv s_a \equiv f^\perp{}_a.$

$M \equiv Q$ stb.

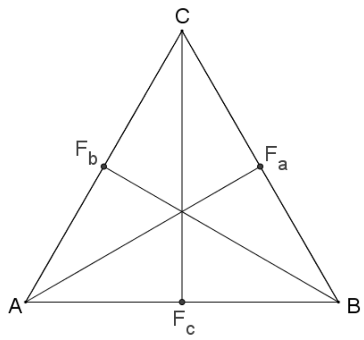


Szerkesztendő az egyenlőoldalú Δ, ha adott m_c.

Szerkesztendő az egyenlőoldalú Δ, ha adott $a+m_a$.

VI/3) Félszabályos

Adatai, tulajdonságai



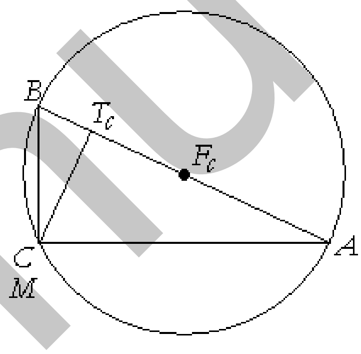
VI/4) Derékszögű Δ.

$C \in AB$ Thalesz

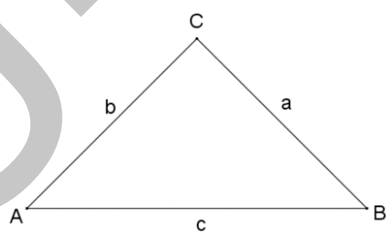
$R = c/2$

T=ab/b

$a + b - 2\rho = c$



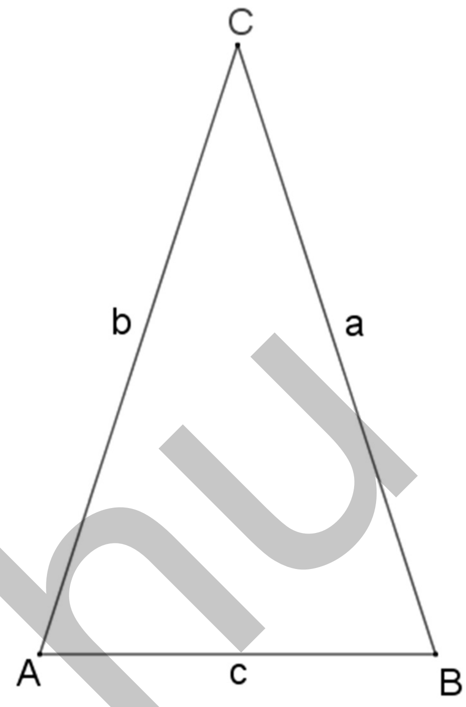
Egyenlő szárú derékszögű: „félnégyzet”



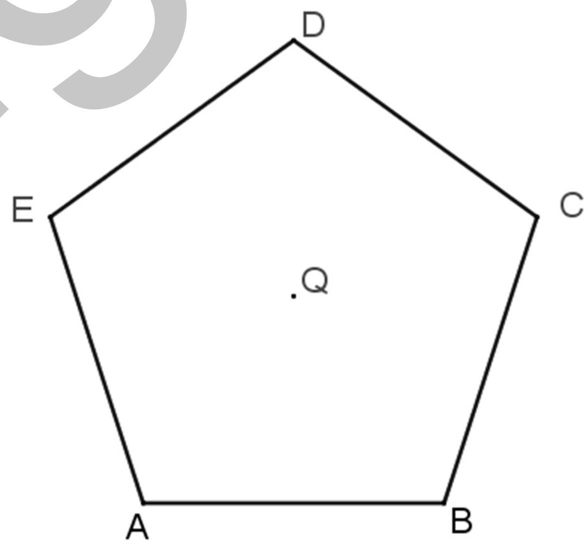
Adott k, α. Kell derékszögű Δ.

Adott $b - a$, c. Kell derékszögű Δ.

VI/5) Az aranymetszés ∆-e: 36°, 72°, 72°



Számold ki a szabályos ötszög belső szögeinek nagyságát, a középponti szöget, illetve az ABD háromszög szögeit!



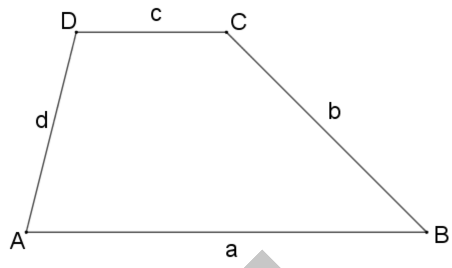
Geometria D: Négyszögek, síkidomok és területszámítás

I. A négyszögek

I/1) Elnevezések, csoportosítások

Trapéz: ∃ párhuzamos szemközti oldalpárja

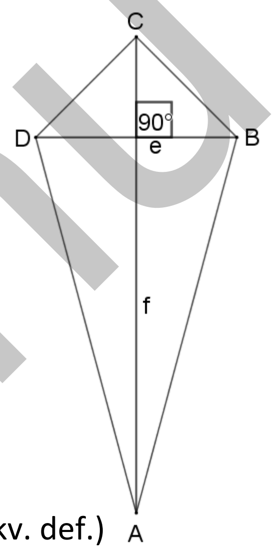
Fontos ötletek a trapézzal kapcsolatban + a területe



Deltoid: két-két szomszédos oldala megegyezik.

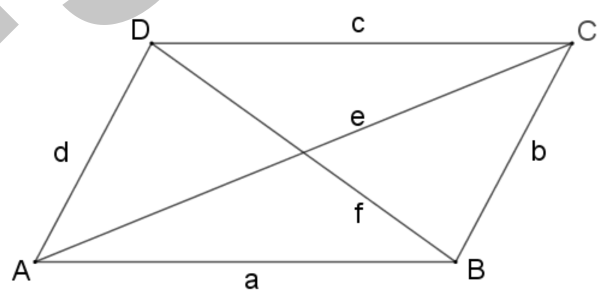
- egyik átlóra tengelyesen szimmetrikus négyszög
- az egyik átló a másikat merőlegesen felezi.

