

Matematika

Algebra Munkatankönyv

v2.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2021

SZNGG.FU

Tartalomjegyzék

Algebra A: Számolás	9
I. Összeadás – kivonás	9
I/1) Összeadás	9
I/2) Táblázatban	9
I/3) Kivonás	9
I/4) Táblázatban	11
I/5) Negatív számok hozzáadása számhoz, illetve kivonása számból.....	11
I/6) Táblázatban	12
I/7) Egy kis gyakorlás, amilyen formában találkozni szoktunk ezekkel a műveletekkel.....	13
I/8) Nagyobb számok összeadása, kivonása	13
II. Szorzás	13
II/1) Hogy is szorzunk fejben?	13
II/2) Nullára, nullákra végződő számokkal történő szorzás, és gyakorlás.....	14
II/3) Gyakorlás	14
II/4) 10-és 20 közötti számok szorzása.....	14
II/5) A négyzetszámok 0-25-ig – reggeli ima után érdemes ezeket is elmondani.....	15
II/6) Az 5-re végződő számok négyzete.....	16
II/7) Az eddigiek gyakorlása.....	16
III. Prímszámok – és a hatványozás alapjai	17
III/1) A prímszámok definíciója – 7. osztályos szemmel.....	17
III/2) Hatványok - prímszámhatványok	18
III/3) Hatványok és négyzetszámok gyakorlása visszakereséssel.....	19
III/4) Azonos alapú hatványok szorzata.....	19
III/5) Ismétlő gyakorlás	20
IV. Egy kis számelmélet – alapfokon	21
IV/1) Oszthatósági szabályok.....	21
IV/2) Osztások egyjegyű számokkal - fejben	23
IV/3) Számok prímfelbontása	23
IV/4) Két szám LNKO-ja (LegNagyobb Közös Osztója) alapszinten.....	26
IV/5) Újabb oszthatósági szabályok.....	28
IV/6) A 0-ra végződés.....	29
IV/7) A legkisebb közös többszörös - LKKT	29
IV/8) Fejben osztás gyakorlása – a tanár által kijelölt sorokat végezd el.....	30
V. Törtek.....	31
V/1) Fajtáik.....	31
V/2) Egymásba alakításuk: Id. később!.....	31
V/3) Egyszerűsítünk – de MIÉRT?	31

V/4)	Összeadásuk-kivonásuk: Közös nevezőre hozás: bővítés: az LKKT-ig!	32
V/5)	Számok, törtek reciproka: első nekifutásra	37
V/6)	Törtek szorzása	37
V/7)	Gyakorlás	39
V/8)	Osztás	39
V/9)	Mi is a reciprok? Második nekifutásra! Törtnél, egész számnál, tizedes törtnél	40
V/10)	Gyakorlásuk	41
V/11)	Egyéb - törtes feladatok	42
VI.	A tizedes törtek	44
VI/1)	Szorzás – osztás 10-zel, 100-zal stb.	44
VI/2)	Mit is jelentenek a tizedes törtek	44
VI/3)	Műveletek valódi törtté alakítás nélkül	46
VI/4)	Átalakítás valódi törtté	48
VII.	Zárójelek kezelése	50
VII/1)	Alapvető műveleti sorrend	50
VII/2)	Tagok és tényezők	51
VII/3)	Zárójelek kezelése egész számoknál: zárójelfölbontás	52
VIII.	Emeletes törtek és ismétlés	53
VIII/1)	Emeletes törtek	53
VIII/2)	Írd föl a következő számok összes osztópárját	54
VIII/3)	Végezd el – ne feledd: egyszerűsítés! A HF ezekből van	54
IX.	Ismétlés – lásd HF füzet	61
A számok áttekintése		62
I.	A természetes számok	62
I/1)	Definíció - alapok	62
I/2)	A tízes és a kettes számrendszer – bevezetve	63
I/3)	Műveletek a természetes számokon, a természetes számok körében	65
I/4)	Egy kis számelmélet, gyermekded módon	65
I/5)	Osztók	69
I/6)	Négyzetszámok	72
I/7)	Számok osztóinak „keresgelése”	73
I/8)	LNKO - LKKT	77
I/9)	Gyakorló példák	82
II.	Az egész számok	85
II/1)	Definíció és alapok	85
II/2)	A részhalmazokról bővebben	86
II/3)	A – mindig – elvégezhető műveletek az egész számok körében	87
III.	A Racionális számok és egy kicsit a „Valós” számokról	87
III/1)	Definíció - alapok	87

III/2)	Az eddig megismert számhalmazok viszonya.....	88
III/3)	Felírásuk: törtként, vagy tizedes törtként	89
III/4)	Az elvégezhető műveletek a racionális számok testében	89
III/5)	A valós számokról	89
IV.	Egy kicsit a halmazokról	90
IV/1)	Halmaz megadása	90
IV/2)	Venn-diagrammal történő rajzolás.....	91
IV/3)	Halmaznak minden típusból csak egy eleme van	91
IV/4)	Üres halmaz és a halmazok metszete.....	91
IV/5)	Felrajzolásuk	91
V.	Gyakorlás	92
V/1)	Eldöntendő kérdések (Igaz/Hamis).....	92
V/2)	Venn-diagramok „feltöltése” elemekkel	92
VI.	Egyéb műveletek a racionális számok testében	92
VI/1)	Szám és ellentettje.....	92
VI/2)	Szám és abszolútértéke	92
VI/3)	Szám egészrésze	93
VI/4)	Szám törtrésze	94
VI/5)	Szám „előjel-függvénye”, szignuma.....	95
VII.	JELEK JELEK JELEK	96
VII/1)	Jelek neve - írd mellé a pontozott vonalra kézzel	96
VII/2)	Halmazok jelölése, megadása.....	97
VII/3)	Számhalmazok kapcsolata; kivonás.....	97
VII/4)	Egyéb jelek a számoknál	97
VII/5)	Gyakorlásuk	97
Hatványozás.....		101
I.	Definíció és azonosságok.....	101
I/1)	Bevezetés.....	101
I/2)	A „hatvány” definíciója.....	101
I/3)	Hatvány szorzat alakba – szorzat hatványalakba	101
I/4)	Azonos alapú hatványok szorzata	102
I/5)	Azonos alapú hatványok hányadosa és az <i>egész kitevők</i>	102
I/6)	Azonos alapú, <i>egész kitevőjű</i> hatványok szorzata, hányadosa	104
I/7)	Szorzat hatványa	106
I/8)	Tört hatványa	108
I/9)	Hatvány hatványa.....	108
I/10)	Összeg, különbség hatványa.....	111
I/11)	Gyakorlás	112
II.	Számok normálalakja	114

II/1)	Bevezető	114
II/2)	Tíz hatványai	114
II/3)	Számok normálalakban.....	114
II/4)	Normál alakban felírt számok helyiértékesen kiírva	115
II/5)	A normál alak definíciója	115
II/6)	Írd át normálalakba	115
II/7)	Műveletek normálalakra hozott számokkal	116
A betűk használata.....		120
I.	Az „általában történő” felírások	120
I/1)	Bevezetés	120
I/2)	A műveletek kommutativitása (felcserélhetősége), sorrendje, zárójelezés.....	120
I/3)	Kifejezés Értelmezési Tartománya	121
I/4)	Írjuk föl jelekkel	121
I/5)	Számok jelzése.....	121
I/6)	Írd föl „általában”	123
I/7)	Változások, kapcsolat, „százalék”	123
I/8)	Ügyes felírások:	124
II.	Műveletek algebrai kifejezésekkel: zárójelek felbontása.....	124
II/1)	Elnevezések	124
II/2)	Helyettesítési érték.....	126
II/3)	Egynemű kifejezések összevonása	126
II/4)	Egytagúak szorzása, osztása – és zárójelfelbontás.....	127
III.	Egyszerűbb egyenletek megoldása.....	128
III/1)	A mérlegelv bevezetése.....	128
III/2)	Egyenletek felállítása, megoldása	129
IV.	Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval – zárójel-felbontás	133
IV/1)	Szemléltetések.....	133
IV/2)	Egytagú tényezővel többtagú szorzása	133
IV/3)	Helyettesítési érték - behelyettesítés.....	135
IV/4)	Egytagok osztása - egyszerűsítés.....	135
IV/5)	Egyenletmegoldás.....	136
V.	Több tag szorzása több taggal	136
V/1)	Bevezetés, szemléltetés	136
V/2)	Több tagúak szorzása.....	137
V/3)	„Kéttag” összegének, különbségének négyzete: oda-vissza tudni.....	142
V/4)	Gyakorlás	144
Szorzáttá alakítás, egyenletek		145
I.	Műveletek algebrai kifejezésekkel: szorzattá alakítás	145

I/1)	Csak szám emelhető ki	145
I/2)	Betű is kiemelhető.....	145
II.	A teljes négyzet.....	150
II/1)	Szorzáttá alakítás előtt mindent kiemelünk!.....	150
II/2)	Több mindenre kell figyelni	151
III.	Egy különleges alak: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$	151
III/1)	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ „á plusz b négyzet mínusz b négyzet”	151
III/2)	Visszafelé: alakítsd szorzattá	152
III/3)	Egy nehéz, egyelőre intuíciót kívánó alak.....	154
IV.	Egyenlet megoldás	155
IV/1)	Egyszerűbb egyenletek	155
IV/2)	Törtös egyenletek	156
IV/3)	Egyenlet = állítás	161
IV/4)	Szorzáttá alakítással: elsőfokúakra bontva - alap.....	164
IV/5)	Szorzáttá alakítással: elsőfokúakra bontva - gyakorlás	164
V.	Algebrai törtek.....	168
V/1)	Algebrai tört.....	168
V/2)	Kezelésük:	168
V/3)	ÉT (Értelmezési Tartomány) és egyszerűsítés	169
V/4)	Gyakorlás	169
V/5)	ÉT-ra figyelni	171
V/6)	Törtek összeadása, kivonása, szorzása, osztása: vond össze, csak egy tört legyen	172
VI.	Szöveges egyenletek	175
VI/1)	Alapvető gondolatok	175
VI/2)	Szöveges egyenletek.....	175
VII.	Ismétlés	179
VII/1)	Végezd el a műveletet – összevonás – csökkenő fokszám	179
VII/2)	Szorzáttá alakítás	179
VII/3)	Egyenletek	180

SZNGG.FU

Algebra A: Számolás

I. Összeadás – kivonás

I/1) Összeadás

Természetes számok: 0,1,2,3,... Egész számok: 0;1;-1;2;-2; ... -80; ... 300; ...

Írd le az első öt 0-ra végződő természetes számot:

Írd le a három legnagyobb nem természetes egészet:

I/2) Táblázatban

Töltsük ki a táblázatokat – soronként: 1. sor, majd 2. sor stb.

Töltsd ki a táblázatot. Így kezdődik: 5+8						
+	8	27	41	63	79	96
5						
17						
43						
76						
89						
97						

Töltsd ki a táblázatot. Így kezdődik: 5+5						
+	5	13	89	47	77	58
5						
13						
47						
58						
77						
89						

Így kezdődik: 159+27						
+	27	35	84	57	96	79
159						
388						
572						
696						
887						
948						

Így kezdődik: 75+135						
+	135	268	309	458	539	778
75						
137						
256						
289						
348						
497						

I/3) Kivonás

Ha a buszon öten utaznak, majd a megállóban nyolc ember leszállnak, akkor a következő megállóban hány embernek kell felszállni, hogy senki se legyen a buszon?

Ötlet: Kivonás előtt már rögtön tudod, hogy mi lesz a végeredmény előjele...

Ezek után amennyiben a kisebből a nagyobbat vonjuk ki, akkor a következőképpen járunk el: a nagyobbikból kivonjuk a kisebbet, majd kirakjuk a megfelelő előjelet.

pl: $23-55 = -32$ helyett a következőt végezzük el: $55-23 = 32$, így $23-55 = -32$

Ha nagyobbat vonunk ki, rögtön mondjuk „mínusz” és „harminckettő”

$$80-27 =$$

$$45-59 =$$

$$0-35 =$$

$$18-74 =$$

Egy kis elmélet:

Melyik az a szám, amit 36-hoz kell adni, hogy 70-et kapjunk?

Melyik az a szám, amelyet 30-hoz kell adni, hogy 78-at kapjunk.

Mennyi $78 - 30$?

„A $78 - 30$ az a szám, amit 30-hoz kell adni, hogy 78-at kapjunk, vagyis a 48.”

Mennyi $40 - 24$?

„ $40 - 24$ az a szám, amit 24-hez kell adni, hogy 40 legyen, ez pedig a 16.”

Ha fejben számolunk, akkor valójában így gondolkodunk: $40 - 24$ -et megvizsgáljuk úgy, hogy mennyit kell a 24-hez adni, hogy 40 legyen...

Számold ki fejben a következőket:

$$78 - 37 =$$

$$100 - 80 =$$

$$35 - 21 =$$

$$43 - 27 =$$

Mondóka: $12 - 7$ az a szám, melyet a 7-hez kell adni, hogy 12 legyen, ez pedig az 5.

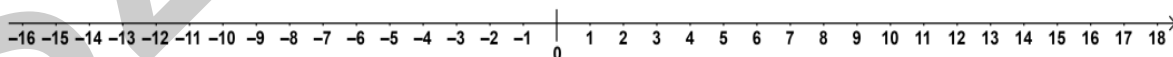
„a mínusz b az a szám, amit b-hez kell adni, hogy a-t kapjunk”

$$a - b = c, \text{ mert } b + c = a$$

Mondjuk el a mondókát a $15 - 9$ műveletre, és írjuk is le:

Számegyenes használata

Nagyon lényeges, hogy számegyenesen el tudjuk képzelni az egészet:



Adjunk a -5 -höz 8-at: $-5 + 8 = 3$

A -5 -től 8-at lépünk jobbra.

Vonjunk ki a -5 -ből 8-at: $-5 - 8 = -13$

A -5 -től 8-at lépünk balra.

$$4 + 13 =$$

$$4 - 13 =$$

$$-7 + 9 =$$

$$-7 - 9 =$$

I/4) Táblázatban

Így kezdődik: 149-0						
-	0	6	41	65	77	119
149						
138						
63						
42						
11						
7						

Így kezdődik: 138-3						
-	2	13	44	66	105	143
138						
107						
59						
37						
28						
15						

Végezzük el a következő összeadásokat:

$$-42+81 = 81-42 = 29$$

$$\text{mivel: } 42 < 81$$

$$-42+42 = 0$$

$$\text{mivel: } 42 = 42$$

$$-42+29 = 29-42 = -(42-29) = -13$$

$$\text{mivel: } 42 > 29$$

VAGYIS a „nagyobb” számból érdemes mindig kivonni a „kisebbet”! (Amelyik abszolútértéke nagyobb! <? abszolútérték? Ez mi is? >).

Egy nemnegatív szám abszolútértéke önmaga, egy negatívé a -1 -szerese:

$$|27| = 27$$

$$|-27| = 27$$

$$|0| = 0$$

$$|-1| = -1$$

Így: $-10+219 = 219-10=...$						
+	219	108	77	49	28	17
-10						
-17						
-43						
-61						
-76						
-98						

Így: $-74+329$						
+	329	207	86	65	24	3
-74						
-115						
-186						
-217						
-258						
-359						

I/5) Negatív számok hozzáadása számhoz, illetve kivonása számból

Negatív hozzáadása

$$5+(-6) = 5-6 = -1$$

$$13+(-22) = 13-22 = -9$$

$$8+(-14) =$$

$$15+(-28) =$$

$$-17+(-9) = -17-9 = -26$$

$$-13+(-22) = -13-22 = -35$$

$$-27+(-16) =$$

$$-17+(-35) =$$

Hogy érdemes elképzelni?

A negatív szám: „tartozás”. $8+(-14)$: Kezdetben volt 8 aranyunk, és kaptunk 14 arany tartozást... Így hat arannyal fogunk tarozni, vagyis amink marad: -6 .

„Ha negatív számot adunk valamihez, akkor az ellentettjét vonjuk ki.”

Mi egy szám ellentettje? A -1 -szerese: pl.

5 ellentettje -5

-8 ellentettje 8

0 ellentettje 0

$6 \leftrightarrow$

$-13,4 \leftrightarrow$

$x \leftrightarrow$

Egy pozitív szám kivonását úgy is érthetjük, hogy az „ellentettjének” a hozzáadása:

$$23-56 = 23+(-56)$$

Negatív szám kivonása

$$5-(-6) = 5+6 = 11$$

$$-5-(-6) = -5+6 = 1$$

$$-12-(-25) = -12+25 = 13$$

$$72-(-28) = 72+28 = 100$$

$$-72-(-28) = -72+28 = -44$$

$$14-(-39) = 14+39 = 53$$

Hogy érdemes elképzelni?

A negatív szám: „tartozás” elvétele. A -6 az hat arany tartozást jelent. Ha „elveszik” a tartozást, az azt jelenti, hogy kaptunk hat aranyat.

Vagyis $5-(-6) = 5+6 = 11$.

Ellentett: egy szám ellentettje a -1 -szerese. $5 \leftrightarrow -5$ $-7 \leftrightarrow 7$

Negatív számból negatív szám kivonása

„Ha negatív számot vonunk ki valamiből, akkor az ellentettjét adjuk hozzá.”

$$5-(-6) =$$

$$-16-(-9) =$$

$$22-(-13) =$$

$$-11-(-15) =$$

Összefoglalás:

$$53+78 =$$

$$53+29 =$$

$$53-78 =$$

$$53-29 =$$

$$-53+78 =$$

$$-53+29 =$$

$$-53-78 =$$

$$-53-29 =$$

$$-53-(-78) =$$

$$-53-(-29) =$$

I/6) Táblázatban

Ahogy szoktuk...						
+	-12	26	-37	44	-60	86
45						
-37						
55						
-67						
72						
-85						

Ahogy szoktuk...						
-	-12	26	-37	44	-60	86
45						
-37						
55						
-67						
72						
-85						

- I/7) Egy kis gyakorlás, amelyen formában találkozni szoktunk ezekkel a műveletekkel
Van egy formai hiba a táblázatban – találd meg, javítsd!

Írd be a végeredményt!		
$3+8 =$	$3-8 =$	$-3+8 =$
$-3+(-8) =$	$-3-(-8) =$	$-2+10 =$
$2-10 =$	$-2-10 =$	$-2-(-10) =$
$-2+(-10) =$	$-14-19 =$	$14- -19 =$
$21-29 =$	$-32+(-13) =$	$-3-(-20) =$
$7-25 =$	$-7-25 =$	$-21+24 =$
$8-(-25) =$	$12+(-9) =$	$14-37 =$
$-8-73 =$	$-83+1 =$	$-5+12 =$
$-23-(-30) =$	$0-36 =$	$-8+(-32) =$
$45-48 =$	$-20-10 =$	$14-(-20) =$

- I/8) Nagyobb számok összeadása, kivonása

Így: $-160+118=$						
+	118	-227	481	-562	729	-879
-160						
255						
-437						
578						
-699						
861						

II. Szorzás

- II/1) Hogy is szorzunk fejben?

Szorozzuk össze a két számot 8×12

Ötlet: $8 \cdot 12 = 8 \cdot 10 + 8 \cdot 2 = 80 + 16 = 96$

$9 \cdot 26 = 9 \cdot 20 + 9 \cdot 6 = 180 + 54 = 234$

De figyelem: a fejedben így legyen: $9 \cdot 26 = 180 + 54 = 234$.

Vagyis: „Rögtön jelenjék meg a fejedben a két összeadandó szám!”

$5 \cdot 18 =$

$8 \cdot 15 =$

$6 \cdot 17 =$

$7 \cdot 18 =$

Ne feledjük: Szorzat utolsó jegye: a tényezők utolsó jegye szorzatának utolsó jegye.

Szorzás: $2 \times 10=$						
×	10	11	12	13	15	16
2						
0						
4						
7						
8						
9						

Szorzás: $3 \times 11=$						
×	11	13	14	16	17	19
3						
4						
5						
6						
8						
9						

Módszer: $12 \cdot 41 = 10 \cdot 41 + 2 \cdot 41 = 492$

$16 \cdot 34 = 10 \cdot 34 + 6 \cdot 30 + 6 \cdot 4 = 544$

De figyeljem: a fejedben így legyen: $12 \cdot 41 = 410 + 82 = 492$.

Vagyis: „Rögtön jelenjék meg a fejedben a két összeadandó szám!”

Szorzás: $2 \times 23 =$						
×	23	25	27	28	33	35
2						
4						
5						
12						
21						
34						

II/2) Nullára, nullákra végződő számokkal történő szorzás, és gyakorlás

Szorzás: $10 \times 7 =$			
×	7	12	25
10			
100			
20			
200			
40			
400			
50			

Szorzás: $10 \times 17 =$			
*	17	48	87
10			
100			
20			
200			
40			
400			
50			

II/3) Gyakorlás

Szorzás: $2 \times 41 =$						
*	41	45	56	76	87	98
2						
3						
5						
6						
9						
8						
7						

II/4) 10-és 20 közötti számok szorzása

a) A módszer:

$13 \cdot 17 = 100 + 10 \cdot (3 + 7) + 3 \cdot 7 = 221$

$16 \cdot 18 = 100 + 10 \cdot (6 + 8) + 6 \cdot 8 = 288$

$12 \cdot 13 = 100 + 50 + 6 = 156$

$17 \cdot 13 = 100 + 100 + 21 = 221$

$16 \cdot 15 = 100 + 110 + 30 = 240$

$12 \cdot 13 =$

$15 \cdot 18 =$

$11 \cdot 19 =$

$17 \cdot 16 =$

$15 \cdot 15 =$

b) Gyakorlásuk

Még véletlenül se próbáljuk „bemagolni” a táblázatot!

Így: $14 \times 11 =$								
×	11	13	15	12	17	19	18	16
14								
11								
13								
17								
19								
15								
16								
18								

II/5) A négyzetszámok 0-25-ig – reggeli ima után érdemes ezeket is elmondani...