Fontos ötletek a deltoiddal kapcsolatban + a területe



Paralelogramma: szemközti oldalai párhuzamosak (+ még 6 ekv. def.)

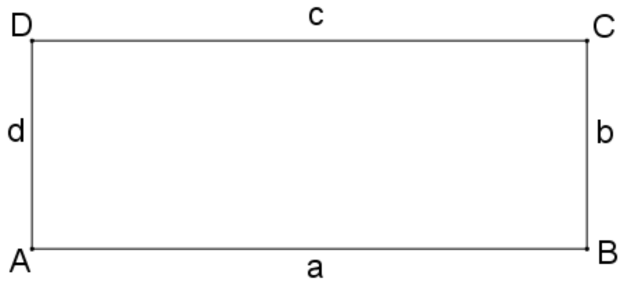
Fontos ötletek a paralelogrammával kapcsolatban + a területe



Téglalap: szögei egyenlők

- olyan paralelogramma, amelynek ∃ derékszöge ⇔ minden szöge derékszög
- olyan paralelogramma, melynek átlói egyenlők

Fontos ötletek a téglalappal kapcsolatban + a területe

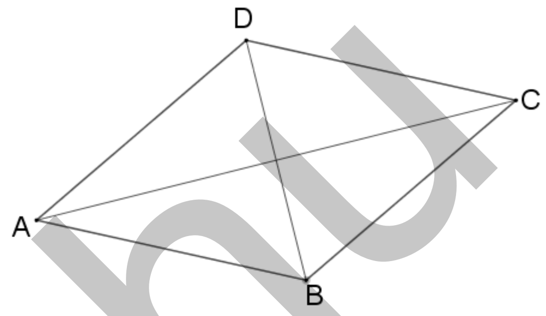


Rombusz:

- oldalai egyenlők (szemben téglalappal, melynek azonban a szögei egyenlők)
- Mindkét átlójára tengelyesen szimmetrikus négyszög (vagyis átlói egyben szögfelezők is)
- Átlói merőlegesen felezik egymást

Lényeges tulajdonsága: szemközti oldalai párhuzamosak (vagyis ő paralelogramma, de speciális). Ezt a párhuzamos szerkesztésnél használtuk ki.

Fontos ötletek a paralelogrammával kapcsolatban + területe



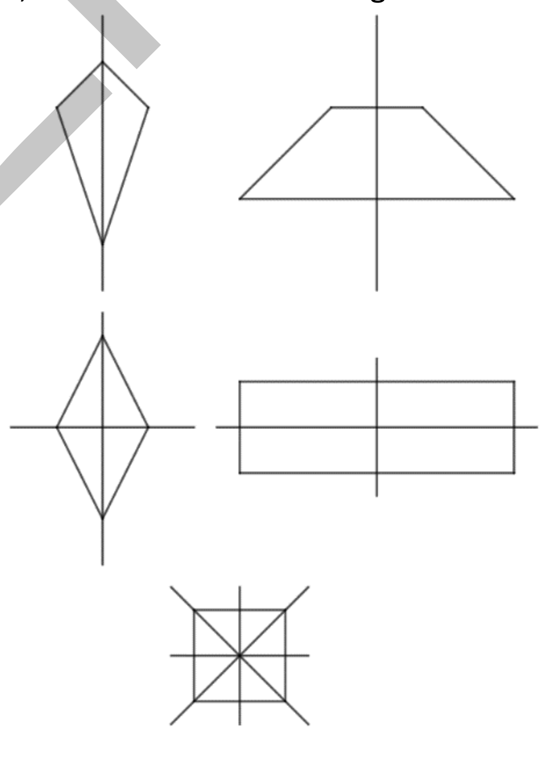
Négyzet – vagyis a szabályos négyszög: oldalai és szögei egyenlők

„A négyzet születése"

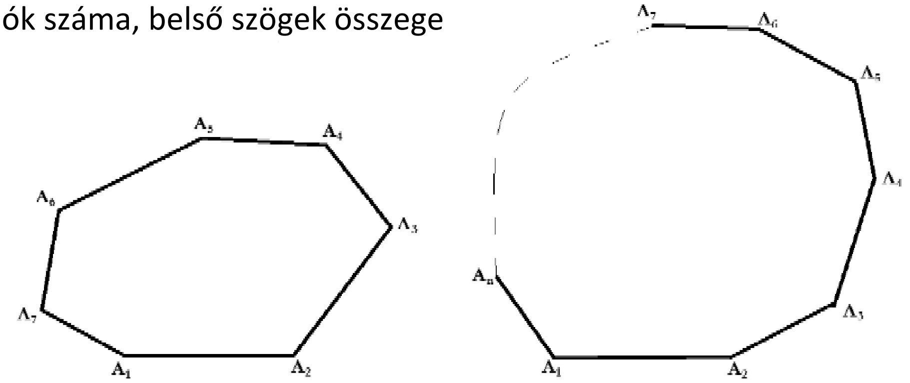
Deltoid: 1 átlóra tengelyesen szimmetrikus négyszög
Húrtrapéz (szemmetrikus trapéz): Az alapok felezőmerőlegesére tengelyesen szimmetrikus négyszög

Rombusz: a 2 átlójára tengelyesen szimmetrikus négyszög
Téglalap: az oldalfelező merőlegesekre tengelyesen szimmetrikus négyszög

Négyzet: az átlókra is, az oldalak felezőmerőlegeseire is tengelyesen szimmetrikus



I/2) Átlók száma, belső szögek összege



Konvex sokszög - belső szögek összege:

Konvex sokszög - külső szögek összege:

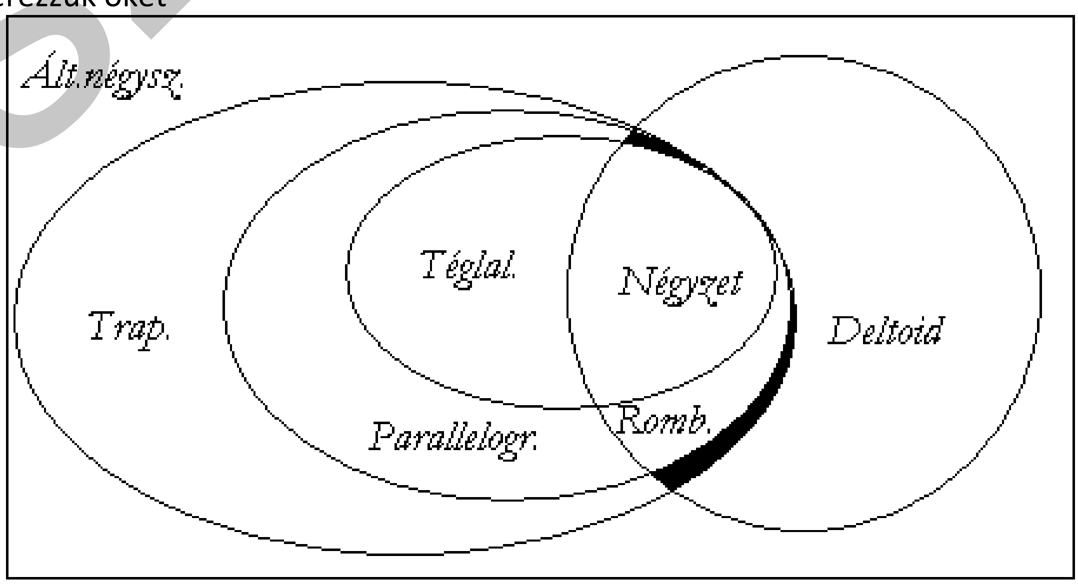
Átlók száma:

Számolás: Egy n oldalú sokszög átlóinak száma 54. Hány csúcsa van. Egyenlettel!
Mo.:

20 ember találkozik. Mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás lesz így?

Hány ember találkozott, hogy összesen 36 kézfogás történt?

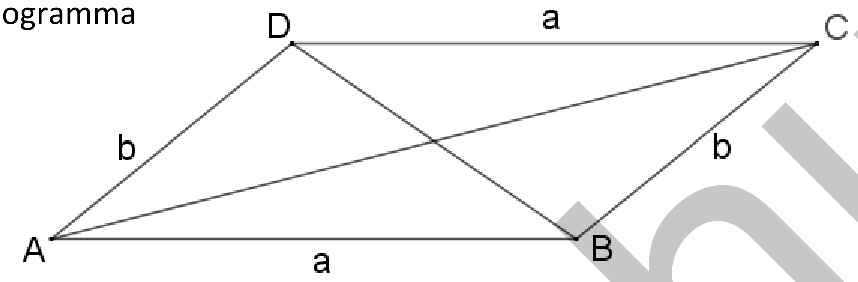
I/3) Rendszerezzük őket



Adj példát a következő tulajdonságú négyszögre:

- tengelyesen szimmetrikus:
- van két-két egyenlő oldala:
- van négy egyenlő szöge:
- középpontosan szimmetrikus:
- átlói egyenlők:
- átlók felezik egymás:

I/4) A paralelogramma



a) Definíció + ekvivalens definíciók

(i) „oldalak"
- **Alapdefiníció: a szemközti oldalai párhuzamosak;**
- a szemközti oldalak egyenlők;

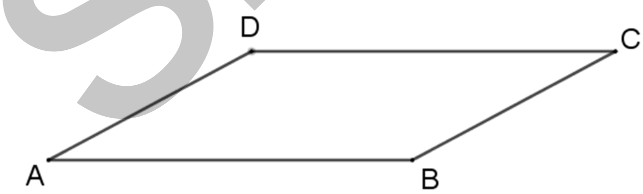
(ii) „szögek"
- a szemközti szögek egyenlők;
- az egy oldalon található szögek kiegészítők;

(iii) „tükrösség"
- középpontosan szimmetrikus;
- átlói felezik egymást;

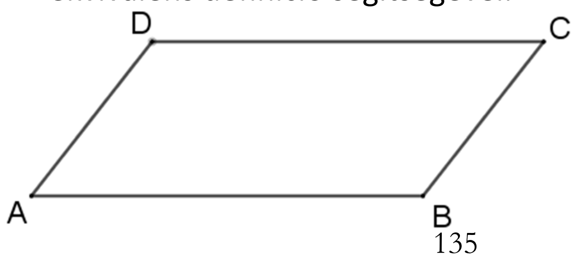
(iv) „kakukktojás
- Létezik || és = szemközti oldalpárja.

b) A paralelogramma átlója és középvonala

Áll.: A paralelogrammát az átlója két egybevágó Δ-re bontja – bizonyítsuk abból az ekvivalens definícióból, hogy a szemközti oldalak egyenlők.



Áll.: Középvonala (két szemközti oldalfelező pontot összekötő szakasz) párhuzamos és egyenlő a megfelelő oldalpárral – bizonyítsuk valamelyik ekvivalens definíció segítségével.

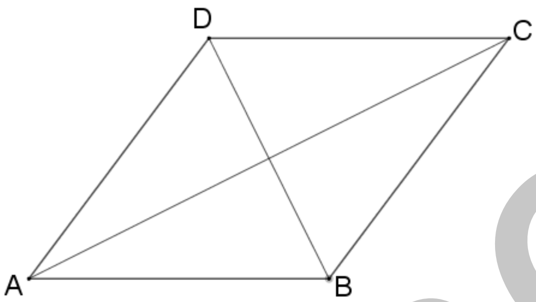


c) A paralelogramma szerkesztése:
$a=6$; $\alpha=45°$, $m_a=3$.

d) Speciális paralelogramma: rombusz és téglalap

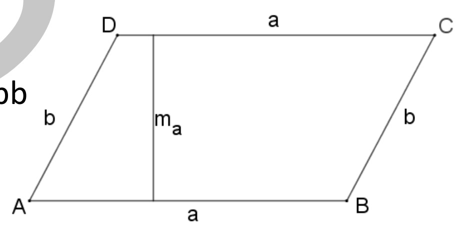
(i) A Rombusz olyan négyszög, mely oldalai egyenlők $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Olyan négyszög, mely átlói merőlegesen felezik egymást

(ii) A Téglalap olyan négyszög, mely szögei egyenlők $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Olyan négyszög, mely átlói egyenlők és felezik egymást



e) A paralelogramma területe: $a \cdot m_a$.