$0^2 =$	$1^2 =$	$2^2 =$	$3^2 =$
$4^2 =$	$5^2 =$	$6^2 =$	$7^2 =$
$8^2 =$	$9^2 =$	$10^2 =$	$11^2 =$
$12^2 =$	$13^2 =$	$14^2 =$	$15^2 =$
$16^2 =$	$17^2 =$	$18^2 =$	$19^2 =$
$20^2 =$	$21^2 =$	$22^2 =$	$23^2 =$
$24^2 =$	$25^2 =$	$30^2 =$	$40^2 =$
$50^2 =$	$60^2 =$	$70^2 =$	$80^2 =$
$90^2 =$	$100^2 =$	$1000^2 =$	

Töltsük ki a táblázatot

Így: $19 \times 16 =$								
×	16	20	11	15	13	19	14	17
19								
15								
11								
13								
17								
14								
12								
20								
18								

II/6) Az 5-re végződő számok négyzete

Módszer: elhagyjuk az 5-öt, a maradék számot megszorozzuk az eggyel nagyobb, majd mellé írunk 25-öt:

$$(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25 \text{ (Később belátjuk, hogy tényleg hibátlan a módszer...)}$$

$$125^2 = 12 \cdot 13 \text{ és melléírva } 25: 15625 \quad 115^2 =$$

$$35^2 = \quad 75^2 =$$

$$135^2 = \quad 145^2 =$$

$$155^2 = \quad 185^2 =$$

Érdekes nem „kimondani”, csak diktálni a végeredményt:

$$185^2 = \text{háromszáznegyvenkettő huszonöt: } 34225$$

II/7) Az eddigiek gyakorlása

A szorzás gyakorlása								
×	12	13	11	15	16	18	14	19
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								

Négyzeszámok	
Szám	Négyzete
12	
17	
14	
13	
19	
15	
17	
18	

$$9^2+12^2 =$$

$$14^2+17^2 =$$

$$13^2+15^2 =$$

5-re végződők négyzete	
szám	négyzete
25	
65	
95	
125	
145	
165	
195	
205	

Kedves gyerekek! Egy kis nyelvtan. A „gólya” elipszilonnal, és az „osztója” pontos j-vel írandó! Hasonlóképpen az „átfogója”, „befogója”. ☺ Kíméljétek matektanáraitokat!

III. Prímszámok – és a hatványozás alapjai

III/1) A prímszámok definíciója – 7. osztályos szemmel

Def: A prímszámok (régén törzsszámnak hívták őket) azok az (1) 1-nél nagyobb (2) természetes számok, (3) melyeknek az 1-en és önmagukon kívül több osztójuk nincs.

(Vegyük észre: három fontos jelzőt adtunk!!!!!!!!!!)

- 1-nél nagyobb
- természetes számok
- 1-en és önmagukon kívül más osztójuk nincs.

Tehát prímszámok pl.: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...31; 101 stb.

Nem prímszám: 0, 1, 4, 33 stb.

Összetett szám: azok a (az egynél nagyobb) természetes számok, amelyeknek nem csak az 1 és önmaguk az osztójuk. (Egynél nagyobb nem prímek.)

Tehát a 0 és az 1 nem összetett!

A prímszámvadászat taktikája: bekalickázzuk az első prímszámot, a 2-öt, majd kiikszeljük az összes többszörösét (aminek ő osztója...). Bekarikázzuk a következő első nem kiikszeltet (ez lesz a 3), majd annak kiikszeljük az összes többszörösét. Aami már kipottyant egyszer, azt már kár újra kiikszelni, agyonlőni. És így tovább. *A prímszámvadászt tehát abból áll, hogy épp őket nem lőjük ki – csak befogjuk ☺.*

Prímszám vadászat									
Valójában csak befogás, mert nem lőhetők ☹									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Feladat: Három különböző prím összege: 122. Mekkora a legkisebb közülük, és miért annak kell lennie a legkisebbnek? Mi lehet a másik kettő?

III/2) Hatványok - prímszámhatványok

- a) Hatványok definíció nélküli gyakorlása:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad (-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = \quad 7 \cdot 7 \cdot 7 =$$

Hatvány szorzat alakban – illetve szorzat hatvány alakban

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

Ki hogyan számolta ki? Ügyesen:

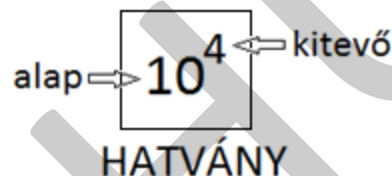
$$3^5 = \quad (-7)^3 = \quad 0^6 = \quad 12^2 =$$

$$1^{2022} = \quad (-10)^5 = \quad 10 \cdot 10 \cdot 10 = \quad 10^7 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \quad (-95)^2 = \quad 5^4 = \quad (-6)^3 =$$

„Oktalanság a köbön” = $(\text{Oktalanság})^3$.

- b) Elnevezések



Az alapot „emeljük” a kitevőre

5^2 : „öt a négyzeten”	„öt a másodikon”	„öt ad kettő”
5^3 : „öt a köbön”,	„öt a harmadikon”	„öt ad három”
5^4 :	„öt a negyediken”	„öt ad négy”
10^5 :		

- c) 2 hatványai – *fejből tudni*

$$2^2 = \quad 2^3 = \quad 2^4 = \quad 2^5 =$$

$$2^6 = \quad 2^7 = \quad 2^8 = \quad 2^9 =$$

$$2^{10} = \quad 2^{11} = \quad 2^{12} =$$

Vegyük észre: pozitív szám hatványai pozitívak,
Negatív szám ps hatványa pozitív, pt hatványa negatív.

- d) Az 1. hatvány – pl: „öt az elsőn”

$$2^1 = ?$$

$$2^4 = 16 \quad 2^3 = 8 \quad 2^2 = 4 \quad 2^1 = \quad 5^1 = ? \quad 5^4 = 625 \quad 5^3 = 125 \quad 5^2 = 25 \quad 5^1 =$$

Definíció: Bármely szám első hatványa önmaga.

Azért kell definiálni, mert 1-szer nem szorzunk össze semmit...

- e) A 0. hatvány:

Def.: Bármely nem 0 szám 0. hatványa 1.

$$5^0 = 1 \quad (-2,3)^0 = 1 \quad 1^0 = 1 \quad \left(-\frac{12}{31}\right)^0 = 1$$

0^0 : NINCS ÉRTELMEZVE: ☹

Mondóka: „Nullával nem osztunk és 0^0 nincs értelmezve”

A 3-4-5-6-7-8-9 hatványai – fejből tudni

$$\begin{array}{lllll} 3^2 = & (-3)^3 = & (-3)^4 = & 3^5 = & 3^6 = \\ 5^2 = & 5^3 = & (-5)^4 = & (-5)^5 = & \\ 6^2 = & 6^3 = & 7^2 = & 7^3 = & \\ 8^2 = & 8^3 = & & & \\ 9^2 = & 9^3 = & & & \end{array}$$

Miért nem tanuljuk meg fejből a 4 hatványait?

$$\begin{array}{llll} 4^2 = & 4^3 = & 4^4 = 2 & 4^5 = \\ (-4)^3 = -64 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = -2^6 = -64 \\ \text{Így } 4^5 = \end{array}$$

III/3) Hatványok és négyzetszámok gyakorlása visszakereséssel

Feladat: a leírt számokhoz felírni, minek a hatványa v. teljes négyzete. Amennyiben egyik sem, akkor ott azt kell beírni, hogy NA (nincs adat).
Ha kettő v. többféle megoldás is jó, akkor mindegyiket

Szám	Előállítás
225	
81	
128	
400	
381	
169	
625	
343	

Szám	Előállítás
324	
169	
144	
289	
512	
246	
121	
243	

III/4) Azonos alapú hatványok szorzata

(Röviden – később többet foglalkozunk vele!)

$$2^3 \cdot 2^5 = ? \text{ Számoljuk ki: } 2^3 \cdot 2^5 = (\cdot \cdot \cdot) (\cdot \cdot \cdot \cdot) =$$

$$3^4 \cdot 3^2 = ? \text{ Számoljuk ki: } 3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)(3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6.$$

$$2^6 \cdot 2^{10} =$$

$$3^{40} \cdot 3^{23} =$$

Ez már azért sok. Hány 3-ast szorzunk össze összesen:

$$5^2 \cdot 5 \cdot 5^{18} \cdot 5^{30} =$$

$$10^5 \cdot 10^8 =$$

$$\text{Így } 6^{13} \cdot 6^{87} =$$

Kimondjuk a következő szabályt (később bebizonyítjuk):

Mondóka: Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Rövid gyakorlása:

$$5^2 \cdot 5^7 =$$

$$2^4 \cdot 2^3 =$$

$$8 \cdot 16 =$$

$$32 \cdot 64 =$$

$$8 \cdot 128 =$$

III/5) Ismétlő gyakorlás

A prímszámok definíciója:

Írd le az első 11 prímszámot:

$$-45 - 67 =$$

$$(-14)^2 =$$

$$-73 - (-18) =$$

$$13 \cdot 12 =$$

$$(-2)^5 =$$

$$16^2 =$$

$$13 \cdot 19 =$$

$$3^4 =$$

$$18 \cdot 12 =$$

$$(-5)^4 =$$

$$14 \cdot 17 =$$

$$21^2 =$$

$$7^3 =$$

$$2^8 =$$

$$36 \cdot 9 =$$

$$324 =$$

Melyik az 50 utáni első prímszám?

$$135^2 =$$

$$7^0 =$$

$$13^2 =$$

$$4^3 =$$

$$12^2 =$$

$$225 =$$

$$3^5 =$$

$$17^2 =$$

$$11^2 =$$

$$(-5)^3 =$$

$$-23 - (-27) =$$

$$35^2 =$$

Mondóka: Azonos alapú hatványokat... Írd le a teljes mondatot!

$$2^4 =$$

$$3^4 =$$

$$4^4 =$$

$$5^4 =$$

$$3^0 =$$

$$-27 - (-14) =$$

$$46 \cdot 8 =$$

$$0^1 =$$

Összeszorozom az első 100 prímet. Milyen számra végződik?

$15 \cdot 13 =$

$14 \cdot 18 =$

$5^5 =$

$9^3 =$

$19^2 =$

$125 =$

$3^6 =$

$18 \cdot 15 =$

$0^0 =$

$45 + (-68) =$

$18^2 =$

$216 =$

$2^8 \cdot 2^{10} =$

$11 \cdot 19 =$

$14^2 =$

$19^2 =$

$-45 - 82 =$

$(-3)^3 =$

$10^5 \cdot 10^6 =$

$2^7 =$

IV. Egy kis számelmélet – alapfokon

IV/1) Oszthatósági szabályok

a) Oszthatóság

**Mondóka: 3 osztja a 12-t, mert van olyan egész, amivel megszorozva 3-at, 12-őt kapok, ez pedig a 4.
3 nem osztja a 16-ot, mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a 3-at 16-ot kapnék.**

(Az oszthatóság definíciója.: Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$.

Ekkor: $\dots a \mid b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \cdot a = b$)

Jele: $^3 \mid_{12}$ ill $^3 \nmid_{16}$

Javítsd, ha kell – mondd hozzá a mondókát...

$^5 \mid_{100}$

$^{-7} \mid_{-21}$

$^7 \mid_{10}$

$^0 \mid_5$

$^{12} \mid_{-72}$

$^7 \mid_0$

$^1 \mid_{23}$

$^0 \mid_0;$

Alap oszthatósági szabályok (és néhány összetett ☺)

2-vel: a páros számok, vagyis a kettővel oszthatóra végződők, pl.: 20, 56

3-mal: amely számjegyeinek összege osztható 3-mal, pl.: 168.

4-gyel: melynek a két utolsó jegyéből alkotott szám osztható 4-gyel.
Pl.: 504, 5700, 956.

5-tel: amely 0-ra vagy 5-re végződik. Az 5-tel oszthatóra végződők.

6-tal: amely páros és osztható hárommal (FIGYELEM, EZ „ÖSSZETETT OSZTHATÓSÁGI SZABÁLY”!)

8-cal: melynek utolsó három jegyéből alkotott szám osztható nyolccal.

9-cel: amely számjegyeinek összege osztható 9-cel. pl: 108

10-zel: amelyik 0-ra végződik. („ÖSSZETETT OSZTHATÓSÁGI SZABÁLY”)

11-gyel: melynek páros helyiértéken álló számjegyeinek összegéből kivonva a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegét, 11-gyel osztható számot kapunk (ami lehet nyilván 0 is!).

$$\text{Pl.: } 2563 \rightarrow (2+6)-(5+3) = 0$$

$$80817 \rightarrow (8+8+7)-(0+1) = 22$$

25-tel: melynek a két utolsó jegyből alkotott szám osztható 25-tel

Pl.: 300, 575.

b) Gyakorlásuk:

Mennyivel osztható:

- 123456789
- 545454
- 4500
- 3564

Írj a megfelelő helyre számokat, hogy:

- 23__5__ 6-tal legyen osztható – és a legkisebb legyen
- 23__5__ 4-gyel legyen osztható
- 23__5__ 9-cel legyen osztható ÉS a lehető legkisebb legyen!
- 23__5__ 5-tel legyen osztható ÉS a lehető legnagyobb legyen
- 23__5__ 8-cal legyen osztható
- 20__5__ 11-gyel legyen osztható: figyelem, lehet 0 v. 11 a különbség!

c) Prímfelbontás az oszthatósággal megsegítve

$$396 =$$

$$715 =$$

$$540 =$$

$$495 =$$

IV/2) Osztások egyjegyű számokkal - fejben

a) Maradék nélkül - Végezd el fejben:

$$\begin{array}{llll} 98:2 = & 140:4 = & 840:7 = & 842:2 = \\ 330:6 = & 189:9 = & 434:7 = & 520:8 = \\ 315:9 = & 1225:5 = & & \end{array}$$

b) Maradékkal:

$$\begin{array}{ll} 93:6 = 15 \text{ maradék } 3 & 254:7 = \\ 343:5 = & 645:9 = \\ 341:4 = & 1751:8 = \end{array}$$

IV/3) Számok prímfelbontása

a) Alap - írásban - oszlop-diagrammal

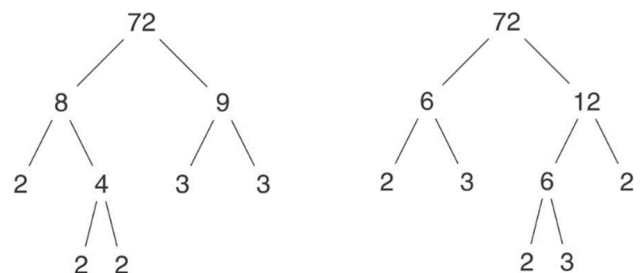
$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Vagyis: } 98 = 2 \cdot 7^2. \quad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Vagyis: } 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Bontsuk fel a következőket:

$$52 = \quad 150 =$$

$$168 = \quad 486$$

b) Haladó - okosan - nem csak prímekkel lehet haladni, de nagyobb számokkal is
Fa-diagrammal

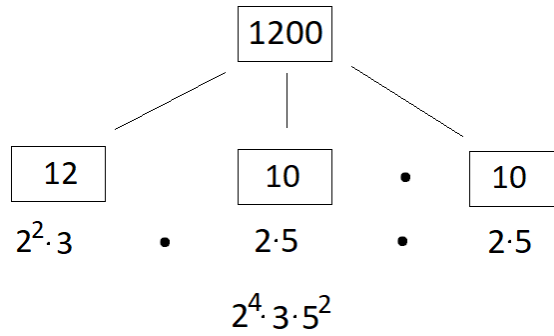


Az összes végződést leírjuk növekvő sorrendben, majd hatványalakban:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

Még ügyesebben

Pl.: $1200 = 12 \cdot 10 \cdot 10 = (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ A prímeket növekvő sorrendben kell írni!



„In medio stat virtus” – érdemes általában úgy szétszedni, hogy a tényezők „közel legyenek egymáshoz”. Pl: $180 = 10 \cdot 18$ jobb, mint $180 = 3 \cdot 60$ de a legjobb: $180 = 12 \cdot 15$.

Lehet háromfelé is bontani rögtön: $360 = 4 \cdot 9 \cdot 10$, majd tovább a tényezőket.

Bontsd fel:

490 =

1440 =

Diagram nélkül, de annak a logikáját használva:

9800 =

5400 =

225000 =

256000 =

1690 =

6400 =

196 000 =

- c) Az egyértelmű prímfölbontás bevezetése – a „Páros ország”
Páros-ország - vagyis csak páros számok szerepelnek.
Aki páratlan számot mond ki, azt számúzik, és megeszik a farkasok...

24/8 - nem végezhető el, mert:

$$96 =$$

Mindenki bontsa föl a 60-at ameddig lehet.

$$60 =$$

Bonts föl „felbonthatatlanokra” a 120-at: annyi tényezőre, amennyire bírod.

$$120 =$$

- d) Az egyértelmű prímfölbontás a természetes számok körében
Figyelem: a természetes számok körében azok, amelyek már tovább nem bonthatók – azok a prímek!
Bontsd fel 60-at „felbonthatatlanokra”:

A Számelmélet alaptétele: Bármely 1-nél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható föl prímszámok szorzatára, sorrendtől történő eltérés erejéig. (Bárhogy állunk is neki a fölbontásnak, a végeredmény ugyanaz lesz...)

$$\text{Pl.: } 5100 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 2^2 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$$

Ha azonban (szigorúan monoton) növekvő sorrendbe tesszük a prímeket (az alapokat), akkor bárki, bármikor ugyanazt a végeredményt fogja kapni:
jelen esetben: $5100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

VEDD ÉSZRE, HOGY 4 GONDOLATBÓL ÁLL:

- $\forall$ 1-NÉL NAGYOBB TERMÉSZETES
- SORRENDTŐL VALÓ ELTÉRÉS EREJÉIG
- EGYÉRTELMŰN BONTHATÓ FÖL
- PRÍMEK SZORZATÁRA.

Egyenlő-e: $15 \cdot 128 \cdot 84 \cdot 72$ és $20 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 24 \cdot 32$ illetve $10^2 \cdot 19^4$ és $11^6 \cdot 8^5$.

Vagyis két szám akkor és csak akkor egyezik meg, hogyha a prímtényezőszököbontásukban (sorba téve a prímekeket) csak ugyanazok a prímekek szerepelnek, és ugyanazon a hatványon. Vagyis érdeemes kanonikus alakba hozni a prímfelbontást.

Kanonikus alak: a prímfelbontásban szigorún monoton növekvő sorrendben vannak a prím alapok.

Egyenlő-e ez a két szám?

$$2^7 \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 3^8 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$7^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot 3^2 \cdot 11^3 \cdot 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 2^8 \cdot 3^4$$

Párban vizsgáljátok meg, hogy ez a kettő szám egyenlő-e:

$$20 \cdot 45 \cdot 1000 \cdot 25 \cdot 32 \cdot 420 \quad \text{illetve:} \quad 9 \cdot 250 \cdot 28 \cdot 60 \cdot 64 \cdot 10 \cdot 125$$

Feladat: Két csoportba lehet-e bontani 1-től 31-ig a számokat úgy, hogy a két csoportban található számok szorzata megegyezzek?

Feladat: A kanonikus alakot tekintve mi kell ahhoz, hogy egy szám 4 db. 0-ra végződjék?

IV/4) Két szám LNKO-ja (LegNagyobb Közös Osztója) alapszinten

Mondjunk a 12-nek és a 18-nak közös osztóit.

Vegyük észre, hogy minden közös osztó osztja a legnagyobb közös osztót!

Mondjuk a 120-nak és a 180-nak közös osztóit

Vegyük észre, hogy minden közös osztó osztja a legnagyobb közös osztót!

$(12;18) = 6$, mert 6 a legnagyobb szám, amivel még osztani lehet mindkettőt.

* Lehet lépésenként: $(12;18) = 2 \cdot (6;9) = 2 \cdot 3 \cdot (1;3)$. Az $(1;3)$ -nál látható, hogy az 1 az LNKO.

$(60;84) =$

Olyan, mintha egy törtet egyszerűsíténénk, de leírnánk a számokat, amivel egyszerűsítünk:

$$\frac{12}{18} =$$
$$\frac{60}{84} =$$

Két vagy több szám LNKO-ja az a legnagyobb szám, mely még mindkettőt osztja.

$$(120; 180) = 6 \cdot (20;30) = 60(2;3) = 60 \cdot 1 = 60$$

$$(50;25) =$$

$$(7;35) =$$

$$(23;23) =$$

$$(1;12) =$$

$$(0;26) =$$

$$(36; 84; 54) =$$

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4} \text{ Tudniillik: } (75;100) = 25.$$

$$\frac{540}{504} =$$

$$(30;110) = 10 \leftrightarrow \frac{30}{110} =$$

$$(45;60) = \quad \leftrightarrow \quad (98;35) = \quad \leftrightarrow$$

Relatív prímek: ha két pozitív természetes szám LNKO-ja 1, akkor az a két szám „relatív prím”.

$$(24;35) =$$

$$(45;46) =$$

VAGYIS a kanonikus alakjukban nincs közös prím!!!

Úgy jelöljük őket, hogy pl.: $(9;20) = 1$ v. $(8;15) = 1$

Mondjunk relatív-prím párokat, amelyek maguk nem prímszámok!

Ha két szám relatív prím, akkor a kanonikus alakjukban nincs közös prímtenyező.

Három olyan szám, mely páronként nem relatív prím, de együtt már igen:

$$(10;15; \quad) = 1$$

Hogy készült ez a három szám?

Miért nem lehet három különböző prímszám szorzata a 15543?

IV/5) Újabb oszthatósági szabályok

Tétel: „Ha két relatív prím oszt egy számot, akkor a szorzatuk is osztja. Amennyiben nem relatív prímelek, úgy nem biztos az oszthatóság.”

$$3|36 \text{ és } 4|36 \text{ és } (3;4) = 1 \Rightarrow 12|36$$

$$5|80 \text{ és } 10|80 \nRightarrow 50|80$$

Mondjuk ki a 36-tal történő oszthatóság szabályát:

Mondjuk ki a 12-vel történő oszthatóság szabályát:

Mondjuk ki a 24-gyel való oszthatóság szabályát:

Rossz válasz:

Jó válasz:

Mondjuk ki a 45-gyel való oszthatóság szabályát:

Találjunk még ki ilyen oszthatósági szabályt:

Egészítsd ki úgy, hogy igaz legyen (a vonalakon 1-1 számjeggyel), és a szám a legkisebb négyjegyű szám legyen!

$$\begin{array}{r|l} 44 & _16_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & _91_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & _37_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & _91_ \end{array}$$

Egészítsd ki úgy, hogy igaz legyen (a vonalakon 1-1 számjeggyel), és a szám a legnagyobb legyen!

$$\begin{array}{r|l} 45 & 7_4_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 22 & _38_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & _7_ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & _2_ \end{array}$$

IV/6) A 0-ra végződés

Hogyan bontanád két alap-oszthatósági szabályra a 10-zel való oszthatóságot?

Hogyan bontanád két alap-oszthatósági szabályra az 100-al való oszthatóságot?

Nézzünk egy három 0-ra végződő számot.

$$128\ 000 = 128 \cdot (2 \cdot 5)^3$$

Vagyis a szám kanonikus alakját kell nézni!

Mikor végződik pontosan 3 db. 0-ra egy szám?

Ha a kanonikus alakjában:

2-es prímtényező:

5-es prímtényező:

De:

Vagyis ahány db (·)-ös párt találhatok benne.

Hány 0-ra végződik a következő szám:

$$x = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2$$

$$y = 125 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 36 \cdot 35$$

Ha x nem nullára végződik, akkor: $x \cdot 5^4 \cdot 2^6$: hány 0-ra végződik?