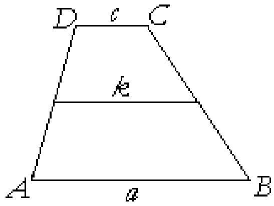
Egy paralelogramma oldala 7 egységgel nagyobb mint a hozzá tartozó magassága. $T=44$
Mekkora az oldal?

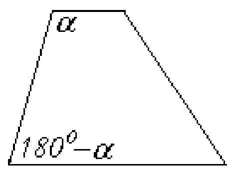


I/5) Trapéz

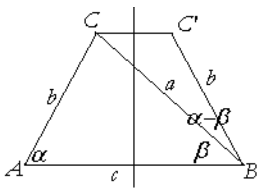
a) Def + elnevezése
magasság, szár, alapok

b) Tulajdonságok:
Egy száron található két szög: kiegészítő szögek





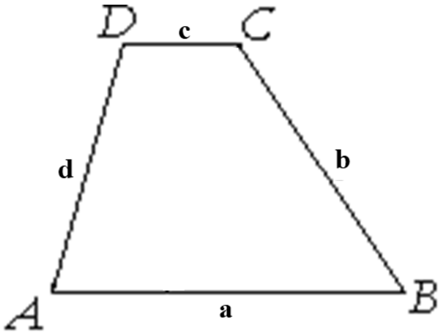
Középvonala:



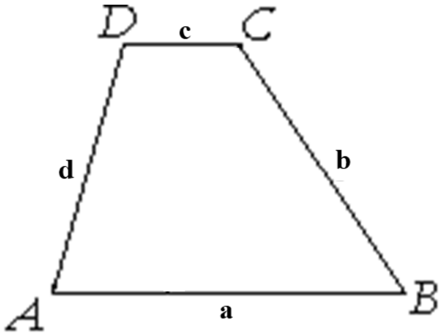
c) A szimmetrikus – avagy húrtrapéz

d) Szerkesztése – avagy a trapéznál a két kötelező ötlet

Adott: a;b;c;d. Kell a trapéz. ÖTLET:



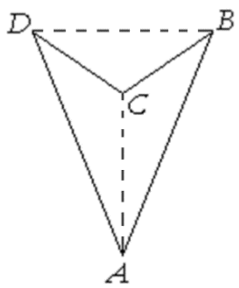
Adott: a+c; m;b;d Kell a trapéz. ÖTLET:



e) Terület $\frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{alapok\ összege}{2} \cdot magasság$ (Később belátjuk)

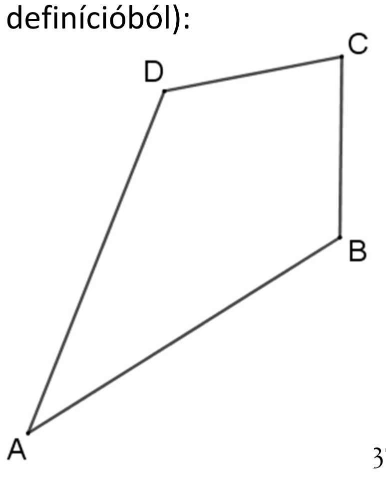
I/6) Deltoid

a) Def: két-két szomszédos oldala megegyezik
Ekvivalens definíciói:



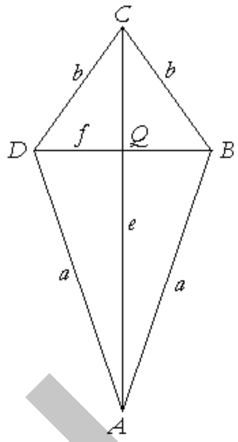
- egyik átlóra tengelyesen szimmetrikus négyszög
- az egyik átló a másikat merőlegesen felezi.

Megmutatjuk, hogy az egyik átló a másikat merőlegesen felezi (a definícióból):



b) Tulajdonságai: gyakorlatilag az ekvivalens definíciói tartalmazzák a tulajdonságokat.

c) Szerkeszd meg a deltoidot, ha adott *a*, *e* és *f*.



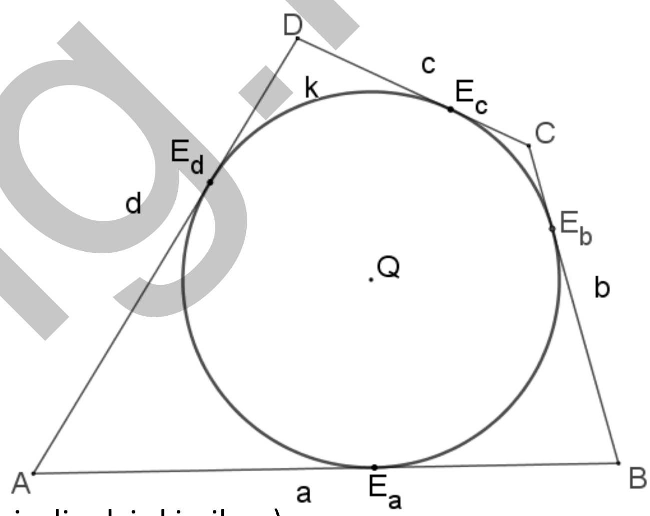
d) Területe: $e \cdot f/2$. („átlók szorzata per kettő”). Később belátjuk.