Nem tudni, de:

IV/7) A legkisebb közös többszörös - LKKT

Mondjunk többszöröseit a következő két számnak:

12 →

18 →

Két természetes szám LKKT-je alapszinten:

$[12;18] = 36$, mert 36 az a szám, mely mindkettőnek többszöröse, és a közös többszörösök közül legkisebb; vagyis az a legkisebb természetes szám, melynek még mindkettő osztója.

Jelen esetben a 12-őt 3-mal, a 18-at 2-vel kell megszorozni, és akkor ugyanazt a számot kapjuk.

A szorzatuk mindig többszörös, de nem mindig a legkisebb:

Mindkettőnek a többszöröse a $12 \cdot 18 = 216$, de ez nagyon nagy.

Ebben az esetben a 12-őt 18-cal, a 18-at pedig 12-vel szoroztuk meg.

Ravasz módszer, láttuk már, működött az LNKO-nál is:

$$[12;18] = 2 \cdot [6;9] = 2 \cdot 3 \cdot [2;3] = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) = 36$$

$$[540;240] =$$

$$[312;168] =$$

Tétel: Relatív prímek lkkt-je: a szorzatuk. Ha nem relatív prímek, akkor az lkkt kisebb a szorzatuknál!

$$[19;20] =$$

$$[33;35] =$$

Két tört közös nevezőre történő hozásakor használjuk ezt.

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{18} =$$

Nyilván lehetett volna a közös nevező a $12 \cdot 18$, de az nagyon nagy:

$$\frac{7}{12} - \frac{5}{18} = \frac{\quad}{216} - \frac{\quad}{216} =$$

Nehezebb, elszámolhatóbb és el is számoljuk... és még egyszerűsíteni is kell utána...

$$\frac{11}{70} - \frac{3}{20} =$$

IV/8) Fejben osztás gyakorlása – a tanár által kijelölt sorokat végezd el

Ahol ismerjük az alap- v. összetett oszthatósági szabályt, ott előtte vizsgáljuk meg, hogy maradék nélkül megvan-e az osztó az osztandóban!

$$45:9 =$$

$$56:7 =$$

$$108:9 =$$

$$84:7 =$$

$$168:24 =$$

$$171:9 =$$

$$350:7 =$$

$$319:11 =$$

$$95:5 =$$

$$255:15 =$$

$$98:7 =$$

$$133:7 =$$

$$115:5 =$$

$$51:3 =$$

$$112:16 =$$

$$91:7 =$$

$$207:9 =$$

$$57:3 =$$

$$216:9 =$$

$$85:5 =$$

$$48:3 =$$

$$84:2 =$$

$$98:14 =$$

$$45:3 =$$

$$54:3 =$$

$$72:6 =$$

$$270:9 =$$

$$87:3 =$$

$$145:5 =$$

$$42:3 =$$

$$96:6 =$$

$$76:4 =$$

$$168:8 =$$

$$152:8 =$$

$$247:13 =$$

$$345:15 =$$

$$242:11 =$$

$$240:16 =$$

$$315:15 =$$

$$195:5 =$$

$$324:9 =$$

$$252:7 =$$

$$205:5 =$$

$$369:9 =$$

$$134:2 =$$

$$258:3 =$$

$$468:6 =$$

$$385:11 =$$

$$288:12 =$$

$$495:15 =$$

$$286:13 =$$

$$456:12 =$$

$$294:14 =$$

$$352:16 =$$

$$91:13 =$$

$$585:45 =$$

Egészítsd ki még egy számjeggyel – a vonalra írva – úgy, hogy az osztás egész számot eredményezzen, majd végezd is el fejben az osztást:

$$\begin{array}{llll} __96:8 = & __39:3 = & 5__2:6 = & 4__6:24 = \\ __64:12 = & __32:36 = & 8__5:45 = & 7__4:18 = \\ __96:44 = & __35:55 = & 4__8:24 = & 1__7__:90 = \end{array}$$

V. Törtek

V/1) Fajtáik

Valódi tört: $\frac{7}{8}$

Áltört: $\frac{6}{5}$ (vagyis 1 v. annál nagyobb abszolút értékű.)

Vegyes tört: $4\frac{3}{5}$ Ennél a nagysága látszódik: $4\frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

Tizedes tört: 0,25

$$\text{Vegyük észre: } 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \quad 5,32 = 5\frac{32}{100} = 5\frac{8}{25}$$

Hogy melyiket szeretjük: VALÓDI TÖRT (Ezt kis piros szívecskékkel körbevenni!)

A valódi és áltört közt sok különbség nincs KÖZÖNSÉGES törtnek hívjuk őket.

A tizedes tört ritkán hasznos – de sajnos a számológépeknél, fizika, kémia órán ezeket használjuk, illetve számegyenesen történő ábrázoláskor.

V/2) Egymásba alakításuk: ld. később!

V/3) Egyszerűsítünk – de MIÉRT?

- a) ♥ Néhány nagyon kivételes helyzettől eltekintve, ha meglátunk egy törtet, akkor azonnal egyszerűsítjük. ♥

MIÉRT? Azért, mert ha nem egyszerűsítünk, akkor a törtek a műveletek során elkezdenek nőni, dagadni, olyan nagyra, hogy már nem tudunk velük mit kezdeni.

- b) Hogy is egyszerűsítünk?

Alapvetően rögtön a számláló és nevező LNKO-jával:

$$\frac{24}{40} = \frac{3}{5} \quad \text{A } (24;40) = 8\text{-cal egyszerűsítünk.}$$

De az sem nagy baj, ha több lépésben egyszerűsítünk – csak fárasztóbb:

$$\frac{24}{40} = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{40}_{20}} = \frac{12}{20} = \frac{\cancel{12}^6}{\cancel{20}_{10}} = \frac{6}{10} = \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{10}_5} = \frac{3}{5}$$

- c) Egyszerűsítsünk: ha lehet, ne sok lépésben

Cél: a számláló és a nevező relatív prímé váljon!

$$\frac{120}{168} = \quad \quad \quad \frac{80}{176} =$$

$$\frac{210}{378} =$$

$$\frac{450}{75} =$$

$$\frac{540}{52} =$$

$$\frac{1200}{2000} =$$

$$\frac{625}{500} =$$

$$\frac{45}{15} =$$

Írd föl a következő számokat tört alakban:

$$0,24 =$$

$$2,5 =$$

$$4 =$$

$$-3 =$$

V/4) Összeadásuk-kivonásuk: Közös nevezőre hozás: bővítés: az LKKT-ig!

- a) „Csakis azonos nevezőjű valódi törtet tudunk összeadni és kivonni. Vagyis összeadás és kivonás előtt „közös”, vagyis ugyanolyan nevezőjű törtté kell őket alakítani.”

A legjobb (vagyis a legkisebb) közös nevező a két (v. több) nevező LKKT-je!
Ez a művelet a bővítés, de előtte az egyes törtet MINDIG EGYSZERŰSÍTJÜK.

Hogyan bővítünk?

Egy törtet úgy bővítünk, hogy a számlálóját és a nevezőjét is ugyanazzal az egynél nagyobb természetes számmal szorozzuk meg. Ezáltal a tört értéke nem változik.

- b) Végezd el a kijelölt bővítést:

$$\frac{6}{35} = \frac{\quad}{70}$$

$$\frac{6}{35} = \frac{42}{\quad}$$

$$\frac{13}{25} = \frac{\quad}{100}$$

Bővítsd 3-mal a következő törtet: $\frac{12}{7} =$

Bővítsd 10-zel a következő törtet: $\frac{3}{16} =$

- c) Vegyes törtek átalakítása valódi törtté:

$$2\frac{3}{4} = ? \text{ Ez a következőt jelenti: } 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Egyszerűbben – nyilván ugyanígy: } 2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Alakítsd át (vigyázat a negatívnál!):

$$3\frac{4}{7} =$$

$$15\frac{8}{13} =$$

$$-13\frac{9}{13} =$$

$$-10\frac{7}{18} =$$

d) Néhány példa

$$\frac{14}{20} + \frac{56}{24} = \frac{7}{10} + \frac{7}{3} = \frac{21}{30} + \frac{70}{30} = \frac{91}{30}$$

$$\frac{12}{8} - \frac{91}{70} = \frac{3}{2} - \frac{13}{10} = \frac{15}{10} - \frac{13}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Mit is tettünk? Először egyszerűsítettük a törteket, majd utána végeztük el a közös nevezőre hozást. A végén még egyszerűsíteni is tudtunk!!!

$$\frac{14}{105} - 2 = \frac{2}{15} - \frac{30}{15} = -\frac{28}{15}$$

Figyelem: a 2 is racionális szám, vagyis törtként is felírható: $2 = \frac{2}{1} = \frac{30}{15}$

$$\text{Negatívnál: } -13\frac{9}{13} = -\left(3\frac{9}{13}\right) = -\left(\frac{178}{13}\right) = -\frac{178}{13}$$

e) Gyakorlásuk

Azonos – vagy egyszerűsítés után azonos nevezőjű törtek.

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{4}{7} + \frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{12} =$$

$$\frac{4}{13} - \frac{10}{26} =$$

$$\frac{20}{4} - \frac{5}{4} =$$

$$\frac{10}{15} - \frac{35}{21} =$$

$$\frac{4}{30} - \frac{5}{75} + \frac{56}{120} =$$

$$\frac{25}{30} - \frac{49}{42} =$$

$$\frac{26}{169} - \frac{20}{52} =$$

$$\frac{33}{121} - \frac{24}{44} =$$

Egyik törtet kell csak bővíteni:

$$\frac{5}{12} + 2 =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{11}{15} =$$

$$\frac{7}{6} - \frac{7}{18} =$$

$$\frac{15}{4} - \frac{25}{64} =$$

$$\frac{5}{9} - \frac{35}{243} =$$

$$\frac{11}{15} - 4 =$$

Egyszerűsítés után jó közös nevező kell

$$\frac{56}{105} - \frac{2}{9} =$$

$$\frac{49}{70} + \frac{8}{15} =$$

$$\frac{22}{48} - \frac{14}{80} =$$

$$\frac{33}{45} + \frac{6}{70} =$$

Vegyes törtek összeadása - kivonása

$$3\frac{6}{45} + 5\frac{8}{10} =$$

$$18\frac{15}{18} - 13\frac{9}{15} =$$

Mindenféle tört – ha lehet, egyszerűsítsünk!

Emlékezz: relatív prímek lkkt-je a szorzatuk. Ha nem relatív prímek, akkor az lkkt kisebb a szorzatuknál!

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} =$$

$$\frac{10}{12} + \frac{33}{21} =$$

$$\frac{14}{15} - \frac{15}{16} =$$

$$\frac{10}{13} + \frac{7}{16} =$$

$$\frac{6}{11} - \frac{11}{9} =$$

$$\frac{7}{8} - \frac{7}{5} =$$

$$\frac{14}{13} - \frac{13}{14} =$$

$$\frac{12}{11} - \frac{11}{18} =$$

$$\frac{20}{130} - \frac{30}{160} =$$

$$\frac{31}{20} - \frac{31}{7} =$$

$$\frac{15}{12} - \frac{35}{28} =$$

$$\frac{21}{12} - \frac{13}{20} =$$

$$\frac{42}{54} - \frac{60}{144} =$$

$$\frac{96}{144} - \frac{225}{100} =$$

$$\frac{289}{102} - \frac{90}{80} =$$

$$\frac{7}{15} + \frac{9}{20} =$$

$$\frac{24}{35} - \frac{14}{25} =$$

$$\frac{85}{34} - \frac{80}{48} =$$

$$\frac{45}{150} - \frac{35}{84} =$$

$$\frac{70}{63} - \frac{560}{480} =$$

f) Gyakorlás

$$\frac{15}{12} - \frac{10}{40} =$$

$$\frac{15}{12} - 2\frac{30}{45} =$$

$$\frac{65}{26} - \frac{50}{30} =$$

$$1\frac{12}{36} + 2\frac{34}{51} =$$

$$\frac{65}{40} - \frac{122}{80} =$$

$$\frac{84}{35} - 2\frac{22}{33} =$$

$$3\frac{42}{105} + 2\frac{30}{36} =$$

$$\frac{243}{45} - \frac{225}{30} =$$

$$\frac{39}{169} + \frac{22}{121} =$$

$$\frac{51}{289} - \frac{200}{400} =$$

$$\frac{289}{51} - 3\frac{20}{80} =$$

$$\frac{45}{108} - 2\frac{54}{243} =$$

$$\frac{78}{26} - \frac{250}{450} =$$

$$\frac{33}{88} + \frac{38}{57} =$$

$$\frac{72}{60} - \frac{126}{112} =$$

$$\frac{162}{27} - \frac{242}{55} =$$

$$22\frac{42}{98} + 3\frac{15}{45} =$$

$$\frac{625}{200} - \frac{225}{105} =$$

$$\frac{52}{169} + \frac{44}{121} =$$

$$\frac{70}{196} - \frac{800}{225} =$$

SZNGG.FU

V/5) Számok, törték reciproka: első nekifutásra

- a) Egy valódi tört reciprokán a következőt értjük: az előjele marad, a számlálót és nevezőt pedig felcseréljük.

FIGYELEM: CSAK VALÓDI (v. ÁL-) TÖRT RECIPROKÁT VESSZÜK!

$$\frac{25}{13} \leftrightarrow \frac{13}{25} \quad \text{Vigyázat, nem egyenlőséget rakunk ki!}$$

$$-\frac{4}{7} \leftrightarrow -\frac{7}{4}$$

Vigyázat: vegyes törtnél először át kell alakítani: $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} \leftrightarrow \frac{5}{13}$

Tizedes törtnél is: $0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25} \leftrightarrow \frac{25}{6}$

- b) Egész szám reciproka:

7 reciproka - Mivel $7 = \frac{7}{1}$, így 7 reciproka: $\frac{1}{7}$

Vegyük észre, hogy a 7 úgy is felírható tehát, hogy $\frac{7}{1}$.

$$2 \leftrightarrow \frac{1}{2}$$

V/6) Törték szorzása

- a) Vegyes törttel nem szorzunk! Csakis valódi törtet szorzunk valódi törttel. Ha tehát vegyes törtet látunk, akkor először át kell alakítani valódi v. áltörtté.

Valódi törtet úgy szorzunk, hogy a számlálót megszorozzuk a számlálóval, a nevezőt a nevezővel.

Figyelem: A vegyes tört veszélyes!

Előtte azonban lefelé és keresztbe is egyszerűsítünk, ha lehet.

$$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{5} = \left(2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{15}$$

$$3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5} = \left(3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1\frac{4}{5}\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{5} = 2$$

Keresztbe egyszerűsítettünk – szorzásnál lehet.

De lehet „lefele” is egyszerűsíteni: $\frac{15}{21} \cdot \frac{8}{26} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{91}$

- b) Tehát - keresztbe is lehet egyszerűsíteni a szorzásnál

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{28}{55} = \frac{12}{77} \quad \text{A toronyépítés a mérnök feladata: } \frac{5}{7} \cdot \frac{28}{45} = \frac{20}{21}$$

Ilyet ne tegyünk! A kétszeres áthúzás már nagyon kuszává teszi, ezért az tilos, illetve a túl sok egyszerűsítés is, akkor inkább le kell írni a köztes törtet!

Vegyesen: $\frac{9}{7} \cdot \frac{21}{35} = 1$

c) „Lefelé” és „keresztbe” is lehet egyszerűsíteni!

$$\frac{14}{77} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{22}{15} =$$

Vegyük észre: lehet keresztbe egyszerűsíteni, vagy „lefelé” magát a törtet; vagyis össze-vissza, csak jó legyen!

Fontos: ha lehet, rögtön a legnagyobb közös osztóval egyszerűsítsünk!

Gyakorlásuk

Érdemes először megállapítani az előjelet, és azt konzekvensen (következétesen) mindig kitenni!

$$-\frac{42}{56} \cdot \frac{40}{63} =$$

$$\frac{121}{60} \cdot \left(-\frac{105}{66}\right) =$$

$$\frac{288}{45} \cdot \left(-\frac{75}{36}\right) =$$

$$-\frac{48}{45} \cdot \left(-\frac{105}{72}\right) =$$

$$-\frac{81}{49} \cdot \frac{105}{90} =$$

$$\frac{256}{125} \cdot \left(-\frac{75}{48}\right) =$$

$$\frac{324}{242} \cdot \frac{55}{90} =$$

$$-\frac{250}{162} \cdot \left(-\frac{54}{50}\right) =$$

d) Egész számmal történő szorzás:

Valójában át lehetne írni az egész számot valódi törtté:

$$\frac{14}{15} \cdot 3 = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{1} = \frac{14}{5}$$

$$6 \cdot \frac{21}{10} =$$

De nem fontos átírni az egészet:

$$\frac{30}{169} \cdot 26 = \frac{30}{169} \cdot \cancel{26}^2 = \frac{60}{13}$$

Gyakorlásuk

$$\frac{15}{144} \cdot 24 =$$

$$35 \cdot \frac{27}{98} =$$

$$\frac{1}{289} \cdot 34 =$$

$$69 \cdot \frac{22}{260} =$$

V/7) Gyakorlás

$$\frac{98}{112} - \frac{84}{36} =$$

$$\frac{1500}{196} \cdot \frac{98}{200} =$$

$$\frac{121}{99} \cdot 12 =$$

$$\frac{56}{55} \cdot \frac{121}{42} =$$

$$15 \cdot \frac{39}{130} =$$

$$\frac{144}{24} + \frac{72}{45} =$$

$$\frac{98}{35} - \frac{72}{27} =$$

$$\frac{30}{63} \cdot \frac{121}{150} \cdot \frac{81}{48} \cdot \frac{56}{33} =$$

$$14 \cdot \frac{22}{42} =$$

$$\frac{343}{98} \cdot 4 =$$

$$\frac{169}{64} \cdot \left(-\frac{48}{39} \right) =$$

$$15 \cdot \frac{27}{21} =$$

$$\frac{12500}{42} \cdot \left(-\frac{35}{500} \right) =$$

$$\frac{51}{40} \cdot 8 =$$

$$\frac{27}{65} \cdot \frac{48}{125} \cdot \frac{39}{54} \cdot \frac{75}{12} =$$

$$\frac{56}{42} \cdot \frac{77}{55} =$$

V/8) Osztás

- a) Valódi törtet osztunk valódi törttel. Ha tehát vegyes törtet látunk, akkor először át kell alakítani valódi törtté.

Számmal úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

Tehát hogy osztunk: $\frac{2}{3}$ -dal:

$-\frac{15}{4}$ -del:

6-tal?

15-tel?

$\frac{1}{7}$ -del?

10-zel?

100-zal?

Törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk

$$\text{Pl.: } \frac{\frac{27}{64}}{\frac{15}{56}} = \frac{27}{64} : \frac{15}{56} = \frac{27}{64} \cdot \frac{56}{15} = \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{5} = \frac{63}{40}$$

FIGYELEM:

- Megérkeztek az „emeletes” törtek – jobban szeretjük őket.
- A főtörtvonal egyértelműen látszódjék!
- Az egyenlőségjel is kijelöli a főtörtvonalat, ezért a főtörtvonalat „vegye közre” az egyenlőségjel.

$$\frac{\frac{42}{55}}{\frac{30}{22}} =$$

b) Osztás egészekkel v. egészeket

$$\text{Egész osztása egészszel: } 45:63 = 45 \cdot \frac{1}{63} = \frac{45}{63} = \frac{5}{7}. \text{ Vagyis egyszerűsítünk!!!!}$$

A tizedes törtek veszélyesek, matematikában ritkán használjuk őket. Hasznosak összehasonlításakor, számegyenesen, illetve a későbbi matematikában.

Így nem számoljuk át tizedes törtbe az $\frac{5}{7}$ -et, legfeljebb fejben: 0,7142857...

$$\text{Egész szám törttel osztva: } \frac{14}{\frac{63}{10}} = 14 : \frac{63}{10} = \text{a szabály alapján} = 14 \cdot \frac{10}{63} = \frac{20}{9}$$

$$\text{Tört egészszel osztva: } \frac{75}{14} : 50 = \frac{75}{14} \cdot \frac{1}{50} = \frac{3}{28}$$

Vegyük észre: valójában csak a számlálót osztjuk abban az esetben, ha az osztó-egésszel osztható a számláló:

$$\frac{48}{35} : 16 = \frac{14}{15} : 2 =$$

V/9) Mi is a reciproka? Második nekifutásra! Törtnél, egész számnál, tizedes törtnél.

Egy nem 0 szám reciproka az, amivel a számot megszorozva 1-et kapunk

Vagyis az $a \neq 0$ szám reciproka az $1/a$.

$$\text{Pl.: } 5 \text{ reciproka: } \frac{1}{5} \quad -\frac{4}{9} \text{ reciproka } -\frac{9}{4}$$

$$1 \text{ reciproka } 1. \quad 2\frac{3}{7} \text{ reciproka: } \frac{1}{2\frac{3}{7}} = \frac{1}{\frac{17}{7}} = \frac{7}{17}$$

$$\frac{1}{13} \leftrightarrow -3\frac{4}{5} \leftrightarrow 10 \leftrightarrow$$

0,65 reciproka: egy kicsit később.