I/7) Az érintőnégyszögek

– azok a négyszögek, melyekbe egy – mind a négy oldalukat érintő – kör írható.

a) Tétel: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha két-két szemközti oldalának összege egyenlő.

Biz.: csak az egyik irány: ha egy négyszög érintőnégyszög $\Rightarrow$ szemközti oldalainak összege egyenlő.



b) Érintőnégyszögek:

Mondjunk érintőnégyszögeket (rajzoljunk is kicsiben)

Egy négyszög 3 oldala (valamelyik három): 5;6;7 Mekkora lehet a negyedik oldal, ha ő érintőnégyszög?

Vigyázat: az érintőtrapéz általában nem húrtrapéz! És a húrtrapézok közül is a legtöbb nem érintőtrapéz.

II. Síkidomok kerülete, területe

II/1) Kerület

Sokszögeknél: oldalak hosszának összege

Kör: $d \cdot \pi = 2r\pi$ (d= átmérő – „diaméter”)

5 egység oldalú négyzet kerülete:

5 egység sugarú kör kerülete:

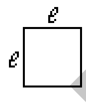
A „legnagyobb nehézség”: mértékegység átszámítás:

5 dm = cm

5 dm^2 = cm^2

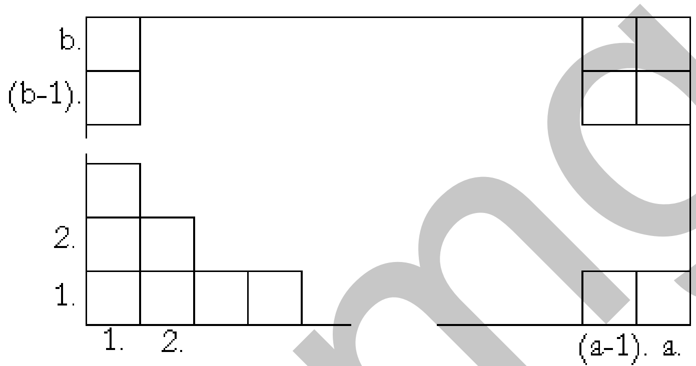
II/2) A területszámítás fölépítése (precíz bizonyítások híján)

a) Egység: az egység oldalú négyzet.

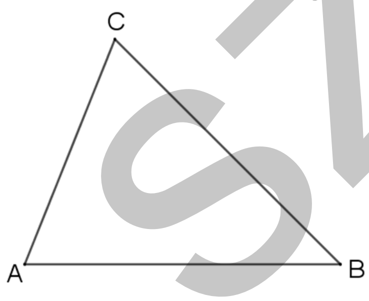


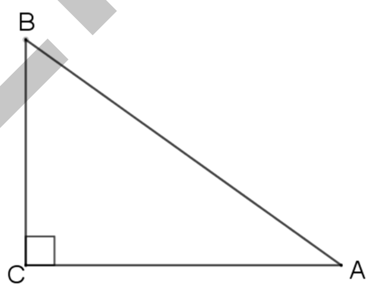
b) Alapgondolat: téglalap területe
Mi csak az egész oldalhosszúságú téglalapok területének számítását bizonyítjuk – vagyis az oldalra pontosan egész számszor mérhető föl az egység.

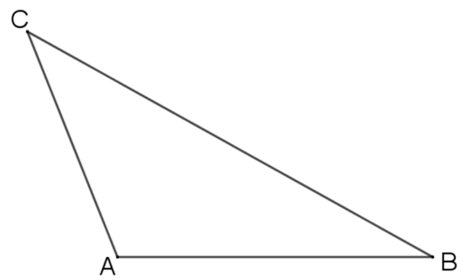
Tehát a két oldal „a” és „b”, egész számok.



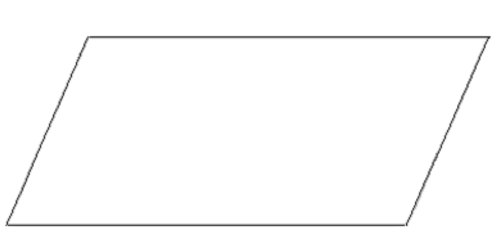
c) Háromszög területe (ebből minden egyéb sokszög területe levezethető).







d) Paralelogramma területe: $a \cdot m_a$
Pl.: a=5 cm; m_a=1,7 cm

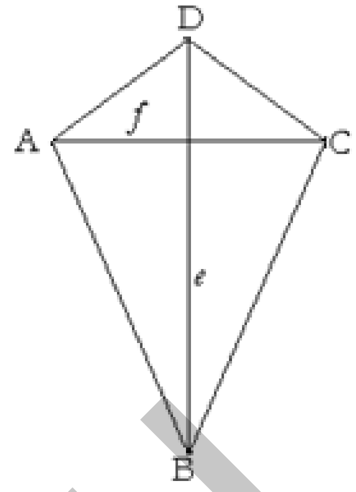


e) Egyéb alakzatok

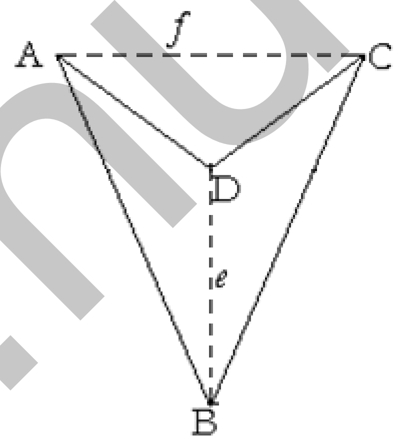
(i) Deltoid

T=e·f/2

Konvex:



Konkáv:

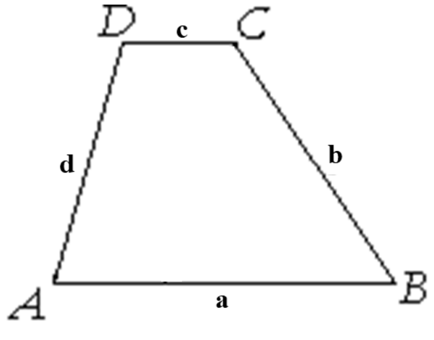


Egy deltoid egyik átlója 5 egységgel rövidebb a másiknál. Ha ezt a rövidebbet 1-1 centivel meghosszabbítjuk a két végén, akkor a terület 8 egységnégyzettel nő. Mekkorák az átlók?

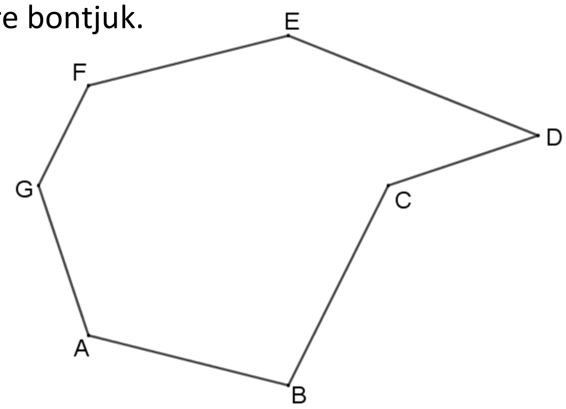
(ii) Trapéz

$$T=\frac{(a+c)m}{2}$$

Biz.:



(iii) Sokszög területe: háromszögekre bontjuk.



(iv) A kör területe

$T=r^2\pi$.

Egy körlapból kivágok egy negyed akkora sugarú, koncentrikus kört. A maradék körsáv területe 188,50 m^2. Mekkora volt az eredeti kör sugara?

II/3) Mértékegység- és területszámítások

a) Mértékegység átszámítások – aránypárok, ahogy radiánt szögbe…

http://interaktivmatematika.hu/matematika-8-osztaly/mertekegysegek-atvaltasa-8-osztalyban/

mm $\rightarrow$ cm $\rightarrow$ dm $\rightarrow$ m $\rightarrow$ km

6 dm = cm.   450 mm = dm

$mm^2 \rightarrow cm^2 \rightarrow dm^2 \rightarrow m^2 \rightarrow km^2$

1 dm^2 = mm^2 15 cm^2= m^2

2,5m^2 = cm^2 34 mm^2 = dm^2.

b) Egyéb

Paralelogramma: $a=5$, $T=30$, $m_b=7$.

$m_a=?$ $b=?$

Trapéz: az egyik alapja 5 cm, a magassága 8 cm. A területe 80cm^2. Mekkora a másik alap?

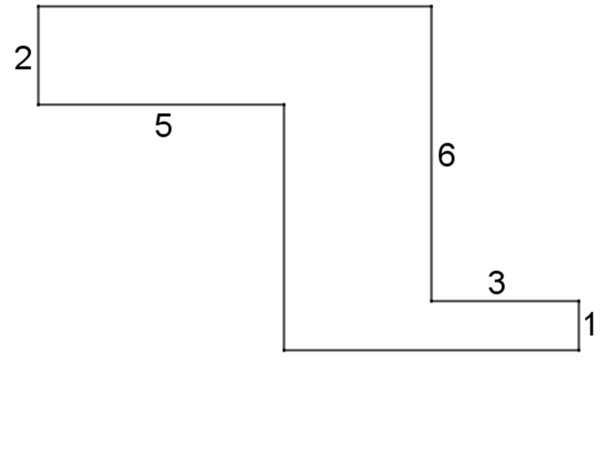
Adatokból ⇒ számolt adat ⇒ „képletek" alkalmazása
Számolt adatból ⇒ kiindulási adat ⇒ Egyenlet felállítása

Egy deltoid egyik átlójának duplájánál 2 m-rel hosszabb a másik átló. A területe 20 m^2. Mekkorák az átlók?

II/4) Gyakorlás

a) Darabolás (vagy kivonás)

Mekkora a csupa derékszögekből álló síkidom területe?



b) Határozd meg a hiányzó adatot (Δ c oldala, m_c magasság és Terület)

c oldal	**m_c magasság**	**Terület**
10 cm	8 cm	
	30 m	150 m^2
25 dm		87,5 dm^2

c) Mekkora a Δ területe, ha oldalai 5, 12 és 13 cm és a beírt kör sugara 2 cm.

d) Egy ABC$_\Delta$ szögei: α=45°, β=60°. m_c=5, a≈5,77 cm. Mekkora a területe?

e) Kör

(i) Egy 10 dm sugarú körlapból kivágunk egy vele koncentrikus 3 dm sugarú körlapot. Mekkora a területe a maradék körsávnak?

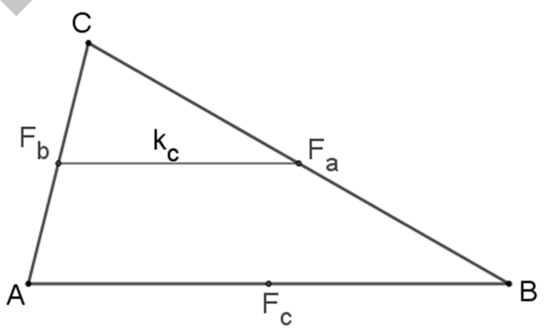
(ii) Egy négyzetből kivágok egy lehető legnagyobb körlapot. A veszendőbe ment sarkok összterülete 958,41 cm^2. Mekkora volt a négyzet oldala?

(iii) Egy körből kivágok egy 60°-os cikket. A maradék területe 1047,2 dm^2. Mekkora a kör sugara?