Összefoglalva: egy számmal úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

V/10) Gyakorlásuk

a) Osztas

$$-\frac{42}{56} : \left(1\frac{12}{63}\right) =$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \underline{60} \\ 55 \\ \underline{42} \end{array} =$$

$$\frac{338}{75} : \left(-\frac{52}{75}\right) =$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ \underline{147} \\ 51 \\ \underline{35} \end{array} =$$

$$25 : \frac{35}{14} =$$

$$\frac{35}{14} : 25 =$$

$$\frac{400}{500} : 18 =$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \underline{-160} \\ 98 \\ \underline{24} \end{array} =$$

$$1 : \frac{51}{289} =$$

$$\frac{91}{13} : 7 =$$

b) Vegyesen

$$\frac{98}{112} : \frac{105}{96} =$$

$$\frac{24}{45} : \frac{40}{75} =$$

$$-\frac{68}{102} - \frac{25}{75} =$$

$$\begin{array}{r} 1500 \\ \underline{196} \\ 200 \\ \underline{42} \end{array} =$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \underline{84} \\ 35 \\ \underline{16} \end{array} =$$

$$\begin{array}{r} 22500 \\ \underline{144} \\ 300 \\ \underline{60} \end{array} =$$

$$\frac{85}{242} - \frac{35}{42} =$$

$$\frac{54}{144} : 9 =$$

$$\frac{64}{15} : 14 =$$

$$\frac{15}{96} =$$

$$\frac{75}{45} =$$

$$\frac{15}{96} =$$

$$80 : \frac{72}{27} =$$

$$14 : \frac{42}{22} =$$

$$\frac{56}{21} =$$

$$24 : \frac{56}{63} =$$

$$\frac{26}{39} - \left(\frac{3}{10} - \frac{5}{70} \right) =$$

$$\frac{140}{18} =$$

$$14 : \frac{49}{35} =$$

$$14 : \frac{10}{15} =$$

V/11) Egyéb - törtes feladatok

- a) Több tört szorzása, és vegyesebb feladatok, zárójellel: a zárójelben található műveleteket végezzük el először mindig!

$$\left(\frac{220}{81} \right) \cdot \left(-\frac{27}{169} \right) \cdot \frac{26}{5} \cdot \left(-\frac{150}{99} \right) \cdot \left(-\frac{52}{225} \right) \cdot \frac{54}{16} =$$

$$\left(\left(\left(5 - \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{2}{33} - \frac{2}{5} \right) \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \right) \cdot 25 =$$

$$\frac{2}{3 - \frac{7}{2 + \frac{3}{6}}} =$$

$$\frac{4 - \frac{3}{7}}{\frac{5}{28}} =$$

Figyeljünk a műveleti sorrendre:

$$\left(\left(\left(1 - \frac{7}{5} \right) \cdot \frac{35}{6} - \frac{2}{5} + 2 : \frac{4}{3} \right) \frac{3}{5} - \frac{5}{4} : \frac{15}{8} \right) : 12 =$$

$$\frac{4 - \frac{15}{14} : \frac{10}{21}}{\frac{5}{28} + \frac{3}{7} : 3 + 1} =$$

b) (Pozitív) törtek összehasonlítása: EGYELŐRE KÖZÖS NEVEZŐ

$$\frac{18}{7} \square \frac{19}{8}$$

$$\frac{34}{51} \square \frac{60}{135}$$

$$\frac{24}{15} \square \frac{169}{52}$$

$$\frac{78}{36} \square \frac{105}{50}$$

VI. A tizedes törtek

VI/1) Szorzás – osztás 10-zel, 100-zal stb.

a) Szorzás

$$34,02 \cdot 10 =$$

$$34,02 \cdot 100 =$$

$$34,02 \cdot 1\,000 =$$

$$34,02 \cdot 10\,000 =$$

Ha van tizedes vessző, akkor azt léptetjük, utána egyesével 0-kat írunk a végére.

$$53 \cdot 10^5 =$$

$$0,0048 \cdot 1\,000\,000 =$$

b) Osztás

$$562 : 10 =$$

$$562 : 100 =$$

$$562 : 1\,000 =$$

$$562 : 10\,000 =$$

(Úgy nézhetjük az 562-őt, mint: 00000000562. És akkor csak vonulgat a tizedesvessző)

$$562 : 100\,000 =$$

$$4800 : 10 =$$

$$4800 : 100 =$$

$$4800 : 1\,000 =$$

$$4800 : 10\,000 =$$

Úgy nézhetjük az 4800-at, mint: 000000004800. És akkor csak vonulgat a tizedesvessző.

$$4800 : 100\,000 =$$

VI/2) Mit is jelentenek a tizedes törtek

a) Számok alaki értéke, helyiértéke és valódi értéke.

Alaki érték:

A tíz db. számjegynek alaki értéke van: 0, 1, 2, ... 9. Pl.: 7 törpe, 5 ujj, 0 fizetés.

Az 1956-ot négy ilyen jeggyel írjuk le, de a szám értéke egyenlő a jegyek összegével sem, szorzatával sem.

Helyiérték – ahol a számjegy megtalálható a számban.

A tízes számrendszer ahhoz hasonlít, hogy a következő bankjegyeink, érméink vannak:

10 000 Ft-os, 1 000 Ft-os, 100 Ft-os, 10 Ft-os és 1 Ft-os.

A CÉL MINDIG AZ, HOGY A LEHETŐ LEGKEVESEBB BANKJEGGYEL ÉS ÉRMÉVEL FIZESSÜNK.

Hogy fizetünk ki 38 207 Ft-ot?

3 db. 10 000-sal, és 8 db. 1 000, 2 db. százassal, 0 db. 10-essel és végül 7 db. 1-essel: $3 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1$.

Tehát a 38207-ben a 2 a 100-as helyiértéken áll, így 200-at ér.

Valódi érték – számjegy-helyiérték

Jobbról számítva nézzük a helyeket:

Pl.: 801 435

100 000 10 000 1000 100 10 1

– – – – –

JOBBRÓL az 1. hely az 1-eseké
a 2. hely a 10-eseké
a 3. hely a 100-asoké
a 4. hely az 10^3 -é
az 5. hely a 10^4 -é stb.
a 6. hely a 10^5 -é

Így pl. a Negyvenötezer-hatszázkilenc:

$$45609 = 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

4 db. tízezres, 5 db. ezres, ... 9 db. egyes összege.

Tehát itt a 6-os valódi értéke „hatszáz”, a 4-es valódi értéke „negyvenezer”

Így felírtuk a számot a valódi értékek összegeként

A számok fölé is lehet írni a helyiértéküket:

$\begin{matrix} 10\,000 & 1\,000 & 100 & 10 & 1 & & 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10 & 1 \\ 8 & 0 & 3 & 10 & \text{vagy} & 8 & 0 & 3 & 10 \end{matrix}$ ez a „nyolcvanezer-háromszáztíz”

Írjuk fel az $A = 204\,539$ -et először úgy, hogy a jegyek fölött ott a helyiértéke, majd az A számot valódi értékek összegeként!

Hasonlóképp a $B = 2\,645\,078$

b) Mi bújik meg a tizedesvessző mögött?

Az előbbi gondolatmenet alapján a tizedesvesszőtől jobbra is lehet értelmezni a helyiértékeket

$$456,23 = \overset{100}{4} \overset{10}{5} \overset{1}{6}, \overset{\frac{1}{10}}{2} \overset{\frac{1}{100}}{3} = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100}$$

Vagyis 4 db. 100-as + 5 db. 10-es + 6 db. 1-es + 2 db. 0,1-es + 3 db. 0,01-es.

$$4523,0745 = \overset{10^3}{4} \overset{10^2}{5} \overset{10^1}{2} \overset{10^0}{3}, \overset{10^{-1}}{0} \overset{10^{-2}}{7} \overset{10^{-3}}{4} \overset{10^{-4}}{5}$$

Írjuk fel az $A = 35,058$ -at először úgy, hogy a jegyek fölött ott a helyiértéke, majd az A számot valódi értékek összegeként!

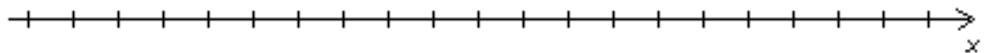
Hasonlóképp a $B = 3205,6098$ -at

c) Írd föl számmal, tizedestörttel!

$$7 + 3 \cdot \frac{1}{10000} + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 0,01 + 9 \cdot 100 =$$

$$\frac{5}{100\,000} + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1000 + 9 \cdot 10^{-2} =$$

d) Helyük a számegyenesen



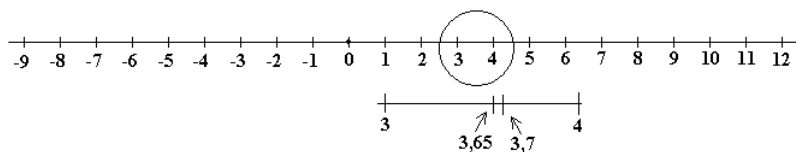
VI/3) Műveletek valódi törtté alakítás nélkül

a) Összehasonlításuk

Összehasonlítani legkönnyebben a tízes-számrendszerben felírt számokat lehet.

Érdekes elképzelni kezdetben egy számegyeneset:

$$3,65 < 3,7$$

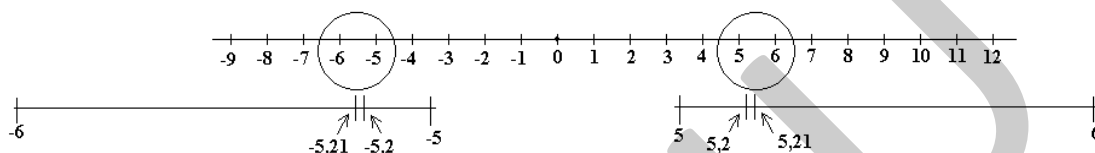


A pozitívak összehasonlítása könnyű.

A pozitív és negatív összehasonlítása is könnyű.

Két negatív összehasonlítása:

$$-5,21 \square -5,2$$



Sokféleképpen meg lehet fogalmazni, mondjuk ha tükrözzük az origóra...

$$\text{Ha } 13,001 < 13,01 \text{ akkor } -13,001 > -13,01$$

Vagy mondjuk az a nagyobb, amelyik „jobbrább” áll a számegyenesen...

Tegyük ki a számok közé a relációjelet:

$$201 \square 201,01$$

$$0,005 \square 0,0005$$

$$0,031 \square 0,03101$$

$$2,405 \square 2,5051$$

$$-12,1 \square -12$$

$$-0,005 \square -0,0005$$

$$-0,031 \square -0,03101$$

$$-2,405 \square -2,4056$$

b) Összeadás – kivonás --- összeg – különbség

$$\begin{array}{r} 3,085 \\ +19,079 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12,995 \\ 0,208 \\ + 9,877 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12,053 \\ - 9,279 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,853 \\ - 0,254 \\ \hline \end{array}$$

Becsapós:

$$\begin{array}{r} 2,053 \\ -19,279 \\ \hline \end{array}$$

Figyelem! Mindig a...

c) Osztás, szorzás

$$73 \cdot 8 =$$

$$48 \cdot 7 =$$

Figyelem! Ne szúrj ki magaddal!

$$285 : 135 =$$

$$21 : 6 =$$

$$45 : 24 =$$

$$10 : 12 =$$

$$50 : 14 =$$

Tehát: szeressük a ...

VI/4) Átalakítás valódi törtté

a) Véges (szakaszos) tizedes törtek

$$0,12 \cdot 10 = 1,2 \quad 0,12 \cdot 100 = 12 \quad 0,12 \cdot 1\,000 = 120$$

Mennyi a 0,024?

$$0,024 \cdot 1000 = 24. \text{ Így: } 0,024 = \frac{24}{1000} = \frac{3}{125}$$

Írjuk föl tört alakban a következő számokat:

$$3,65 =$$

$$0,0056 =$$

$$2,32 =$$

$$0,25 =$$

Így 0,65 reciproka is számolható most már! (V/9.)

b) Először a százalékokról

A % azt jelenti, hogy század.

Ha meghalljuk azt, hogy százalék, akkor a „százalékos mondóka” jut az eszünkbe:

Mondóka: nincs százalék, csak valami megszorozása egy százados törttel.

Az iskola 15%-a azt jelenti, hogy: $\boxed{\text{létszám} \cdot \frac{15}{100}}$ vagy $\boxed{\text{létszám} \cdot 0,15}$

A terület 225%-a azt jelenti, hogy $\boxed{\text{terület} \cdot \frac{225}{100}}$ vagy $\boxed{\text{terület} \cdot 2,25}$.

Írd fel és számold ki:

13 g arany ezüst ötvözetben 8% arany van. Mennyi az arany?

15000 főből 7% fertőzött. Hány fertőzött van.

A 220 Ha terület 45%-a parlagfüves. Mekkora területen van parlagfű?

A technikus 1400 € fizetésének a matek tanár fizetése a 72%-a.
Mekkora a matektanár fizetése?

Írd át tizedes törtbe:

$$\frac{13}{5} =$$

$$-\frac{3}{4} =$$

$$56\% =$$

c) A végtelen szakaszos tizedes törtek:

$$\frac{2}{3} =$$

$$\frac{25}{9} =$$

$$\frac{25}{7} =$$

$$\frac{14}{11} =$$

Visszafelé:

$$1,\dot{1} =$$

$$5,\dot{3} =$$

A $0,1111111111... = 1/9$. Így már számolható a többi: pl. $2,777777... = 2 + 7/9$

Ravasz módszer:

$$2,\dot{3}2\dot{5} =$$

$$2,325\ 325325325325325...$$

Próbáljuk meg más számokkal:

VII. Zárójelek kezelése

VII/1) Alapvető műveleti sorrend

1. Hatványozás 2. Szorzás-osztás 3. Összead-kivon,
2. Egy csoporton belül a sorrend számít
3. Zárójel, törtvonal csoportosít

$$2 + 5^2 + 3 \cdot 4 - 12 : 2 = 2 + 25 + 12 - 6 = 33$$

$$\text{és nem: } ((2+5)^2 + 3) \cdot 4 - 12 : 2 = ((49+3) \cdot 4 - 12) : 2 = 196 : 2 = 98$$

Vagyis az alapvető műveleti sorrend: „először elvégzem” a (1) hatványozást, (2) szorzást-osztást, végül az (3) összegzéseket (ami lehet összeadás és kivonás)

Ha változtatni akarok a sorrenden: zárójeleznem kell: $5 \cdot 6 + 4 \neq 5 \cdot (6 + 4)$

$$\text{Végezd el: } 5 + 3 \cdot 2^3 - 15 \cdot 3 =$$

$$23 - 12 \cdot 5 : 4 + 3^2 \cdot 5 - 4 : 2 =$$

VII/2) Tagok és tényezők

Összegnek (összeadás, kivonás) tagjai, szorzatnak (szorzás-osztás) tényezői vannak.

$$10 - 34 + 13 \cdot 4 \cdot 2 + 15 : 3$$

Ez a művelet négy tagból áll: a tagokat + és – jel választja el egymástól.

- Első tag: 10
- A második tag: 34,
- A harmadik tag $13 \cdot 4 \cdot 2$ Három tényezőbből áll: 13, 4 és 2.:
- A negyedik tag: $15 : 3$

A „tényezőket” szorzásjel $\cdot$ (vagy osztásjel $:$) jel köti össze.

Figyelem: Az $5(6-3)(4+2:5)$ kifejezés egytagú, és három tényezőbből áll.

- Első tényező: 5
- Második tényező: $(6-3)$ (Ez pedig 2 tagból áll 😊)
- Harmadik tényező: $(4 + 2:5)$ (Ez szintén 2 tagból áll 😊)

$$12 \cdot 2 - 4(3 + \underline{2} \cdot 5 \cdot 3) - 8 - 23 \cdot (5 - 2) + (2 - 5)(3 - 4 \cdot 5)$$

Ez 5 tagból áll:

$$12 \cdot 2 \quad 4(3+2 \cdot 5 \cdot 3) \quad 8 \quad 23 \cdot (5-2) \quad (2-5)(3-4 \cdot 5)$$

A 5. tag két tényezőbből áll: $(2 - 5)$ és $(3 - 4 \cdot 5)$

Az 5. tag második tényezője kettő tagból áll: 3 és $4 \cdot 5$.

Hogy hívjuk a kivastagított 2-est?

Kifejezések:

$$-3 \cdot (2 \cdot 5 - 5 \cdot 4) - (5 + 2 \cdot (3-1))(4-2) + 6 \cdot 2 - 13 + 15(68 - 2 \cdot 4)$$

Húzd alá külön a tagokat!

A 3. tag:

A 68:

A $(4-2)$:

Az 2. tag első tényezője:

A $2 \cdot 4$:

Mi a második tag első tényezője második tagjának második tényezője?

$$2 \cdot (4 - 2 \cdot (\underline{3} - 5)(15 \cdot (\underline{3} \cdot 2 - 1) - 1) + 3 \cdot 5) - (\underline{15} - 2) \cdot 12 - (12 - 2(\underline{34} \cdot 5 + 6)) \cdot 5$$

Húzd alá külön a tagokat!

A $3 \cdot 2$:

A $(15-2)$:

A $34 \cdot 5$:

A $(3-5)$:

$$(1 \cdot 2 - 3(4 - 5)(6 - 7 \cdot 8 \cdot 9))(10 - 11) - (12 - 13 \cdot 14 \cdot 15 + 16(17 - 18)) \cdot 19 \cdot (20 - 21 \cdot 22 \cdot 23)$$

Hány tagú? Húzd alá külön a tagokat!

Második tag 3. tényező 2. tag:

Mi a $13 \cdot 14 \cdot 15$?

Mi a $(10 - 11)$?

Mi a 8?

$$2 \cdot (3 - 4 \cdot 5)(6 \cdot 7 \cdot 8 + 9 \cdot 10)$$

Hány tagú?

Mi az 5?

Mi a 7?

VII/3) Zárójelkezelése egész számoknál: zárójelfölbontás

- a) Legelől nem tesszük ki a + előjelet. Az 1-es szorzótényezőt nem írjuk ki! A -1-es szorzótényezőből csak a „-” jel marad.

*AMÍG TUDJUK, EGY KIFEJEZÉS EGY SORBA KERÜL,
NEM SZERETJÜK A SORTÖRÉST MATEMATIKÁBAN!*

$$2(23 - 1) - 3 \cdot (-12 + 3) - (3 - 10) + (21 - 2) + (-2) - (-3) =$$

=

$$-(-200 + 4) + 3(-210 + 8) - (-40) - 5(7 - 10) + (50 - 21) =$$

=

- b) Gyakorlása

$$3(5 - 12) - 2(4 + 23) - 7(5 - 4) + (-2 - 7) - (7 - 4) =$$

=

A következőt mondjuk közben:

„plusz háromszor plusz öt plusz az plusz 15, plusz háromszor -12 az -36
mínusz kettőször plusz 4 az -8, mínusz 2-ször plusz 23 az -46,
-7-szer plusz 5 az -35, -7-szer -4 az plusz 28,
plusz 1-szer -2 az -2, plusz 1-szer -7 az -7,
mínusz 1-szer plusz 7 az mínusz 7, -1-szer -4 az plusz 4.”

$$-12(5 - 6) - (13 + 12 - 1) - 11(15 - 8) + (-13 + 15 - 8) - (13 - 9) =$$

$$-(-4 + 3 - 5) + 12(12 - 18) + (17 - 3) - 2(5 - 4) =$$

$$-15(-12 + 13 - 7) - (8 - 7 + 2) + 11(-19 + 18 - 15) + (4 - 5) - 16(-17 - 5 + 18) =$$

c) Tag-tényező-tag-tényező újra (sajna nem fér ki sortörés nélkül ☹)

$$(1-2\cdot3)(4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot)+(9\cdot10-11(12+13\cdot14)-15\cdot16\cdot17)(18\cdot19+20) - \\ -(21-22\cdot23+24\cdot25)\cdot(26-27)$$

3.tag 2. tényező:

1.tag 2.tényező 2.tag 1. tényező:

23:

16:

18·19:

11:

13:

VIII. Emeletes törtek és ismétlés

VIII/1) Emeletes törtek

Figyelem: műveleti sorrend!

$$\frac{5+2}{2} \neq \frac{5+\cancel{2}}{\cancel{2}} \neq 5$$

Itt valójában: $(5+2):2$ a művelet $= 7/2 = 3,5$

$$\frac{15+30}{5+3} \neq \frac{\cancel{15}+\cancel{30}}{\cancel{5}+\cancel{3}} \neq \frac{3+10}{1+1} = \frac{13}{2} = 6,5$$

Itt valójában: $(15+30)/(5+3)$ a művelet, ami valójában $45/8 = 5,625$

Vagyis tagokkal soha nem egyszerűsítünk!

$$\left(2+\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{6}-6\right) = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}-6} = \frac{\frac{6}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}-\frac{36}{6}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{35}{6}} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{35} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{12}{20}-\frac{10}{15}}{\frac{4}{12}-\frac{81}{27}} =$$

$$\left(-\frac{35}{56}-\frac{4}{4}\right) \div \left(-\frac{9}{3}+\frac{72}{30}\right) =$$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{4}} =$$

VIII/2) Írd föl a következő számok összes osztópárját

Pl.: $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

$54 =$

$75 =$

$140 =$

$112 =$

$98 =$

VIII/3) Végezd el – ne feledd: egyszerűsítés! A HF ezekből van.

$$\frac{\frac{4500}{144}}{\frac{600}{54}} =$$

Óra: $\frac{10}{35} = \frac{\quad}{14}$

Óra: $\frac{42}{8} : 14 =$

Óra: $\frac{196}{35} : 14 =$

Óra: $1 : \frac{84}{70} =$

$\frac{18}{26} = \frac{\quad}{39}$

$\frac{5}{125} = \frac{\quad}{75}$

Óra: $\frac{15}{80} = \frac{\quad}{104}$

Óra: $4 : \frac{76}{38} =$

$15 : \frac{5}{8} =$

$16 : \frac{8}{3} =$

$$\left(\left(\frac{2}{5}+4\right):\frac{11}{3}-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{7}{16}=$$

$$\left(\left(\frac{15}{25}+3\right):\frac{27}{15}-\frac{12}{11}\right)\cdot\frac{22}{4}=$$

$$\text{Óra: } \frac{2-\frac{\frac{5}{2}}{1+\frac{2}{3}}}{\frac{5+\frac{2}{4}}{4-\frac{2}{5+\frac{1}{4}}}}=$$

$$\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{5}-1\right)=$$

$$11:\left(\frac{4}{15}+\frac{2}{9}\right)=$$

$$4:\left(\frac{15}{10}-\frac{5}{14}\right)=$$

$$11:\left(\frac{25}{35}-\frac{12}{30}\right)=$$

$$\text{Óra:}\left(\frac{7}{8}+\frac{7}{3}\right):\frac{11}{8}=$$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{8}\right)-\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)=$$

$$\text{Óra:}\frac{28}{15}:\frac{35}{6}=$$

$$\left(\frac{73}{42}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{8}{21}+\frac{8}{14}\right)=$$

$$\frac{98}{21}:\frac{35}{24}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{27}{7}}{\frac{12}{12}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{45}{14}}{\frac{30}{35}}=$$

$$\frac{\frac{6}{15}}{\frac{7}{7}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{27}{7}}{\frac{12}{12}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{27}{7}}{\frac{35}{35}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{6}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{8}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{6}{15}}{\frac{7}{7}}=$$

$$4 - \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1 - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{4}{6}\right)} =$$

$$\text{Óra: } \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{4}{3}}}{1 - \frac{\frac{3}{15}}{\frac{36}{2}}} =$$

$$\left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{30}{4} - \frac{4}{8}\right) =$$

$$\frac{12}{15} - \frac{12}{15} - \left(\frac{25}{35} - \frac{12}{30}\right) =$$

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{12}{15} - \frac{22}{4}\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{21}{14}\right) =$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{16}{15} =$$

$$\left(2 - \frac{42}{15}\right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{49}{14}\right) =$$

$$9 : \left(\frac{7}{10} - \frac{8}{5}\right) =$$

$$\left(\frac{75}{144} - \frac{45}{72}\right) \cdot 7 =$$

$$\left(1\frac{2}{3} - 3\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\left(\frac{3}{10} - \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{5}{10} + \frac{3}{14}\right) =$$

$$\text{Óra: } \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{2}{33} =$$

$$\left(\frac{15}{18} - \frac{35}{42}\right) \cdot \frac{10}{18} =$$

$$\left(\frac{15}{36} - \frac{35}{42}\right) \cdot \frac{16}{25} = =$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{2}{15} =$$

$$\frac{7}{5} + \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{5}{21}+\frac{2}{21}\right)=$$

$$\left(\frac{11}{6}-\frac{11}{42}\right)\cdot\frac{7}{22}=$$

$$\frac{27}{7}:\frac{18}{25}=$$

$$\frac{27}{14}:\frac{18}{21}=$$

$$\left(-\frac{4}{8}+\frac{3}{3}\right):\left(-\frac{7}{8}-\frac{9}{10}\right)=$$

$$9:\left(\frac{7}{10}-\frac{8}{5}\right)=$$

$$\text{Óra:}\frac{27}{7}:3=$$

$$\text{Óra:}\frac{27}{7}:5=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{35}{14}}{14}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{45}{14}}{\frac{30}{35}}=$$

$$\text{Óra:}\frac{\frac{55}{3}}{\frac{22}{9}}=$$

$$\frac{\frac{6}{15}}{\frac{7}{7}}=$$

$$\frac{1}{\frac{16}{24}}=$$

$$\frac{\frac{9}{15}}{\frac{7}{7}}=$$

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1-\frac{\frac{3}{3}}{\frac{2}{6}}}=$$

$$\left(-\frac{1}{\frac{1}{5}}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{25}}\right) =$$

$$\text{Óra: } 1 - \frac{-\left(1 - \frac{2}{3}\right)}{2} =$$

$$\frac{\frac{21}{5}}{\left[\frac{7}{6} : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\right]} : \left[\left(\frac{7}{6} - 2\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - 3\right) - 1\right] =$$

$$5 + \frac{\frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{5}{6} - \left(-\frac{28}{24}\right)}}{\frac{5}{2} - \left(1 + \frac{10}{6}\right)} =$$

$$\frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{4}}{1 + \frac{3}{2}} =$$

IX. Ismétlés – lásd HF füzet.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} =$$

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} : \left(-\frac{8}{9} \right) + 1 \right) : \frac{4}{7} + 13 =$$

$$\left(2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6} \right) \right) : \left(-\frac{4}{3} \right) =$$

$$\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) \cdot \left(\frac{5}{6} \right) =$$

$$\left(\left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \div \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}}$$

A számok áttekintése

I. A természetes számok

I/1) Definíció - alapok

Nem definiáljuk a természetes számokat. (Nem magyarázzuk meg pontosan, hogy mik is azok.)

a) Melyek ezek?