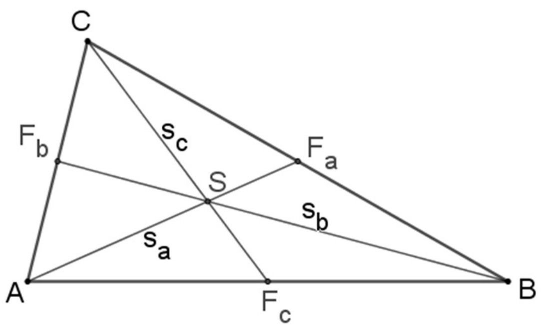
II/5) Osztópontok

a) Emlékeztető:

Háromszög középvonala és tulajdonsága



Háromszögben a súlyvonal, súlypont: egyelőre csak bizonyítás nélkül!



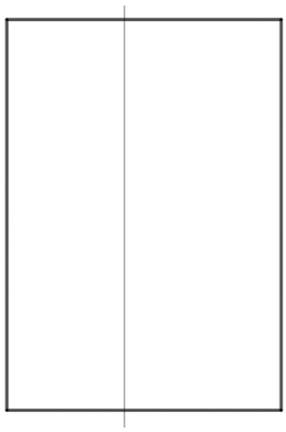
b) Arányok

24 kg mákot két család között 3:5 arányban osztottunk el. Mennyi jutott az egyik, és a másik családnak?

Egy 138 m hosszú kötelet 4 : 9 : 10 arányban felszabdalunk három részre. Mekkorák a darabok?

138

Egy 84 egység alapú téglalap alapját 3:4 arányban osztva kettévágom a téglalapot a másik oldallal párhuzamosan.



Mekkora lesz a keletkezett két téglalap területe, ha a másik oldal 200 egység volt?

Mekkora a keletkezett területek aránya?

A kisebbik területe hogy aránylik az eredeti téglalapéhoz? És a nagyobbiké?

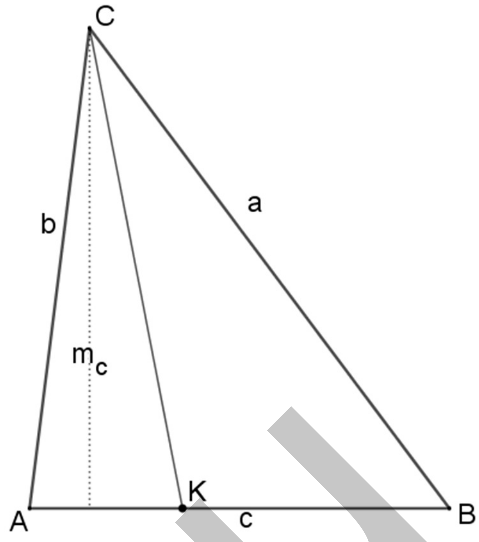
Ha nem tudjuk a másik oldal hosszát, akkor hogy aránylik a két keletkezett darab területe egymáshoz, illetve a nagy téglalapéhoz?

Ha egyik oldal hosszát sem tudjuk, hogy alakulnak ezek az arányok?

c) Háromszögek darabolása csúcson keresztül

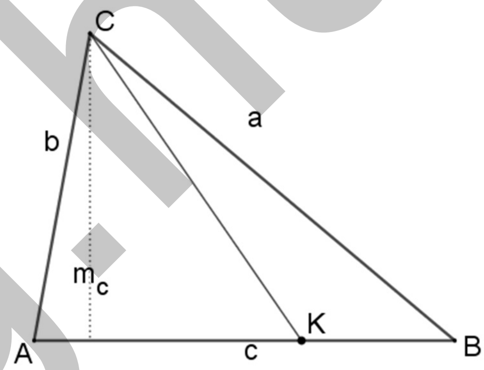
AB=24 m_c=18 $\Rightarrow$ T=

AK : KC=3:5
Mekkora a két leszelt háromszög területe?
Hogy aránylanak egymáshoz, illetve a nagy háromszög területéhez?



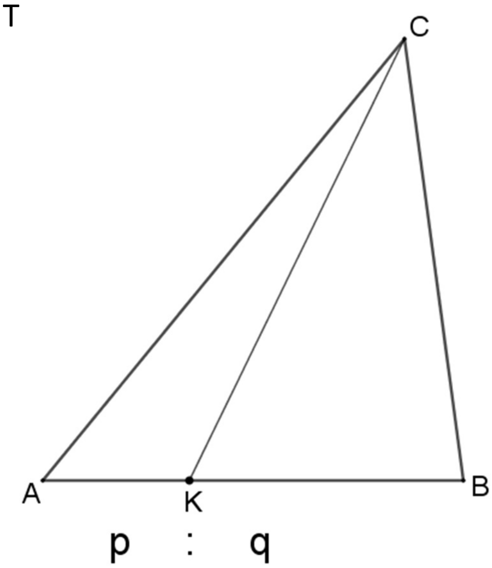
AB=c magasság= m_c $\Rightarrow$ T=

AK : KC=7:3
Mekkora a két leszelt háromszög területe?
Hogy aránylanak egymáshoz, illetve a nagy háromszög területéhez?



AK : KC = p : Q A nagy háromszög területe: T

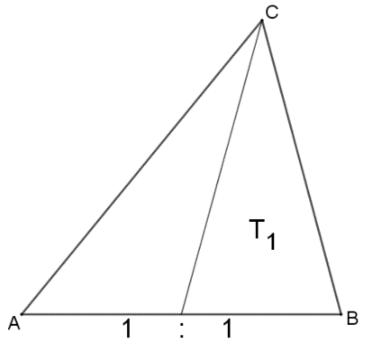
A két leszelt háromszög területe?
Hogy aránylanak egymáshoz,
illetve a nagy háromszög területéhez?



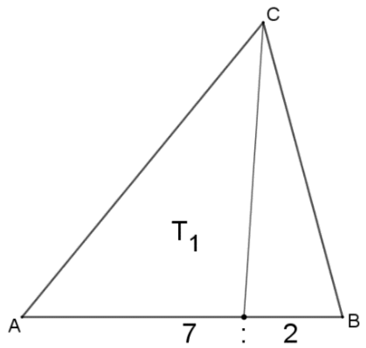
d) Osztópont az alapokon

Mekkora T_1 (a leszelt Δ területe), ha az egész Δ területe:

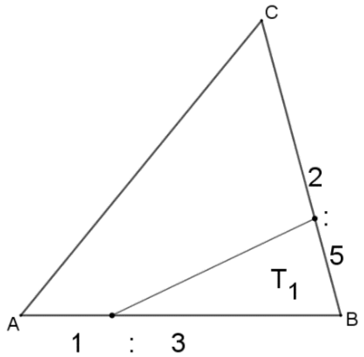
T=8



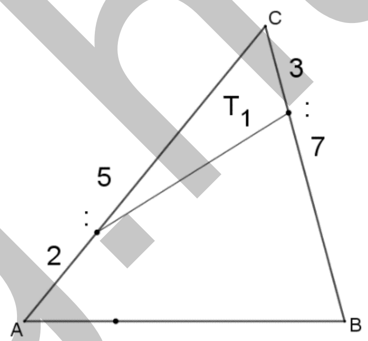
T=18



T= 56

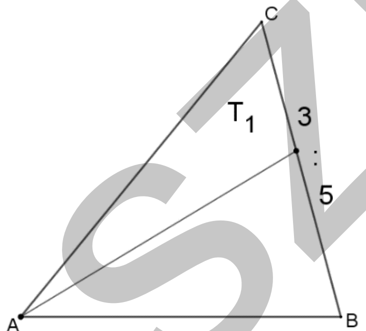


T=105

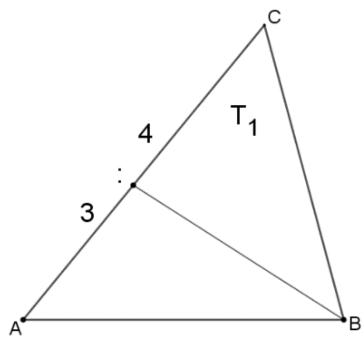


e) Adott a leszelt Δ területe, mekkora a nagy Δ területe?

T_1 =12

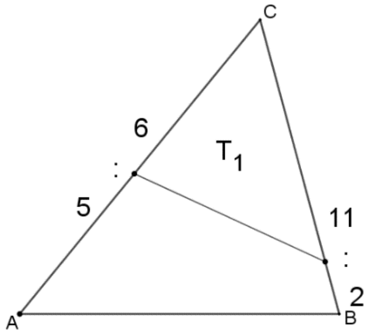


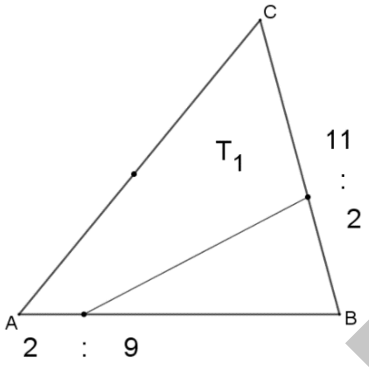
T_1 =20



Adott a leszelt terület, mekkora a nagy Δ területe?

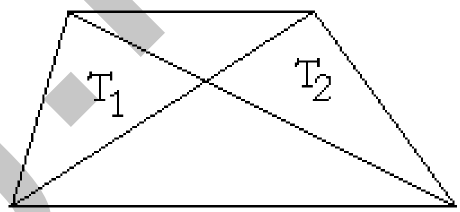
$T_1 = 25$ $T_1 = 20$





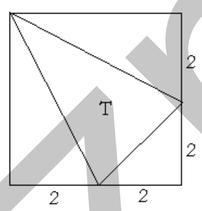
f) Ötlet:

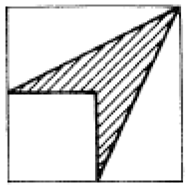
Mutasd meg, hogy $T_1 = T_2$.



g) Ötlet:

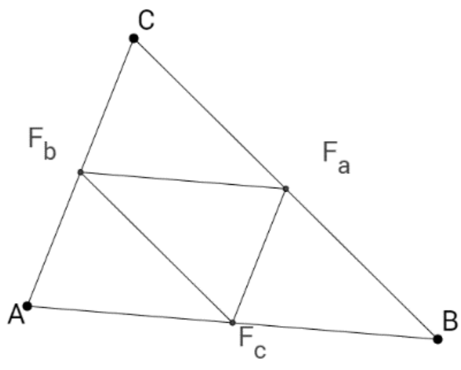
(Az ábrán a pontok felezőpontok.)



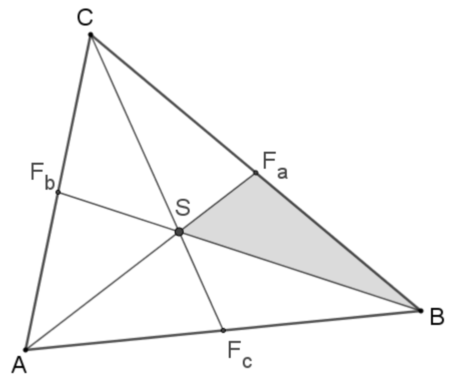


h) Δ középvonalai súlyvonalai.

(i) Mekkorák a keletkezett Δ-ek területei (középvonalakkal daraboltuk).



(ii) Súlyvonalak által lemetszett darabok



II/6) Nagyítás – kicsinyítés

a) Egy négyzet oldalát megháromszoroztuk.

Hogy változott a kerület?

Hogy változott a terület?

b) Egy négyzet oldalának vettük a kétötödét.

Hogy változott a kerület?

Hogy változott a terület?

c) Egy téglalap oldala: a és b.

Hogy változik a terület a következő változtatásokkal

2a, 2b $\rightarrow$

a, 2b $\rightarrow$

2a, 5b $\rightarrow$

$\frac{a}{3}$; $\frac{b}{3}$ $\rightarrow$

Adj lehetséges változtatásokat, ha a terület a következő féleképp változott:

9T :

6T :

$\frac{T}{16}$:

$\frac{2}{3}$T :

II/7) Rácssokszögek, sokszögek a koordinátasíkon