0;1;2;3;4 ... folytasd: _____

b) A természetes számok halmazának jele – és egy kicsit a halmazokról

N (vastag) vagy: $\mathbb{N}$

Kézzel írva: _____

N = {0;1;2;3 ...} $5 \in \mathbf{N}$; $-7 \notin \mathbf{N}$; $12,3 \notin \mathbf{N}$; $0 \in \mathbf{N}$.

Írd le mellé újra: $5 \in \mathbf{N}$ _____

Itt új jeleket és fogalmakat tanultunk meg:

$B = \{1; 3; 5\}$: ez egy három elemű halmaz. A halmaznak tehát elemei vannak.

$C = \{2; 2; 3; 5; 5; 5; 6; 6\}$: *ez egy négy elemű halmaz*, mert egy halmazban minden elem csak egyszer szerepelhet. Írd le helyesen:

$C =$

A halmazt, ha felsoroljuk az elemeit, akkor kapcsos zárójelbe tesszük azokat:

$A = \{1;3;5\}$ ✓ $A = (1;3;5)$ ✗

$5 \in \mathbf{N}$ Kiolvassa: „öt eleme a természetes számok halmazának”. Elegánsan: „az öt természetes szám”.

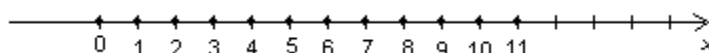
Vagyis matematikában másképp írunk a jelekkel, mint ahogy azokat kiolvassuk. Természetesen a jelek sorban történő kiolvása néha nem hibás (néha sajnos az), de okosabb „jól kiejteni a szavakat”, ahogy az angolban: másképp írjuk és másképp ejtjük.

$-7 \notin \mathbf{N}$ Kiolvassa: „a mínusz hét nem eleme a természetes számok halmazának”. Elegánsan: „a mínusz 7 nem természetes szám”.

Írd le jellel: „-10 nem természetes szám”: _____

Írd le jellel: „a 0 természetes szám”: _____

c) Ábrázoljuk őket számegyenesen:



d) Adjuk össze 1-től 50-ig a természetes számokat

I/2) A tízes és a kettes számrendszer – bevezetve.

A tízes számrendszerben 0-tól 9-ig vannak alaki értékű számok, mert a 9 után következőt már nem egy új jellel, hanem 10-zel írjuk le.

A tízes számrendszerben a helyiértékek a következők: 10^n , 10^{n-1} , ... 10^3 ; 10^2 ; 10^1 ; 10^0 .

$$\begin{aligned} \text{Pl: } 60315 &= \overset{10^4}{6} \overset{10^3}{0} \overset{10^2}{3} \overset{10^1}{1} \overset{10^0}{5} = 6 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = \\ &= 6 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 60315 \end{aligned}$$

Láttuk már a helyiértéket, alaki értéket és az ezekből származó valódi értéket:

alaki érték $\times$ helyi érték = valódi érték

Pl.: a 6 valódi értéke az előző számban:

Nézzük meg a „2-ES KASZINÓT”

A kettes számrendszerben csak 0 és 1-es számjegy van.

Nézzük meg a helyiértékeket.

Vagyis vannak (jobbról) 1-esek, 2-esek, 4-esek, 8-asok, 16-osok stb.:

$$2^n, 2^{n-1}, \dots, 2^3; 2^2; 2^1; 2^0.$$

Vagyis vannak (jobbról) 1-es ZSETON, 2-es ZSETON,

4-es ZSETON, 8-as ZSETON, 16-os ZSETON

2^5 -es ZSETON, 2^6 -os ZSETON, 2^7 -es ZSETON stb.



Zsetonokból állítsd össze a 27 dollárt:

CÉL: A LEHETŐ LEGKEVESEBB ZSETONT HASZNÁLJUK!!!

A legnagyobb zseton, ami kell hozzá: 1 db. _____

Utána milyen zseton van? Kell? db. _____

Utána milyen zseton van? Kell? db. _____

Utána milyen zseton van? Kell? db. _____

Utána milyen zseton van? Kell? db. _____

Vagyis az 11011 szám a következőt jelenti:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$
$$11011_2 = 11011_2 =$$

$$\begin{aligned} &= 1 \text{ db. } 16\text{-os} + 1 \text{ db. } 8\text{-as} + 0 \text{ db. } 4\text{-es} + 1 \text{ db. } 2\text{-es} + 1 \text{ db. } 1\text{-es} = \\ &1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 27 \end{aligned}$$

Írd le a 2-es számrendszerbeli szám tízes számrendszerbeli értékét – vagyis „beváltjuk a zsetonjainkat”:

$$\begin{array}{ccccccc} 2^6 & 2^5 & 2^4 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$
$$1101001_2 =$$

Mennyit érnek a 10-es számrendszerben a következő kettes számrendszerbeli számok?

$$11_2 =$$

$$101_2 =$$

$$111_2 =$$

$$1010_2 =$$

$$1021_2 =$$

Próbáljuk meg újra fordítva!

Cél: a legkevesebb zsetont használjuk.

Vagyis: mindig a lehető legnagyobbat használjuk föl!

Írjuk át a 10_{10} -et 2-es számrendszerbe:

$$10_{10} = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1, \text{ vagyis } 10_{10} = 1010_2.$$

$164_{10} =$ „256-os nem jó, ezért”: 1 db 128-as.

Marad: $164 - 128 = 36$ Nem jó a 2^6 -os (64-es) ezért:

$36 = 1 \cdot 32 + 4$, vagyis jó a 32-es és **marad 4**

Nem jó a 16-os (2^4), a 8-as (2^3), ezért azok helyén 0 áll.

$4 = 1 \cdot 4$ (2^2), vagyis a 4-esek helyén áll egy 1-es

és akkor elfogyott minden:

már megvan a 164, tehát a 2-esek és 1-esek helyén 0 áll:

$$164 = 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

$$164_{10} = 10100100_2.$$

Írd át a 93-at 2-es számrendszerbe!

$$\begin{array}{cccccccc} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & x & x & x & x & x & x & x \\ 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 0 & 1 & x & x & x & x & x \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

I/3) Műveletek a természetes számokon, a természetes számok körében

- a) A mindig elvégezhető: $\oplus$ és $\otimes$: vagyis két természetes szám összege v. szorzata továbbra is természetes szám lesz.
- b) Nem végezhető el mindig: $-$ (kivonás) és $\div$ (osztás)

A kivonás:

*Nem végezhető el mindig: „Kivezet” az egész számok **körébe**:*

Pl.: a $3 - 5$ eredményét nem tartalmazzák a természetes számok.

Pontosabb úgy mondani, hogy nincs olyan természetes szám, amelyet 5-höz adva 3-at kapunk.

Hiszen a $3-5$ azt kérdezi, hogy melyik az szám, amelyet az 5-höz kell adni, hogy 3-at kapjunk.

Pl.: $10-7$: melyik az a szám, amelyet...

Az osztás:

Nem elvégezhető el mindig:

„Kivezet” a racionális számok testébe (2,5 vagy $\frac{3}{4}$ stb.)

Pl.: a $7:2$ eredményét nem tartalmazzák a természetes számok.

Pontosabb úgy mondani, hogy nincs olyan természetes szám, amellyel a 2-őt megszorozva 7-et kapunk.

Hiszen a $7:2$ azt kérdezi, hogy melyik az szám, amelyikkel 2-őt megszorozva 7-et kapunk.

- c) Sőt: olyan számot sem találunk pl. a 10-hez, amelyet négyzetre emelve 10-et kapunk.

Persze a 16-hoz igen: 4, és 100-hoz is: 10.

Vagyis az ún. „négyzetgyök vonás” mint művelet: kivezet a természetes számok köréből.

De nagyon sok számhoz nem találunk ilyen!

Például nincs olyan természetes, mely négyzete a 22 v. a 23 v. a 24

I/4) Egy kis számelmélet, gyermekded módon

- a) Az oszthatóság

pl: $6 \mid 54$ mert létezik olyan egész, mellyel megszorozva a 6-ot 54-et kapunk, ez pedig a 9. Ugyanis: $9 \cdot 6 = 54$

$7 \mid 98$ mert $14 \cdot 7 = 98$. (Kiolvasva: 7 osztja 98-at, mert...)

$5 \nmid 23$, mert nincs olyan egész szám, amivel az 5-öt megszorozva 23-at kapnánk.

- b) Alap oszthatósági szabályok:

Algebra A/IV/1-ben már láttuk őket.

Nem bizonyítjuk őket, csak elfogadjuk.

Mondjuk el szóban az alap oszthatósági szabályokat!

- c) Az összetett számok és az oszthatóság velük

A prímszámokról már beszéltünk.

Egység: 1

Összetett szám: olyan nem 0 természetes szám, mely nem egység és nem prím.

Vagyis 1-en és önmagán kívül van még osztója: pl.: 4, 18, 63

Vegyük észre, hogy egyetlen egy páros prímszám létezik, a 2.
Írjuk le az 50 és 60 közötti összetett számokat:

Összetett számokkal való oszthatóság

Mi osztható 12-vel? Írj néhány ilyen 7-re végződő négyjegyűt!

Igaz-e, hogy ami 6-tal és 2-vel osztható, az 12-vel is?

Mi osztható 36-tal? Írj néhány ilyen 4-re végződő négyjegyűt!

Jó-e az, hogy ami 3-mal és 12-vel osztható, az osztható 36-tal?

És az jó-e, hogy ami 4-gyel és 9-cel osztható?

Mi osztható 72-vel? Írj néhány ilyen 0-ra végződő négyjegyűt!

Jó-e az, hogyha 4-gyel és 18-cal osztható?

És az, hogy 9-cel és 8-cal?

d) A relatív prímek fontos tulajdonságai

Relatív prímek:

... két szám relatív prím, ha az LNKO-juk 1. $(a;b) = 1$.

Pl.: $(15;14) = 1$ v. $(15;28) = 1$

Hasznuk az oszthatósági szabályoknál.

Megfigyelés: $6 \mid 72$ és $9 \mid 72$, de $(9 \cdot 6) \nmid 72$

$6 \mid 90$ és $9 \mid 90$ és $(9 \cdot 6) \nmid 90$

Vagyis ha 6 és 9 oszt egy számot, még nem tudjuk, hogy a szorzatuk osztja-e a számot.

Állítás: ha két relatív prím oszt egy számot, akkor a szorzatuk is osztja a számot. Nem relatív prímekre ez nem biztos hogy igaz.

$4 \mid 252$ és $9 \mid 252$ és $(9;4) = 1$, ezért: $(9 \cdot 4) = 36 \mid 252$

Osztja-e a 66 a 4818-at?

Mivel való oszthatóságot kell megvizsgálni?

$11 \mid 4818$ $6 \mid 4818$ és mivel $(6;11) = 1$, ezért $66 \mid 4818$

Ezek alapján mondjunk szabályt arra, hogy valami

15-tel osztható:

Pl.:

24-gyel osztható:

Pl.:

28-cal osztható

Pl.:

12-vel osztható

Pl.:

Mondjunk – de ne írjuk le – néhány hibás szabályokat is!

A „relatív prímesség” haszna az LKKT-nél

Két relatív prím legkisebb közös többszöröse (LKKT): a szorzatuk.

Ha két szám nem relatív prím, akkor a LKKT-jük kisebb a szorzatuknál!

Ez hasznos a közös nevező megtalálásakor:

$$\frac{7}{12} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{7}{36} + \frac{3}{20} =$$

e) Az egyértelmű prímfelbontás újra

Tétel: Minden egynél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható föl
prímek szorzatára a sorrendtől való eltérés erejéig.

Vagyis két egynél nagyobb természetes szám akkor és csak akkor egyenlő, ha
kanonikus alakjuk megegyezik.

Adjuk meg a 60 és az 560, és a 6800 „prímtényezői felbontását”:

Tehát: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$

$6800 =$

60		2
30		2
15		3
5		5
1		

560		2
280		2
140		2
70		2
35		5
7		7
1		

A most kimondott TÉTEL azt jelenti, hogy ha a természetes számok körében
két különböző számot felbontok prímtényezőkre, akkor vagy lesz köztük olyan
prímtényező, amelyik az egyikben megtalálható, a másikban nem (pl: 12 és 21-
nél a 2 illetve a 7), vagy ha ugyanolyan prímtényezőik vannak (pl: 50 és 20),
akkor legalább az egyik prím más hatványon szerepel a két számban.

Ravaszul megfogalmazva: „valamelyikben van olyan prímtényező, mely a
másikban más hatványon szerepel” (pl.: 7^2 , 7^3 vagy 7^0 és 7^3 ...)

VAGYIS: KÉT TERMÉSZETES SZÁM AKKOR ÉS CSAK AKKOR EGYEZIK MEG, HA A
KANONIKUS ALAKJUK UGYANAZ.

Fordítva nézve: ha figyelünk egy nagy szorzatot:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 31 \neq 2^2 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 11 \cdot 13^5$$

látható, hogy nem egyenlők:

hiszen több sebből is vérzik a dolog:

először is vannak különböző prímtényezők,

másodszor: pl.: az 5 más-más hatványon szerepel.

I/5) Osztók

a) Számok osztóinak jellemzői

Ezt a pontot becsukott füzetten, a táblán kell végigvenni...

Adott a következő szám: $k = 40$.

Hogy változik a prímfölbontása (még inkább: kanonikus alakja), ha megszorozom 36-tal?

Vizsgáljuk meg:

$$k = 40 = 2^3 \cdot 5, \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

$$k \cdot 36 = 40 \cdot 36 = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Nyilván mivel az 1440 felbontását úgy is elvégezhetjük, hogy $1440 = 40 \cdot 36$, vagyis $(2^3 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3^2) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, ezért két db. 2-essel és 2-db. hármassal „nőtt” a kanonikus alak.

Így látható, hogy a szorzó (jelen esetben) a 36 a „saját prímjeit viszi be” a kanonikus alakba.

A 40 kanonikus alakja: $40 = 2^3 \cdot 5$.

Mi a $77 \cdot 40$ kanonikus alakja?: _____

Mi a $14 \cdot 40$ kanonikus alakja?: _____

Mi a $110 \cdot 40$ kanonikus alakja?: _____

$$\underline{2^2} | 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \text{ mert } (3 \cdot 11) \cdot \underline{2^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\underline{6} | 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \text{ mert } \underline{6} = \underline{2 \cdot 3} \text{ és } (2 \cdot 11) \cdot (\underline{2 \cdot 3}) = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\underline{66} | 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \text{ mert } \underline{66} = \underline{2 \cdot 3 \cdot 11} \text{ és } (2) \cdot (\underline{2 \cdot 3 \cdot 11}) = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

Adott a következő szám: $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$

Lehet-e osztója a következő szám: (Ha nem, miért?)

$$70; \quad 40; \quad 75; \quad 2^2 \cdot 3^5; \quad 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$$

70 osztja-e az $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ számot?

Mo.: $\underline{70} = \underline{2 \cdot 5 \cdot 7}$. Ha a $70 | 445\,500 \Rightarrow 445\,500 = n \cdot \underline{70}$,
akkor: $445\,500 = n \cdot \underline{2 \cdot 5 \cdot 7}$,

vagyis a prímfelbontásában ott lenne a 7-es szám.

Márpedig nincs ott... $\Rightarrow 70 \nmid 445\,500$

40 osztja-e az $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ számot?

Mo.: $\underline{2^3 \cdot 5}$ Ha a $445\,500 = k \cdot \underline{40}$, akkor: $445\,500 = k \cdot \underline{2^3 \cdot 5}$,
vagyis a prímfelbontásában

a 2 MINIMUM a 3. hatványon szerepelne,
de csak a 2. hatványon szerepel...

$\Rightarrow 40 \nmid 445\,500$

75 osztja-e az $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ számot?

Mo.: $\underline{75} = \underline{3 \cdot 5^2}$

Ha a $445\,500 = k \cdot \underline{75}$, akkor: $445\,500 = k \cdot \underline{3 \cdot 5^2}$,

Ez jónak tűnik: mennyi a k ?

$445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 = k \cdot \underline{3 \cdot 5^2} = (2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot \underline{3 \cdot 5^2}$. ✓

$\Rightarrow 75 \mid 445\,500$ mert van olyan egész (k),
amivel megszorozva $445\,500$ -at kapunk, ez pedig a...

A $\underline{2^2 \cdot 3^5}$ osztja-e az $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ számot?

Mo: Ha a $445\,500 = k \cdot \underline{2^2 \cdot 3^5}$, akkor: $445\,500 = k \cdot \underline{2^2 \cdot 3^5}$,

vagyis $445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 = k \cdot \underline{2^2 \cdot 3^5}$.

De sajnos így az eredeti számban a 3 legalább az 5. hatványon szerepelne...
Vagyis nem osztó.

Osztja-e a $\underline{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11}$ az $n = 445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ számot?

Akkor osztja, ha van olyan egész k ,

amellyel megszorozva a $\underline{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11}$ számot $445\,500$ -at kapunk!

$445\,500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 = k \cdot \underline{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11} = 5 \cdot \underline{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11}$ ✓

(Tehát $k = 5$)

b) Észrevételek

Vegyük észre: akkor könnyű osztókat találni, ha KANONIKUS ALAKBAN van megadva a szám.

A számelmélet alaptételét továbbgondolva összefoglalhatjuk a következőt:

Egy természetes szám osztóinak kanonikus alakjában csak az eredeti szám prímjei állhatnak, és maximum azon a hatványon, amelyen az eredeti számban is szerepelnek.

Adott a következő szám: $B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

(Húzd át az oszthatóság jelét, ha nem igaz!)

$2^5 \cdot 3^3 \mid B$ számot, mert:

$13 \mid B$, mert:

$2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \mid B$, mert:

$2 \cdot 5^2 \mid B$, mert:

$2^6 \mid B$, mert

$24 \cdot 3^3 \mid B$, mert:

$49 \mid B$, mert:

$10\,000 \mid B$:

Mondj még két-két olyan számot, amely osztja/illetve nem osztja B-t.

c) Gondolkodtatók

Hány 5-re végződő prímszám van?

Tíz különböző prímet összeszoroztam, lehet-e a szorzat: $8\,999\,999\,999\,991$?

Összeadtam az első 100 prímszámot: miért nem lehet az összeg: 2756?

d) FAKTOR

Def.: Egy természetes szám faktora: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Vagyis: 1-től a számig összeszorozva a természetes számok.

$$2! =$$

$$3! =$$

$$4! =$$

$$5! =$$

$$6! =$$

$$7! =$$

$$8! =$$

Ha tudom, hogy $9! = 362\,880$, akkor mennyi $10!$?

Vegyük észre: $8! = 8 \cdot 7!$ $(n+3)! = (n+3)(n+2)!$ $n! = n \cdot (n-1)!$

$$(n-5)! = (n-5)(n-6)!$$

Mennyi faktoriall felírva:

$$12 \cdot 11! =$$

$$19 \cdot 18 \cdot 17! =$$

$$\frac{17!}{16!} =$$

$$\frac{19!}{17!} =$$

$$20! - 18 \cdot 18! =$$

20! egy nagy szám: $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

A kanonikus alakjában a 11-nek mennyi a kitevője és miért?

A kanonikus alakjában a 7-nek mennyi a kitevője és miért?

Véletlenszerűen két csoportba szedem szét 1-től 100-ig a természetes számokat: A, B (nem szükségképpen egyenlő db-számú a két csoport).
Összeszorozom az A halmazban találhatóakat, a végeredményt Π_A -val jelölöm.
Ugyanúgy létrejön: Π_B . Lehet-e ez a két végeredmény egyenlő?

- e) A 0-ra végződés:
 $7\,448\,000 = 7448 \cdot (2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)$

$A = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 11^4 \cdot 13^8$ hány 0-ra végződik?

$B = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^8 \cdot 11^4 \cdot 13^8$ hány 0-ra végződik?

MI KELL A 0-RA VÉGZŐDÉSHEZ:

I/6) Négyzetszámok

- a) Melyek azok?

- b) Néhány feladat

Lehet-e négyzetszám: 346 848

Lehet-e egy négyzetszám a következő: $2^8 \cdot 5^{10} \cdot 11^{14}$?

Lehet-e egy négyzetszám a következő: $2^6 \cdot 3^{14} \cdot 11^5$?

Lehet-e négyzetszám az 100010001?

- c) A négyzetszámok végződése illetve kanonikus alakja
Mik lehetnek a négyzetszámok végződései, utolsó jegyei?

Mi jellemző kanonikus alakjukra?

A NÉGYZETSZÁMOK KANONIKUS ALAKJÁBAN:

I/7) Számok osztóinak „keresgelése”

- a) 1. módszer: párba állítás

60 osztói:

1·60 (Az egység és önmaga, amelyet „nem valódi” osztónak hívunk.)

2·30

3·20

4·15

5·12

6·10

Honnan tudom, hogy véget ért? Válasz: „

”

Írd fel párba állítással a 180 osztóit illetve a 400 osztóit

144 osztói:

$$1 \cdot 144$$

$$2 \cdot 72$$

$$3 \cdot 48$$

$$4 \cdot 36$$

$$6 \cdot 24$$

$$8 \cdot 18$$

$$9 \cdot 16$$

$$12^2$$

(Az egység és önmaga, amelyet „nem valódi” osztónak hívunk.)

Kérdés: melyek azok a természetes számok, amelyeknek páratlan számú természetes osztója van?

b) 2. módszer az osztó kereséséhez: a *kanonikus alakot* felhasználó *fa-struktúra*

$$20 = 2^2 \cdot 5.$$

Csak olyan számok lehetnek az osztók, amelyekben nincs más prímtényező, mint a 2 vagy az 5. A 2 max 2. hatványon, az 5 max első hatványon szerepelhet:

Írjuk le a két prímet: $2^x \cdot 5^y$.

$$\text{Pl.: } 2^1 \cdot 5^1 = 10 \text{ vagy: } 2^1 \cdot 5^0 = 2 \text{ vagy: } 2^0 \cdot 5^1 = 10 \text{ vagy } 2^2 \cdot 5^1 = 20 \text{ vagy } 2^2 \cdot 5^0 = 4$$

Szisztematikusabban:

$$2^0 \cdot 5^0 \quad 2^0 \cdot 5^1$$

$$2^1 \cdot 5^0 \quad 2^1 \cdot 5^1$$

$$2^2 \cdot 5^0 \quad 2^2 \cdot 5^1$$

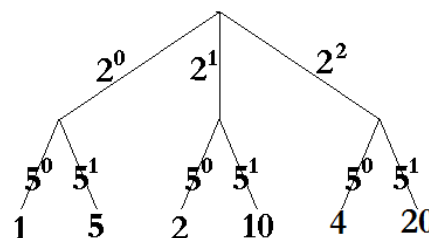
FÁVAL:

$$d(20) =$$

Tehát az osztók: 1;5;2;10;4;20: 6 db.

De a darabszám már számolható volt, hiszen 6 kimenet van.

Írjuk fel a 60 osztóit „fastruktúrával”



$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Lehet-e a 14 osztója 90-nek: $\begin{array}{r} 14 \\ 90 \end{array} \text{ ✗. Miért. Mert: } \begin{array}{r} 7 \\ 14 \end{array} \text{ és } \begin{array}{r} 7 \\ 90 \end{array}.$

Vagyis a 7-es prímtényező szerepel a 14 felbontásában, a 90-ben nem.

Lehet-e a 8 osztója 60-nak: $\begin{array}{r} 8 \\ 60 \end{array} \text{ ✗. Pedig } \begin{array}{r} 2 \\ 8 \end{array} \text{ és } \begin{array}{r} 2 \\ 10 \end{array}.$

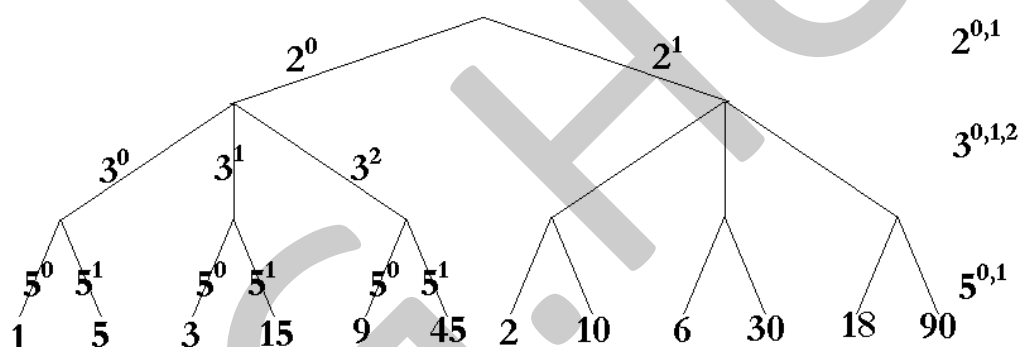
Igenám, de a 8-ban: 3 db kettes szerepel, a 60-ban pedig csak kettő.

Vagyis mik lehetnek az osztók a 90 esetében?

Azok, amiket a 90 prímtényezőiből elő tudok állítani. Hogy el ne veszítsünk egyet sem, szisztematikusan kellene összeszedni őket.

Könnyedén tudunk mondani sokat: 12, 15, 10, 20

Szedjük össze szisztematikusan, fastruktúrával.



Mindegyik kimenet különböző, és minden lehetőséget lefedtünk, vagyis megjelent az összes osztó.

$$d(90) = (1+1)(2+1)(1+1) = 12$$

Hány osztója van az 1440-nek – $d(1440) = ?$

$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ Az osztók a csak ebből a három prímből állhatnak elő, és csakis úgy, hogy mindegyik kitevője legfeljebb a szereplő legmagasabb hatványon lehet.

Az osztók általános alakja így: $2^{0-5} \cdot 3^{0-2} \cdot 5^{0-1}.$

Például:

Érdekesség: a prímfelbontásból meg lehet mondani, hány osztója lesz a számnak.

Állítás: egy egynél nagyobb természetes szám osztóinak számát úgy kapjuk meg, hogy a kanonikus alak létrehozása után a kitevőkhöz egyet adunk majd ezeket az eggyel megnövelt kitevőket összeszorozzuk.

$n = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^1$ Ennek a számnak hány darab osztója van?

$$d(2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^1) =$$

$n = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4$ Ennek a számnak hány darab osztója van?

$$d(2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4) =$$

Kérdés: melyik az a legkisebb természetes szám, melynek 5 db. osztója van?

Észrevétel: prímszámok osztóinak száma.

I/8) LNKO - LKKT

- a) Két vagy több szám LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJA (LNKO) - bevezetés
DEF.: Két v. több egész közös osztója az az egész, amely mindegyiket osztja.
Pl.: 60 és 80 közös osztói: 1;2;4; 5; 10; 20

Könnyebben láthatók a közös osztók, ha a KANONIKUS ALAKOT nézzük:
Például legyen a két szám: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ és $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

Mondjuk közös osztókat:

Mondjuk olyan osztókat, melyek csak az egyiket osztják – és magyarázzuk meg, hogy miért csak az egyiket osztják:

Írjuk az alábbiak mellé, hogy „jó” v. „nem jó, mert...”

$$2^2$$

$$2 \cdot 3^2$$

$$2^3$$

$$7$$

$$13$$

$$2 \cdot 3^4$$

$$2^2 \cdot 3$$

$$2^2 \cdot 7$$

$$2^2 \cdot 3^3$$

Fogalmazzuk meg, hogy milyen kritériumok állnak a közös osztókra:

- Csak olyan prímtényezőből állhatnak, amelyek mindkét eredeti számban szerepelnek
- Egyik ilyen prím sem szerepelhet nagyobb hatványon, mint bármelyik eredeti számban, vagyis az eredeti számoknál szereplő legkisebb hatványon lehet.

Jelen esetben a két szám: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ és $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

Vagyis itt a KÖZÖS OSZTÓKBAN

csak a 2 és a 3 szerepelhet prímtényezőként (mert csak azok szerepelnek mindkét számban)

és a 2 kitevője maximum lehet,

a 3 kitevője pedig maximum lehet.

Vagyis megvan a LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ IS:

A 1158300 és az 143734500 számokhoz keress olyan osztókat, melyek csak az egyiket osztják, olyanokat, melyek mindkettőt, és keresd meg a Legnagyobb Közös Osztót, az LNKO-t, VAGYIS: $(1158300 ; 143734500) = ?$

A kanonikus alakjukat kell figyelni: $(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13; 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13^2)$

$$2^2$$

$$2 \cdot 3^2$$

$$2^3$$

$$7$$

$$13$$

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 13$$

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13^2$$

$$11 \cdot 13$$

$$41$$

$$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 13$$

Fogalmazzuk meg saját szavainkkal, hogy a kanonikus alakokból hogy találjuk meg az LNKO-t!

Az osztók lehetséges előállítása: $2^{0-2} \cdot 3^{0-4} \cdot 5^{0-3} \cdot 13^{0-1}$

Ez azt is jelenti, hogy a legnagyobb, a $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 13$ az összes osztó osztani fogja!

b) Két vagy több szám LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJA (LNKO)

DEF.: Két v. több természetes szám lnko-ja: a közös osztók közül a legnagyobb.

TÉTEL: Az LNKO egyben KITÜNTETETT KÖZÖS OSZTÓ is: minden közös osztó osztója az LNKO-nak ÉS az LNKO MINDEN OSZTÓJA EGYBEN KÖZÖS OSZTÓ.

Pl.: $(60 ; 80) = 20$ Agy az összes közös osztó osztja a 20-at. Pl: $5 \mid 20 \quad 10 \mid 20$

$(756 ; 1080) = 108$ Így az összes közös osztó a 108 osztója

Két vagy több szám LNKO-ját úgy kapjuk meg, hogy a számok kanonikus alakjában található közös prímtényezőket összeszorozzuk a szereplő legkisebb kitevőjükön.

$$(756 ; 3240) = (2^2 \cdot 3^3 \cdot 7; 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5) =$$

HISZEN: a közös osztók prímfelbontásában csak a 2 és a 3 szerepelhet, a 2 csak a második, a 3 pedig csak az 3. hatványon

c) Gyakorlásuk

$$(1200; 720) = (2^4 \cdot 3 \cdot 5^2; 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) =$$

$$(48; 30) = (\quad ; \quad) =$$

$$(88; 45) = (\quad ; \quad) = \quad \text{Vagyis ők:}$$

HÁROM V. TÖBB SZÁM LNKO-JA:

$$(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2; 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7; 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4) =$$

d) Az összes közös osztó fölírása

Tudjuk, hogy: Két szám közös osztóiban csak a közös prímtényezők szerepelhetnek, mindegyik legfeljebb az előforduló legkisebb kitevőn.

Ebből az következik, hogyha pl.:

$$(756; 1080) = (2^2 \cdot 3^3 \cdot 7; 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

akkor: az összes közös osztóban csak a 2 és a 3 szerepelhet prímtényezőként úgy, hogy a 2-nek 0-1-2 lehet a kitevője, a 3-nak pedig 0-1-2-3: $2^{0-2} \cdot 3^{0-3}$,
És így a közös osztók:

$2^0 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^1$	$2^0 \cdot 3^2$	$2^0 \cdot 3^3$
$2^1 \cdot 3^0$	$2^1 \cdot 3^1$	$2^1 \cdot 3^2$	$2^1 \cdot 3^3$
$2^2 \cdot 3^0$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^3$

És ezek természetesen mind a 108 osztói.

Következtetés:

A KÖZÖS OSZTÓK OSZTÓI A LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓNAK.

VAGYIS A LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ OSZTÓI ADJÁK A KÉT SZÁM KÖZÖS OSZTÓIT.

Így meg tudjuk mondani – akár fa-struktúrával fölírni – két szám közös osztóinak számát!

Kérdés: honnan látom két szám kanonikus alakján azonnal, hogy relatív prímek?

Mo.:

Feladat: Írd föl a 350 és a 168 összes közös osztóját!

e) Két vagy több szám LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖSE (LKKT) - bevezetés

Előzetes: Számok KÖZÖS TÖBBSZÖRÖSE:

Mondjunk néhány többszörösét, illetve közös többszörösét a 12 és 18-nek.

Többszörösök:

Közös többszörösök:

Pl.: $12 \cdot 18 = 216$, vagy: $5 \cdot 12 \cdot 18 = 5 \cdot 216 = 1080$ stb.

Írjunk még közös többszörösöket:

De van kisebb is, pl. a 108. De melyik a legkisebb?

Honnan látjuk, hogy egy szám többszöröse 120-nak?

A kanonikus alakból jól látszódik: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

A $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ nem, mert:

A $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ nem, mert:

A $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^5 \cdot 13$.

IGEN, mert a 120-at ($120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$) $3^3 \cdot 7^5 \cdot 13$ -mal szoroztuk meg:

$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^5 \cdot 13 = 3^3 \cdot 7^5 \cdot 1^3 \cdot (2^3 \cdot 3 \cdot 5)$

Mondjunk néhány többszörösét, és közös többszörösét a 24-nek és a 28-nak!

Többszörösök:

Közös többszörösök:

Érdemes a kanonikus alakjukat felírni, akkor könnyebb minden:

Válasszuk ki a legkisebb közös többszöröst!

Hogy találjuk meg könnyedén a közös többszörösöket, és az LKKT-t?

Természetesen: A KANONIKUS ALAKKAL!

$$[504 ; 5808] = [2^3 \cdot 3^2 \cdot 7; 2^4 \cdot 3 \cdot 11^2]$$

Vizsgáljuk meg az alábbiakat

$$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$2^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11^2$$

$$2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^5 \cdot 13^7$$

$$2^4 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11^2$$

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$$

Nyilván a 2-nek kell szerepelni és legalább a 4. vagy magasabb hatványon.

3-nak: legalább a 2. vagy magasabb hatványon.

7-nek, mert az 504-ben szerepel... és legalább az első, vagy magasabb hatványon.

11-nek: mert az 5808-ban szerepel... és legalább a 2. hatványon, vagy magasabb hatványon.

VAGYIS: legalább: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$; vagy bármi, ami ennél több/többféle prímet tartalmaz.

Vegyük észre, hogy így a legkisebb közös többszörösnek minden közös többszörös többszöröse!

Tehát ∞ sok közös többször lehet még:

$$\text{Pl.: } 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^5 \cdot 19, \text{ vagy: } 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13^2.$$

$$[12 ; 54] = [2^2 \cdot 3; 2 \cdot 3^3] = ? \text{ Milyen prímtenyező legyen benne? Válasz:}$$

$2^x \cdot 3^y$. Legalább hányadik hatványon?

$$\text{Vagyis: } [12 ; 54] = [2^2 \cdot 3; 2 \cdot 3^3] =$$

$$[120; 16] = [2^3 \cdot 3 \cdot 5; 2^4] =$$

$$[1512; 2205] = [2^3 \cdot 3^3 \cdot 7; 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2] =$$

HÁROM V. TÖBB SZÁM LKKT-JE:

$$[2^4 \cdot 3 \cdot 5^2; 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5; 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4] =$$

f) Két vagy több szám legkisebb közös többszöröse (lkkt)

Az LKKT megtalálása: két v. több szám legkisebb közös többszörösét úgy kapjuk meg, hogy a számok kanonikus alakjában található összes különböző prímet összeszorozzuk a szereplő legnagyobb hatványukon.

Az LKKT így KITÜNTETETT KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS is, vagyis az LKKT minden közös többszörös osztója (neki minden közös többszörös többszöröse).

Relatív prímek közös többszöröse:

$[2^3 \cdot 5^7; 3 \cdot 11^3 \cdot 13^4] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 11^3 \cdot 13^4$ vagyis: a szorzatuk, mert relatív prímek.

Relatív prímek legkisebb közös többszöröse: a szorzatuk.

Áll.: $(a;b) = 1 \Rightarrow [a;b] = a \cdot b$

Állítás: két szám legkisebb közös többszörösét megkaphatom úgy, hogy a szorzatukat elosztom a legnagyobb közös osztójukkal.

$a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor: $[a;b] = \frac{a \cdot b}{(a;b)}$. Elhisszük...

Gyakorlás:

$(100; 280) =$

$[100; 280] =$

$(1200; 264; 1470) =$

$[1200; 264; 1470] =$

I/9) Gyakorló példák

a) Melyik az a legkisebb illetve legnagyobb kétjegyű szám, amelyre:

$(2^2 \cdot 3^4 \cdot 5; a) = 10$

Mo.:

b) Mi lehet az x és y, ha $(2^x \cdot 3^3 \cdot 5; 2^6 \cdot 3^y \cdot 7) = 2^4 \cdot 3^3$.

c) Mennyi x, y, k, m , ha: $[2^x \cdot 3^2 \cdot 5^3; 2^4 \cdot 3^y \cdot 5^k \cdot 7^m] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ legyen.

d) $[a;b] = 2^3 \cdot 5^4 \cdot 7$ $(a;b) = 2^2 \cdot 5$ Mi lehet az a és a b ?

e) $[a;b] = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ $(a;b) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ Mi lehet az „ a ” és a „ b ”?

f) Mennyi a $-12; -11; -10 \dots -1; 0; 1; 2; 3; \dots; 10$ számok összege?

g) Mennyi az első 20 természetes szám szorzata?

h) Mennyi 0-100-ig a természetes számok összege?

i) Mennyi 100-tól 200-ig a 3-mal osztható számok összege?

j) *Hány olyan kétjegyű szám van, amelynek különbözők a számjegyei?

k) Egy futóversenyen a fiúkat 15 másodpercenként, a lányokat 12 másodpercenként indítják. Az első pár egyszerre indul. Hány másodperc múlva indul újra egy fiú-lány pár?

l) *Hány 0 áll az első 100 pozitív természetes szám szorzata végén?

m) * Csalunk, vagy nem csalunk: megmutatjuk, hogy ugyanannyi természetes szám van, mint amennyi páros természetes

- Mindenekelőtt gondoljuk meg a „több”, „kevesebb” „egyenlő” fogalmát véges halmazon.

Egy bálban vannak lányok és fiúk. Petike még nem tud számolni. Mégis talált egy jó utasítást a bálozóknak, hogy eldöntse, fiúból v. lányból van több. Mit mond nekik?

- Keressünk egy jó párba-állítást a természetesek és a páros természetesek között!

II. Az egész számok

II/1) Definíció és alapok

a) Definíció

Az egész számok azok a számok, amelyek fölírhatók 2 természetes szám különbségeként.

Pl.:

b) Az egész számok halmazának a jele

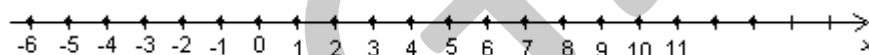
Jelük: $\mathbb{Z}$ Vagy: $\mathbb{Z}$ Kézzel leírva: _____

$\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; \dots\}$

Melyik a legnagyobb nem természetes egész szám?

c) Hányan vannak? Több egész szám van-e, mint természetes?

d) Ábrázolásuk számegyenesen



e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

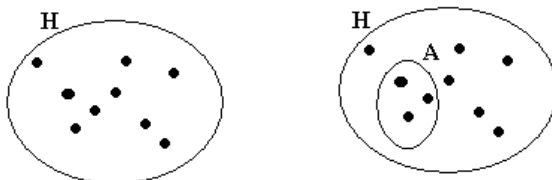
„A természetes számok halmaza része az egészek halmazának”

Vagyis $\mathbb{N}$ minden eleme $\mathbb{Z}$ -nek is eleme.

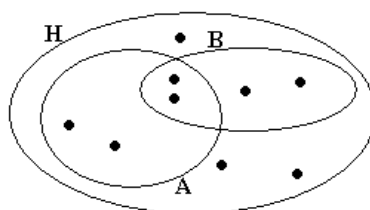
Új jelet tanultunk: $\subset$ illetve: $\subseteq$.

Adott a H halmaz. Abban néhány elemet kijelölve kapom az A halmazt.

Ekkor $A \subset H$ vagy $A \subseteq H$



Az alábbi ábrán mind az A, mind a B részei a H-nak, de az A nem része a B-nek.



II/2) A részhalmazokról bővebben

Definíció – Részhalmaz

Adott H halmaz. (Azt mondjuk, hogy) ... A részhalmaza H halmaznak, ha A minden eleme eleme a H -nak is.

Definíció – Valódi részhalmaz: Adott H halmaz.

... az A valódi részhalmaza H halmaznak, ha A minden eleme eleme a H -nak is, de van olyan eleme H -nak, amely nem eleme az A halmaznak.

JELEKKEL:

Részhalmaz: Adott H halmaz. ... $A \subseteq H \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in H)$

Valódi részhalmaz: Adott H halmaz. ... $A \subset H \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \Rightarrow y \notin A)$

Mondjunk hétköznapi példákat részhalmazra!

Pl.: Iskola $\supseteq$ osztály: ha az elem a gyerek!

(Abban az esetben van egyenlőség, ha az iskola egy osztályból áll...

Hangyák $\subset$ Rovarok

(Biztos, hogy valódi részhalmaz, mert vannak pl. katicabogarak és poloskák is.)

$7.a \subseteq 7.a$ de $7.a \not\subset 7.a$

Találj még valódi részhalmaz relációt!

A természetesek és az egészek viszonya: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.

Kiolvasva a jelet: ha egy „ a ” szám eleme a természetes számoknak, akkor abból az következik, hogy az „ a ” eleme az egész számoknak is.

Rövidebben, értelmezve, olvasva:

„Ha „ a ” természetes, akkor egész is.” „Ami természetes az egész is.”

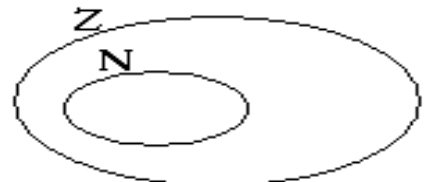
„Ha egy szám természetes, akkor egész is” „A természetesek egészek is”.

Sőt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (Valódi részhalmaza!)

Mert minden természetes egész is, de van olyan egész, amely nem természetes.

Venn-diagrammal: Írjuk be a megfelelő helyekre a következő számokat:

-3; 7; 0; 1 -100



FIGYELEM: a részhalmaz NEM eleme a halmaznak,

hanem az elemeiből körülhatárolható (ideiglenesen kijelölt, megfigyelt) halmaz.

Pl.: az osztály kékszemű diákjai csak részhalmaza az osztálynak de nem eleme!

Mert akkor az egy 20 lábú 10 fejű kékszemű lény lenne – eléggé rusnya lehet, és ráadásul be se fér egy padba.

II/3) A – mindig – elvégezhető műveletek az egész számok körében.

Elvégezhető:

Nem mindig elvégezhető:

Az _____ „kivezet” a racionális számok testébe. (pl.: 2,5 vagy $-\frac{3}{7}$ stb.)

És még ott sincs olyan szám, amelyet négyzetre emelve 10-et kapunk.

III. A Racionális számok és egy kicsit a „Valós” számokról

III/1) Definíció - alapok

a) Definíció

A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

$$x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \exists p; q \in \mathbf{Z} \rightarrow x = \frac{p}{q} \quad \text{Pl.: } \frac{5}{3} = 1, \dot{6} \quad \text{v.} \quad \frac{-3}{10} = -\frac{3}{10} = -0,3 \quad \text{v.} \quad 7 = \frac{7}{1}$$

(Így azok és csak azok, melyek felírhatók véges v. végtelen szakaszos tizedes tört alakban.)

b) Melyek ezek a számok?

$\frac{2}{3}$; -10,23; 0; 5; $1,23\dot{3}5\dot{5}$ stb. (Mit is jelent a legutolsó: $1,2 = 1,2355355355\ldots$ végtelen sok 355 van leírva.)

Van olyan szám, ami nem racionális

Az a szám, aminek a négyzete tíz: nem eleme a racionális számoknak. Vagyis nem írható fel két egész szám hányadosaként.

Az a szám, aminek a négyzete tíz:

$$\text{Négyzetgyök } 10 = \sqrt{10} \quad 3,162 \, 277 \, 660 \, 168 \, 379 \, 331 \, 998 \, 893 \, 544 \, 432 \ldots$$

Sőt: ha egy kör sugara 1, akkor a félkör kerülete $\sim 3,141592653589793 \ldots$

Ez olyan fontos szám, hogy inkább egy becenevet adtak neki: π .

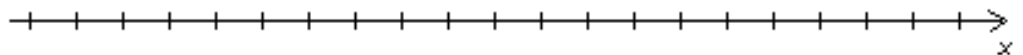
c) Jelük

A racionális számok halmazának a jele: $\mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ (quotiens: hányszor, mennyiszor)

Kézzel leírva:

Írd le jelekkel: „az egészek valódi részhalmaza a racionálisoknak”:

d) Ábrázoljuk számegyenesen:



Olyan sűrűn kellene pontokat ábrázolni, hogy azt csak folytonos vonallal tudjuk húzni, de mégis nagyon lukacsos.

Sűrű: pl.: $5\frac{1}{1000}$ (5,001) és $5\frac{2}{1000}$ (5,002) között is van szám: pl:

$$\frac{5\frac{1}{1000} + 5\frac{2}{1000}}{2} = 5\frac{15}{10000} = 5,0015$$

Az előbb elvégzett művelet: $\frac{a+b}{2}$ az a és b számok számtani közepét adta.

Vagyis két szám számtani közepe: összegük fele.

Öt darab szám számtani közepe: összegük ötöde.

Számold ki: a családot életkorának számtani közepét!

Megmutatható, hogy a racionális számok testéből nem vezet ki a négy alapművelet!

A számegyenes azonban nagyon lukacsos: több a luk, mint a pont, vagyis jóval több olyan szám található a számegyenesen, amelyik nem racionális!

III/2) Az eddig megismert számhalmazok viszonya

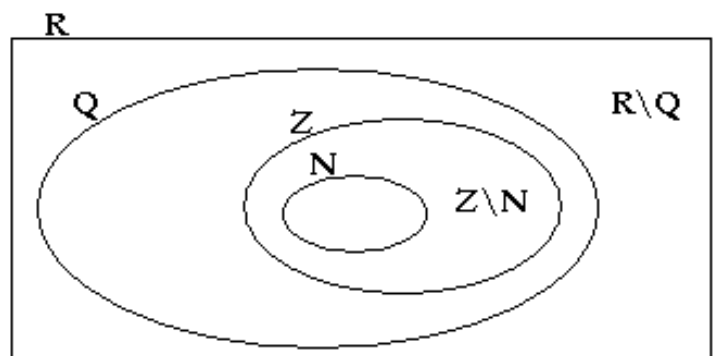
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}; \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ Hiszen: $5 \in \mathbf{Q}$, mert: $5 = \frac{5}{1} = \frac{40}{8}$

$\mathbf{R}$: a valós számok halmaza. Pl.: π , $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ az a szám, melyet négyzetre emelve 2-t kapunk? kb. $\sqrt{2} = 1,4142...$

Írd be az ábrába a következő számokat:

-10 0,75 $\sqrt{5}$
 4,013 21 0
 $-\frac{2}{3}$ π



III/3) Felírásuk: törtként, vagy tizedes törtként

Minden véges v. végtelen szakaszos tizedes törtként felírható szám racionális. és minden racionális felírható véges v. végtelen szakaszos tizedes törtként.

$$\frac{55}{40} = 1,375 \quad \frac{7}{3} = 2,3 \quad \frac{55}{7} = 7, \frac{55}{7} = 7,857142$$

$$\begin{array}{r} 21 : 13 = 1,615384 \\ 80 \\ 20 \\ 70 \\ 50 \\ 110 \\ 60 \\ 80 \end{array}$$

Vegyük észre, ha mondjuk 13-mal osztunk, és a szám nem osztható 13-mal, akkor legkésőbb a 12. osztás után „visszajön a maradék”:
 $21:13 = 1,61538461538461538461...$

De érdekes, hogy már a hetedik maradék olyan volt, mint az első: 8. Ezek mind véges, vagy végtelen szakaszos tizedes törtek.

De: 2,101001000100001... (két 1-es között a 0-ák száma mindig nő eggyel) végtelen, nem szakaszos tizedes tört - nem racionális szám. Még nem tudjuk bebizonyítani.

Az a szám sem racionális, amelynek a négyzete 10, vagyis a $\sqrt{10}$

Sőt: azon a számegyenesen, amely pontjai a racionális számokat jelölik, és amelyet igazából csak egy vonallal tudunk jelölni: nagyon sok „luk” van, több, mint amennyi pont!!!

III/4) Az elvégezhető műveletek a racionális számok testében

A racionális számok testében mindig elvégezhető mind a négy alpművelet, vagyis a négy alpművelet nem vezet ki a racionális számok testéből.

De sajnos – egyelőre nem bizonyítjuk – még köztük sincs olyan szám, melyet négyzetre emelve 2-őt, vagy épp 10-et kapnánk, vagyis a négyzetgyökvonás nem végezhető el.

És ha egy körvonalat kiterítünk a számegyenesen a 0-tól: az utolsó pontja egy luk a számegyenesen...

III/5) A valós számokról

„Definíció”: A véges v. végtelen (szakaszos v. nem szakaszos) tizedes törttel felírható számok a valós számok.

A legtöbb valós szám nem írható föl két egész szám hányadosaként!

Minden racionális egyben valós is, de nem minden valós racionális!

Köztük nemcsak a négy alpművelet végezhető el, de például bármely nemnegatív számhoz található olyan valós, amelynek négyzete az adott nemnegatív szám.

Pl.: $\exists x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 = 2$. És ez az $x \notin \mathbf{Q}$. $x \approx 1,41421356237309504880168872421...$

A valós számoknak már „kölcsonösen egyértelműn” meg tudunk feleltetni minden pontot a számegyenesen.

Így a számegyenes már nem lesz „lukacsos”, mint a racionális számok esetén.

A valós számok jele: $\mathbf{R}$. Így: $\mathbf{R} \supset \mathbf{Q} \supset \mathbf{Z} \supset \mathbf{N}$.

Irracionális számok: a nem racionális valósak: $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

Amikor számokról beszélünk, akkor a valós számokat értjük rajta.

Ha szűkíteni akarjuk a kört, azt külön jelezni kell: pl. „egész szám”

Érdekesség: természetesek – egészek – racionálisak: ugyanannyian vannak, de a valósak összehasonlíthatatlanul többen vannak náluk!

IV. Egy kicsit a halmazokról

IV/1) Halmaz megadása

- a) Elemei felsorolása: $A = \{2; 5; 13\}$, $B = \{\text{ló; vírus; telefon}\}$

A szűk családod halmaza = {

0-tól 10-ig a prímek halmaza:

$B = \{$

- b) „A közelebbi osztály, és az elemekre jellemző vonás”

Legtöbbször nem lehet felsorolni az elemeket. Ezért veszünk egy nagyobb halmazt, és megmondjuk, hogy milyen utasítás jelöli ki a kívánt halmazunk elemeit.

- A „lovak” definíciója:
Állat, amelynek négy lába van és nyerít:
 $C = \{x \in \text{állatok} \mid x\text{-nek négy lába van és nyerít}\}$

„Genus proximum et differentia specifica”
Legközelebbi nem és megkülönböztető jegy

- Egész számok, melyek 4-gyel oszthatók: $D = \{n \in \mathbf{Z} \mid 4 \mid n\}$

- Adott Q pont és r szakasz: $K = \{P \in S \mid PQ = r\}$

Mi ez?

Mondjuk ki szavakkal: „Azon pontjai a síknak, melyek egy adott Q ponttól r távolságra vannak.

Rajzolj le sok pontot belőle: a Q adott, és $r = 2$ cm.

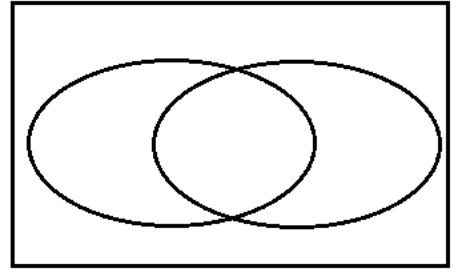
Vagyis ez a:

r = radius, vagyis:

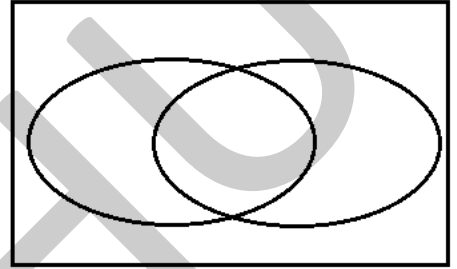
Q .

IV/2) Venn-diagrammal történő rajzolás

- a) Rajzoljuk föl az osztályba járó K = kék szeműek és az N = németül tanulók halmazát. Alaphalmaz a H = osztály. Mindenhová írjuk egy-egy gyerek monogramját.



- b) Rajzoljuk fel a A = 6-tal B = 10-zel osztható számok halmazát. Alaphalmaz: N .



Vegyük észre:

A = a 6 többszörösei...

B = a 10 többszörösei...

Vagyis a metszetük:

IV/3) Halmaznak minden típusból csak egy eleme van

Vagyis a MATEMATIKA szó betűinek halmaza:

$H = \{ \quad \} \quad |H| =$

Szavakkal: a H halmaz *számossága* hat.

Írd fel az osztály halmazának számosságát:

Írd föl a „elemekkel” betűinek halmazát, majd add meg a számosságát:

IV/4) Üres halmaz és a halmazok metszete

Def: azt a halmazt, amelynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük. Az üres halmaz számossága, elemeinek a száma: 0.

Jele: $\emptyset$.

IV/5) Felrajzolásuk

Ha 2 vagy több halmazt rajzolunk föl, akkor első nekifutásnak – ha a józan ész másképp nem diktálja – úgy rajzoljuk föl őket, hogy mindnek legyen metszete.

V. Gyakorlás

V/1) Eldöntendő kérdések (Igaz/Hamis)

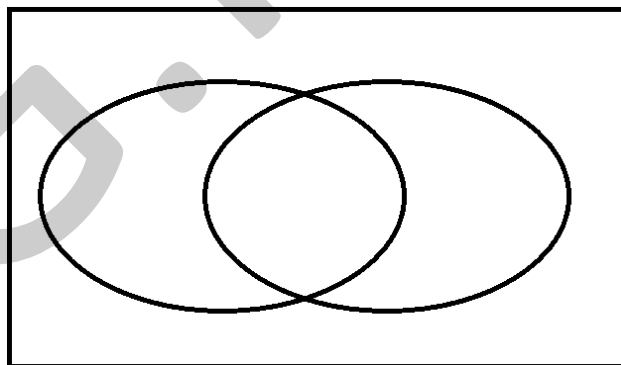
- a) Ami racionális, az egész is.
- b) Minden egész felírható két egész szám hányadosaként.
- c) A 0 irracionális szám.
- d) $5 \mid 0$
- e) Van olyan valós szám, amelyik felírható két egész hányadosaként.
- f) Két racionális összege racionális.
- g) Két természetes különbsége természetes.
- h) A π felírható két egész szám hányadosaként.
- i) Két egész összege racionális.
- j) Ha az egészekből elveszem a racionálisakat, akkor $\emptyset$ -t kapok.
- k) Egy racionális számhoz mindig található egy másik racionális szám, melynek négyzete az eredeti racionális szám.

V/2) Venn-diagramok „feltöltése” elemekkel

Címkék: **R; Q; Z; N**

Írd be a címkéket, rajzold be a hiányzó ellipszist, írd be számokat, majd satírozd be az üres halmazt!

$\frac{13}{5}$ $0,3\dot{5}2\dot{7}$ $0,3$
0 $-4,8$ -43 7
 $0,123456789101112...$
 π $\sqrt{5}$



VI. Egyéb műveletek a racionális számok testében

VI/1) Szám és ellentettje

Def.: Egy szám ellentettje a szám -1 -szerese.

Pl.: 12 ellentettje: -12 . 0 ellentettje 0.

(Vigyázat: ne keverjük össze a reciprokka!...)

VI/2) Szám és abszolútértéke

Def.: Ha egy szám 0 vagy pozitív, akkor az abszolútértéke önmaga, ha negatív akkor az ellentettje.

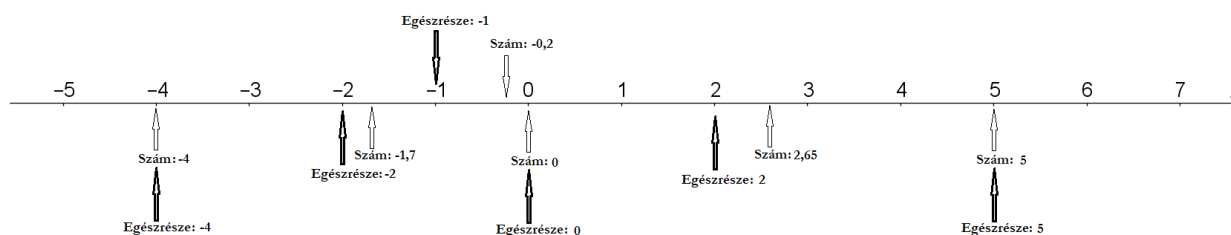
$$|-5| = 5 \quad |5| = 5 \quad |0| = 0$$

Melyek azok a számok, amelyekhez hozzáadva abszolútértéküket 0-át kapunk?

Melyek azok a számok, melyek abszolútértékének ellentettje önmaguk: $-|x| = x$

VI/3) Szám egészrésze

- a) **Def.:** Egy szám egészrésze a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.
 b) Érdemes számegyenesen figyelni



c) Jele: $[x]$

d) Gyakorlás:

$$\begin{aligned}
 [5,3] &= & [5] &= & [4,999] &= & [0,63] &= \\
 [0] &= & [-2,8] &= & [-0,48] &= & [-123] &= \\
 [-122,76] &= & & & & & &
 \end{aligned}$$

Itt hasznos a vegyestört:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{5}{7} \right] &= & \left[\frac{25}{7} \right] &= \\
 \left[-\frac{2}{7} \right] &= & \left[-\frac{25}{7} \right] &= \\
 \left[\frac{124}{125} \right] &= & \left[-\frac{12}{11} \right] &=
 \end{aligned}$$

e) Igaz-e, hogy két szám egészrészének összege egyenlő a két szám összegének egészrészével?

A kérdés azt jelenti, hogy „bármely két szám ...”.

Vagyis ez nem igaz, mert vannak olyan számpárok, amelyekre ez nem igaz.

Pl.: 4,5 és 5,6

Kiszámolva: $[4,5+5,6] = \underline{\hspace{2cm}}$ $[4,5]+[5,6] = \underline{\hspace{2cm}}$

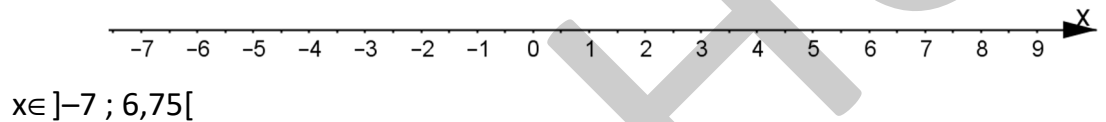
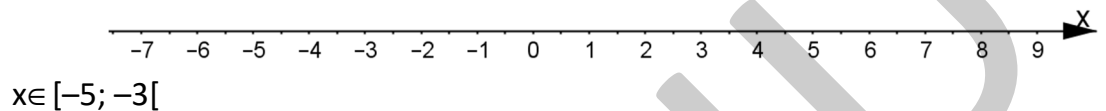
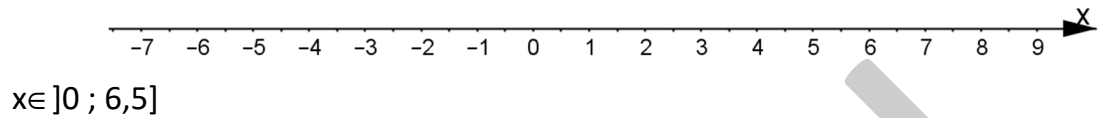
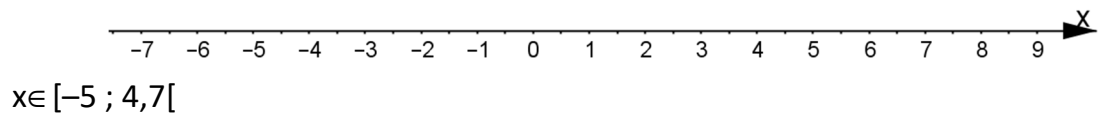
Különbségnél sem: $3,1 - 4,9$. Számold is ki!

Matematikában a műveletek legtöbbször nem fölcserélhetők, habár a diákok ezzel nem akarnak törődni – vagyis nem érnek rá törődni, gyorsan összezsapják és szaladnak a grundra vagy a facebookra... Az eredménye pedig...

Például: $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$

f) Intervallum ábrázolás számegyenesen, és jelölése

Mit jelent: $x \in [2,8 ; 10]$



g) Argumentum visszakeresése

$[x] = 4$ Mennyi az x ?

$[x] = -5$ Mennyi az x ?

VI/4) Szám törtrésze

a) Def.: $\{x\} = x - [x]$ Szám mínusz egészrésze - vagyis: „Az egészrésztől vett távolsága”

Vegyük észre: MINDIG 0 vagy POZITÍV ÉRTÉKŰ

$$\{7,8\} = 7,8 - 7 = 0,8$$

$$\{0,29\} =$$

$$\{100,07\} =$$

$$\{3\} =$$

VESZÉLY: NEGATÍVAK TÖTRÉSZE

$$\{-5,6\} =$$

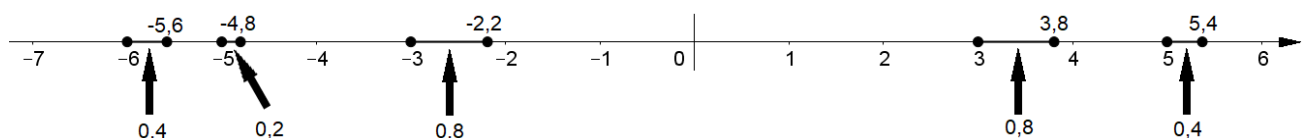
$$\{-4,8\} =$$

$$\{-2,2\} =$$

$$\{-4\} =$$

Vegyük észre: mindig kisebbet vagy önmagát vonjuk ki, tehát a végeredmény MINDIG pozitív!

Úgy is el lehet képzelni, hogy a hozzá legközelebb eső, nála nem nagyobb egésztől vett távolsága, vagyis az egészrésztől vett távolsága: $x - [x]$



b) Gyakorlása

$$\{1,23\} = \quad \{10\} = \quad \{100,001\} =$$

$$\{-2\} = \quad \{-1,7\} = \quad \{-0,08\} =$$

$$\left\{\frac{18}{5}\right\} = \quad \left\{\frac{23}{8}\right\} =$$

$$\left\{\frac{8}{23}\right\} = \quad \left\{-\frac{18}{5}\right\} =$$

$$\left\{-\frac{47}{8}\right\} = \quad \left\{-\frac{8}{22}\right\} =$$

$$\left\{\frac{100}{99}\right\} = \quad \left\{-\frac{101}{102}\right\} =$$

$$* \left\{2,\dot{9}\right\} =$$

Észrevétel: minden egész szám törtrésze: _____.

Melyik az a legkisebb pozitív szám, amely törtrésze 0?

Mekkora lehet egy szám törtrésze? (A válasz nem egy konkrét érték, hanem érdemes a korábban tanult intervallumot használni...)

$[x] = 3$ Minek eleme az x ?

$\{x\} = 0,2$ Mi lehet az x ?

VI/5) Szám „előjel-függvénye”, szignum.

Definíció

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Gyakorlása:

$$\operatorname{sgn}(0,7) = \quad \operatorname{sgn}(13) = \quad \operatorname{sgn}(0) = \quad \operatorname{sgn}(-5,2) =$$

Az x akármilyen is lehet, mennyi a: $\operatorname{sgn}(x^2+1) =$

VII. JELEK JELEK JELEK

VII/1) Jelek neve - írd mellé a pontozott vonalra kézzel

$\forall$: minden, bármely

$\in$: eleme $\notin$: nem eleme

Pl.: $x \in \mathbb{R}$

Vagyis: „x eleme a valós számok halmazának”

Elegánsabban: „x valós szám”

$\exists$: létezik (olyan), van (olyan)

$\nexists$ nem létezik (olyan), nincs (olyan)

$\exists!$ egyértelműen létezik (olyan) (pontosan egy olyan ... van):

.....

$\rightarrow$: olyan hogy (a nyíl a „vonalon” halad:

pl: $\exists$ alma $\rightarrow$ piros

„Létezik olyan alma, hogy piros”

Szebben: „Van olyan alma, amelyik piros”

Még szebben: „Van piros alma”

$\Rightarrow \Leftarrow \Uparrow \Downarrow$: következés jel:

„-ból következik”; „esetén”; „ha ... akkor ...” stb.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

„Ha x eleme a racionális számok halmazának, akkor x eleme a Valós számok halmazának is”

Szebben: „Ha x racionális, akkor valós is”. vagy: „Minden racionális szám valós.”

Visszafele nem biztos, hogy igaz: $x \in \mathbb{R} \nRightarrow x \in \mathbb{Q}$

(Ha valami racionális, abból még nem következik, hogy valós is)

Vagy: $10|a \Rightarrow 5|a$. De visszafelé már nem igaz: $5|a \nRightarrow 10|a$

$\Leftrightarrow$: akkor és csak akkor; pontosan akkor

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [y] = y$

Vagyis „y akkor és csak akkor egész szám, ha egészrésze = önmagával.”

„Egy szám pontosan akkor egész, ha önmaga az egészrésze”

$\wedge$: és $\vee$: vagy „most tanulok $\vee$ nyáron tanulok”

„szorgalmas vagyok $\wedge$ rendes vagyok”

Figyelem: matematikában a „vagy” nem „kizáró vagy”: A „moziba megyek vagy uszodába” jelentheti azt is, hogy ide is és oda is megyek...

Így ha azt mondod öcsikének, hogy „vagy a Milkát eszem meg, vagy a Kinder tojáást”, majd befalod mindkettőt: nem hazudtál... matematikailag...

VII/2) Halmazok jelölése, megadása

A; B; C stb. Vagy: elemeik felsorolásával, de akkor 1 elem csak egyszer szerepelhet:

Pl.: a MATEMATIKA szó betűinek halmaza: $H = \{M; A; T; E; I; K\}$

$\emptyset = \{ \}$: üres halmaz az a halmaz, amelynek nem létezik eleme.

Pl.: azon emberek halmaza, akik már jártak a Marson.

$|\emptyset| = 0$ $|\{ \}| = 0$ (Üres halmaz számossága 0) **de:** $|\{\emptyset\}| = 1$

(Ez utóbbi olyan, mintha egy szekrényben volna egy dolog: egy üres szekrény.)

VII/3) Számhalmazok kapcsolata; kivonás

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ (A természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának)

Vagyis: $(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Q}) \wedge (\exists x \in \mathbb{Q} \rightarrow x \notin \mathbb{N})$

Írd le kézzel:

Halmazok kivonása: A halmazelméleti „mínusz” jel: $\setminus$

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: **Z** összes olyan eleme, amely nem eleme **N**-nek.

(Jelen esetben: $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1; -2; -3; -4 \dots\}$)

Magyarán: „A nem természetes egészek” v. „A negatív egészek”

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} =$

$\mathbb{Z} \setminus \{0\} =$ a nem nulla egész számok

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} =$ a nem egész racionális számok

VII/4) Egyéb jelek a számoknál

$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$; $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{N}^+$; $\mathbb{Q}^+$, stb.

Az egészekre, természetesekre általában az abc első betűit használjuk: a, b, c, d, ... t, u.

A valósakra: x, y, z, v, w

A racionálisakra bármelyiket.

A „bármely szám” kifejezést mindig a legtágabb halmazra kell érteni. Alapvetően a **valósakra**. Tehát pl.: bármely olyan szám, ...: $\forall x \in \mathbb{R} \dots$

VII/5) Gyakorlásuk

a) ELŐSZÖR ÍRD LE KÉZZEL AZT, AMI OTT VAN, MAJD SZAVAKKAL.

Ha állítás, dönts el, igaz-e! (I v. H)

$a \in \mathbb{Q}$

$b \notin \mathbb{N}$

$\forall c \in \mathbb{N} \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$

$a \notin \mathbf{Z} \Rightarrow a \notin \mathbf{N}$

.....

$\exists x \in \mathbf{Z} \rightarrow x \in \mathbf{N}$

.....

$\mathbf{Z}^+; \mathbf{Q}^-; \mathbf{Z}_0^+$

.....

$\exists ! b \in \mathbf{Z} \rightarrow b^2 = 1$

.....

$\nexists n \in \mathbf{Z} \rightarrow n^4 = 8$

.....

$\forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow k \in \mathbf{Q}$

.....

$\nexists x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 < 0$

.....

$(p \in \mathbf{Q}^+ \rightarrow p^2 \in \mathbf{N}) \Rightarrow p \in \mathbf{N}$

.....

$\nexists k \in \mathbf{R} \rightarrow |k| < k$

.....

$(p \in \mathbf{N} \wedge 3|p \wedge 10|p) \Rightarrow 3|(p/10)$

.....

$\nexists x \in \mathbf{Z} \rightarrow [x] > x$

.....

Def.: $x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \exists p; q \in \mathbf{Z} \rightarrow x = \frac{p}{q}$

.....

$\exists x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z} \rightarrow \{x\} = \{10x\}$

.....

$\exists x \in \mathbf{Q} \rightarrow x^2 = 5$

.....

b) Írd föl jelekkel

Def.: Részhalmaz: Azt mondjuk, hogy A halmaz része B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme. (Ez jó definíció, fejből kell tudni!)

.....

.....

Def.: Valódi részhalmaz: Azt mondjuk, hogy A halmaz valódi része B-nek, ha A minden eleme B-nek is eleme, és van olyan eleme B-nek, ami nem eleme A-nak.

.....

.....

Ami természetes az valós is.

Próba:

Jól:

Van olyan racionális szám, amelyik nem egész.

Próba:

Jól:

Bármely nem nulla természetes szám reciproka racionális.

Próba:

Jól:

Létezik olyan irracionális szám, amelynek a négyzete racionális.

Próba:

Jól:

Bármely két racionális szám szorzata racionális.

Próba:

Jól:

Ha egy szám egészrésze kisebb önmagánál, akkor az nem egész.

Próba:

Jól:

Egyértelműen létezik egy olyan pozitív természetes szám, mely négyzete önmagával egyenlő.

Próba:

Jól:

Nincs olyan racionális szám, amelynek a négyzete hét.

Próba:

Jól:

Egy nullánál nem kisebb, de 1-nél kisebb szám törtrésze önmaga.

Próba:

Jól:

A szorzás nem vezet ki a természetes számok köréből.

Próba:

Jól:

Ha két természetes szám osztja egymást, akkor ők egyenlők.

Próba:

Jól:

Egyértelműen létezik egy olyan nemnegatív valós szám, mely négyzete 3.

Próba:

Jól:

Bármely racionális szám előáll két egész hányadosaként.

Próba:

Jól:

10 bármely pozitív egész kitevős hatványa előáll két négyzetszám összegeként.

Próba:

Jól:

Egy egynél nagyobb természetes pontosan akkor prím, ha 1-en és önmagán kívül nincs osztója.

Próba:

Jól:

Oszthatóság definíciója: Legyen a és b egész. Ekkor a osztja b -t akkor és csak akkor, ha van olyan egész, amellyel megszorozva a -t b -t kapok.

Próba:

Jól:

Hatványozás

I. Definíció és azonosságok

I/1) Bevezetés

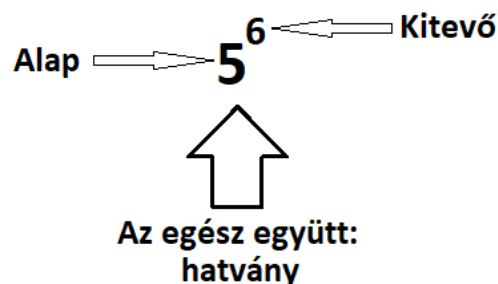
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$$(-10)^5 = (-10)(-10)(-10)(-10)(-10) = -100\,000$$

$$1^6 =$$

$$0^5 =$$



I/2) A „hatvány” definíciója

Def.: $a \in \mathbf{R}; n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\} \Rightarrow a^n = \overset{1.}{a} \cdot \overset{2.}{a} \cdot \dots \overset{n.}{a}$ („Olyan szorzat, mely a tényezi: n db. „ a ”.

„ a ” az alap, „ n ” pedig a kitevő. Olvasd: „ a az n -ediken”, vagy pedig: „ a ad n ”.

$a^2 =$ „ a a másodikon” v. „a négyzet” „ a ad kettő” $= a \cdot a$.

$a^3 =$ „ a a harmadikon” v. „a köb” „ a ad három” $= a \cdot a \cdot a$.

$a^4 =$ „ a a negyediken” „ a ad négy” $= a \cdot a \cdot a \cdot a$.

...

$a^k =$ „ a a k -adikon” $= \overset{1.}{a} \cdot \overset{2.}{a} \cdot \dots \overset{k.}{a}$ „ a ad k ”

stb.

Zárójelezés, műveleti sorrend: $2^{3^4} = 2^{(3^4)} \neq (2^3)^4$

ugyanis: $2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{81} = 2\,417\,851\,639\,229\,258\,349\,412\,352$ (25 jegy)

míg: $(2^3)^4 = 8^4 = 4096$

I/3) Hatvány szorzat alakban – szorzat hatványalakban

a) Konkrét számokkal

$$1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = \underline{\hspace{2cm}} \quad 2,5^3 = 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 15,625$$

$$0^3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (-1,7)^2 = (-1,7) \cdot (-1,7) = \underline{\hspace{2cm}} \quad 0,2^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{De: } -3^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Mert a hatványozás megelőzi a szorzást! } (-3 = -1 \cdot 3)$$

$$1,2^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (-3)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-10)^4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad -10^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Műveleti sorrend:

$$6+2 \cdot 5 = 6+(2 \cdot 5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \cdot 2^5 = 3 \cdot (2^5) = 3 \cdot 32 = 96 \neq (3 \cdot 2)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Vagyis először a hatványozás,
utána a szorzás-osztás,
végül az összeadás – kivonás.

b) Jelekkel:

$$x \cdot x \cdot x =$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a =$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x =$$

I/4) Azonos alapú hatványok szorzata

a) Bevezetése

$$2^4 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9. \quad 4 \text{ db} + 5 \text{ db} = 9 \text{ db!}$$

Észrevétel: a kitevők összege lesz a végeredmény kitevője.

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9. \quad 2 \text{ db} + 4 \text{ db} + 3 \text{ db} = 9 \text{ db!}$$

Észrevétel: a kitevők összege lesz a végeredmény kitevője.

b) Azonos alapú hatványok szorzata

Mondóka: azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Írd át a hatványokat először zárójelbe szorzatokká, majd írd át hatványalakba!

$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2 =$$

$$3^2 \cdot 3^8 \cdot 3^0 \cdot 3 =$$

$$(-7)^2 \cdot (-7)^7 =$$

$$\text{Itt elég a végeredmény: } 2^7 \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 7^3 \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 7^6 \cdot 7^0 \cdot 2^2 =$$

Figyelem: a végeredményben mindig először a számokat írjuk növekvő alapsorrendben („kanonikus alak”), utána a betűket abc sorrendben.

Még egyszer a negatív számok hatványáról:

$$(-3)^4 = \underline{\hspace{2cm}} \quad - \text{ páros db. negatív szám szorzata: pozitív}$$

$$(-2)^5 = \underline{\hspace{2cm}} \quad - \text{ páratlan db. negatív szám szorzata: negatív}$$

$$-2^6 = (-1) \cdot 2^6 = (-1) \cdot 64 = -64 \text{ mert } 2^6 \text{-on van megszorozva } -1 \text{-gyel.}$$

$$x^4 \cdot (-2)^7 \cdot (-2^8) \cdot a^2 \cdot x^3 \cdot a^2 \cdot x = \hspace{2cm} a \cdot 5^m \cdot x^k \cdot a^0 \cdot 5^8 \cdot a^2 \cdot x^p \cdot a^2 =$$

$$5^5 \cdot 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^k \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 5 \cdot 2^0 \cdot 3^n =$$

I/5) Azonos alapú hatványok hányadosa és az egész kitevők

Eddig csak: $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ kitevők voltak!

a) Bevezetés

$$\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$\frac{2^7}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$\frac{3^{28}}{3^{17}} =$$

$$\frac{(-5)^8}{(-5)^6} =$$

b) **Mondóka: azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.**

Gyakoroljuk:

$$17^7 : 17^5 =$$

$$(-2)^{15} : (-2)^8 =$$

$$20^{13} : 20^{10} =$$

$$10^{20} : 10^8 =$$

$$7^8 : 7^5 =$$

$$\frac{2^8}{2^3} =$$

$$15^3 : 15 =$$

$$\frac{7^{14}}{7^4} : 7 =$$

$$\frac{0^7}{0^3} =$$

$$\frac{3^7 \cdot 3^8}{3^3 \cdot 3^7} =$$

$$\frac{15^4 \cdot 15^{20}}{15^{16} \cdot 15^6} =$$

Az előző állítás alapján gyanús kitevők jelennek meg:

$$\frac{2^6}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

$$\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^6}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-4} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$$

$$\frac{2^6}{2^5} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-5} = 2 = 2^1 = 2$$

$$\frac{2^6}{2^6} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-6} = 1 = 2^0 = 1$$

$$\frac{2^6}{2^7} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-7} = \frac{1}{2} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2^6}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-8} = \frac{1}{2 \cdot 2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2^6}{2^9} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{6-9} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

...

$$\frac{2^4}{2^7} = \quad = \quad = \quad = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Gyanús kitevők, hiszen hogyan szorzunk valamit önmagával össze 1-szer, 0-szor, vagy épp -3-szor?!

c) Definíció: az 1. és a 0. kitevő:

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^1 = a$. Vagyis: Minden szám 1. hatványa legyen maga a szám.

Pl.: $10^1 =$ $(-34,2)^1 =$ $0^1 =$ $1^1 =$ $(-1)^1 =$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a^0 = 1$. Vagyis bármely nem nulla szám nulladik hatványa: 1.

Mivel ez definíció, ezért nem bizonyítjuk, de a motivációja a következő:

$$1 = \frac{6^{10}}{6^{10}} = 6^{10-10} = 6^0 \text{ (Az előző állítás alapján.)}$$

Vagy: $3^5 \cdot 3^0 = 3^{5+0} = 3^5$. Vagyis 3^0 csakis 1 lehet.

Pl.: $2,4^0 =$ $(-5)^0 =$ $1^0 =$ $(-100)^0 =$

Vigyázat: 0^0 ~~?~~ Nincs értelmezve!

$$5^0 \cdot 5^3 =$$

$$3^1 \cdot 3^3 =$$

Figyelem: mindig az előjel meghatározása az első!

$$-3^6 \cdot 3^2 =$$

$$(-5)^0 \cdot (-5)^5 \cdot (-5)^1 =$$

$$(-2)^6 \cdot (-2)^3 =$$

$$-2^4 \cdot (-2)^0 \cdot 2^4 =$$

d) Definíció: Negatív egész kitevők: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

$$\text{Pl: } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625} = 0,0016$$

Motivációja:

$$5^{-2} = 5^{0-2} = \frac{5^0}{5^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

$$5^{-2} = 5^{4-6} = \frac{5^4}{5^6} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

Vigyázat: a hatványozás végeredményének előjele csakis az alap előjelétől és a kitevő paritásától függ, semmiképp sem a kitevő előjelétől! Érdemes először az előjellel „elbánni”!

$$\frac{(-11)^7}{-11^4} =$$

$$\frac{11^4}{11^7} =$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = 0,03125$$

$$5^{-2} =$$

$$\frac{1}{(-5)^4} =$$

$$\frac{1}{a^3} =$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^4 = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b^4} = b^{-4} \quad 8^{-1} =$$

e) A 0 hatványai. (Nézzünk vissza az előző pontokra!)

$$0^4 = \quad 0^3 = \quad 0^2 = \quad 0^1 = \quad 0^0 =$$

0-nak csak pozitív természetes kitevőjű hatványa lehet, és az érték minden esetben 0.

l/6) Azonos alapú, *egész kitevőjű* hatványok szorzata, hányadosa

a) Bevezetés

$$2^3 \cdot 2^{-7} = 2^3 \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{-4} \text{ a kitevők: } 3 + (-7) = -4 \checkmark$$

$$\frac{7^{-3}}{7^{-5}} = \frac{\frac{1}{7^3}}{\frac{1}{7^5}} = \frac{1}{7^3} \cdot 7^5 = 7^2 \text{ A kitevők: } -3 - (-5) = 2 \checkmark$$

Úgy tűnik, *ugyanúgy működnek a szabályok, mint a pozitív kitevőnél.*

$$\text{Írd úgy, hogy ne legyen tört: } \frac{1}{3^5} = \quad \frac{1}{2^4} =$$

b) Tétel pontosan, jelekkel:

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^n \cdot a^k = a^{n+k} \text{ illetve } a^n : a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}.$$

Például:

$$2^4 \cdot 2^{-7} = 2^{4+(-7)} = 2^{-3} = 0,125 \text{ illetve } 2^4 : 2^{-7} = 2^{4-(-7)} = 2^{11} = 2048$$

Figyelem: érdemes először megállapítani az előjelet!

$$5^{10} \cdot 5^{-12} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

$$7^{-20} \cdot 7^{-15} =$$

$$12^{-8} \cdot 12^8 =$$

$$1^5 \cdot 1^{-7} =$$

$$(-2)^8 : (-2)^{10} =$$

$$3^{-5} : 3^4 =$$

$$\frac{3^7}{3^8} =$$

$$\frac{12^0}{12^2} =$$

$$\frac{-17^3}{(-17)^{-4}} =$$

$$\frac{5^6}{5^4} =$$

$$\frac{5^{-6}}{5^4} =$$

$$\frac{5^6}{5^{-4}} =$$

$$\frac{5^{-6}}{5^{-4}} =$$

$$20^{-4} : 20^{-4} =$$

$$5^{-6} \cdot (-5)^{-6} =$$

$$10^5 \cdot 10^{-5} =$$

$$2^{-4} : 2^{-1} =$$

$$3^6 : 3^{-5} =$$

c) Gyakorlás

$$x^{-3} \cdot x^7 =$$

$$10^2 \cdot 10^3 =$$

$$0,01 \cdot 10^{-4} =$$

$$10^3 : 0,001 =$$

$$10^2 \cdot 10^{-5} =$$

$$5^{-3} \cdot 5^{-2} =$$

$$1000 \cdot 10^{-6} =$$

Figyelem: a sorrend: prímtényező növekvő sorrendben, majd abc.

$$(-7) \cdot b^{-3} \cdot a^3 \cdot 2^5 \cdot b^7 \cdot 7^8 \cdot a^0 \cdot 2^7 =$$

$$a^3 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{-5} \cdot a^{-3} \cdot 3^{-4} =$$

$$(-3)^4 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3 \cdot 2 \cdot 7^{-3} \cdot 7^8 \cdot 3 =$$

$$5^{-2} \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{-5} \cdot 5^0 \cdot 2^{-4} =$$

Ne legyen se zárójel, se tört! Figyelem: először az előjelet érdemes meghatározni, azt leírni, és utána az előjellel már nem kell foglalkozni!

$$\frac{5^2}{5^3} =$$

$$\frac{5^{-2}}{5} =$$

$$\frac{5^2}{5^{-3}} =$$

$$\frac{5^{-2}}{5^{-3}} =$$

$$\frac{1}{y^{-3}} =$$

$$\frac{b^2}{b^1} =$$

$$\frac{c^2}{c^2} =$$

$$\frac{5^{-3}}{5^{-3}} =$$

$$\frac{(-5)^5}{(-5)^{-4}} =$$

$$\frac{-y^2}{(-y)^{-3}} =$$

$$\frac{y^5}{y^{-4}} =$$

$$\frac{1}{5^3} =$$

$$\frac{1}{5^{-4}} =$$

$$\frac{a^{-2}}{a} =$$

$$\frac{1}{y^2} =$$

I/7) Szorzat hatványa

a) Bevezetés: az alábbi két művelet *oda-vissza működik!*

$$(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3 \text{ és visszafelé is!!!}$$

$$(2 \cdot 5)^{-3} = \frac{1}{(2 \cdot 5)^3} = \text{az előző sor alapján} = \frac{1}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5^3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3} - \text{visszafelé is!}$$

b) **Mondóka: Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezőket az eredeti hatványkitevőre emelve összeszorozzuk.**

$$\text{Vagyis: } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k.$$

$$(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$$

$$(7 \cdot 10)^{-3} = 7^{-3} \cdot 10^{-3}$$

$$(10)^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$$

$$(70)^{-3} = (2 \cdot 5 \cdot 7)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3}$$

Most már negatív kitevőjű hatványokra is kimondhatjuk a megszokott tételt!

Mondóka: Azonos kitevőjű hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

$$11^{-4} \cdot 10^{-4} = (11 \cdot 10)^{-4} = 110^{-4}$$

c) Gyakorlás: Ne legyen se zárójel, se tört. Ami nem kanonikus alakban van, azt kanonikus alakra hozni, ami abban van, ott a végeredmény egy hatvány legyen.

$$10^3 =$$

$$4^7 \cdot 3^7 =$$

$$(30)^{-4} =$$

$$42^{-5} =$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{125} =$$

$$66^5 =$$

$$15^{-3} =$$

$$3^7 \cdot 5^7 =$$

$$(14)^{-3} =$$

$$1000^4 =$$

$$5^4 \cdot 2^6 =$$

$$2^7 \cdot 5^5 =$$

$$5^{-3} \cdot 2^{-4} =$$

$$\text{Kanonikus alak: } 144000 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 =$$

$$22\,500\,000 =$$

$$3\,500\,000 =$$

$$19600 =$$

$$3\,240\,000 =$$

$$\text{Minta: } 48 \cdot 25 \cdot 50 = 3 \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 5^2 = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^4 = 3 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 6 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 60\,000$$

$$32 \cdot 75 \cdot 75 \cdot 25 =$$

$$15^3 \cdot 24 =$$

$$216 \cdot 225 =$$

Negatív számok hatványozása újra:

$$(-3)^4 = (-1)^4 \cdot 3^4 = 1 \cdot 3^4 = 81$$

$$(-3)^5 = (-1)^5 \cdot 3^5 = -3^5 = -243$$

$$(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \qquad (-1)^{-5} = \frac{1}{(-1)^5} = -1.$$

Vagyis kimondhatjuk, hogy: $(-1)^{\text{páros}} = 1$ és $(-1)^{\text{páratlan}} = -1$

$$(-4)^5 = \qquad (-5)^4 =$$

$$(-5)^{-4} = \qquad (-12)^{-7} =$$

Tehát: negatív szám páratlan kitevős hatványa negatív, páros kitevős hatványa pozitív értékű.

d) A 0-ra végződés

$$12000 = 12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Észrevétel: Egy szám annyi 0-ra végződik, ahány tízes szorzótényező van benne.

$$12000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3. \text{ Hol van itt a 10-es szorzó?}$$

$$\text{Hát itt: } 1200 = (2^2 \cdot 3) \cdot (2^3 \cdot 5^3) = (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5)^3 =$$

$$\text{Hány 0-ra végződik: } 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 =$$

$$\text{Hány 0-ra végződik a } 15! (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15)$$

Mo.: $15! : = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15$. A annyi 0-ra végződik, ahány 10-es szorzótényező van benne. Ez pedig ahány $(2 \cdot 5)$ -ös pár van benne a kanonikus alakjában.

2-es sok van, de 5-ös: csak az 5, a 10, és a 15-ös tényező miatt van: 3 db. Tehát 3 db. $(2 \cdot 5)$ -ös pár van benne, vagyis 3 db. 0-ra!

$$\text{Hány 0-ra végződik a } 150!$$

$$150! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 149 \cdot 150$$

I/8) Tört hatványa

a) Bevezetés

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2^3}{5^3} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$$

$$\frac{12^4}{15^4} = \left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{12}{15}\right) = \left(\frac{12}{15}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4$$

b) Törtek

Mondóka: Törtet úgy hatványozunk, hogy a számlálót is és a nevezőt is az adott hatványkitevőre emeljük.

Mondóka: Azonos kitevőjű hatványokat úgy osztunk, hogy az alapok hányadosát az adott kitevőre emeljük.

Az állítás negatív kitevőre is működik!

Vagyis: $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}.$

Gyakorlás - Ne legyen se zárójel se tört!

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5^4}{7^4} = 5^4 \cdot 7^{-4} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = \frac{5^{-4}}{7^{-4}} = 5^{-4} \cdot \frac{1}{7^{-4}} = 5^{-4} \cdot 7^4.$$

$$\left(\frac{5a}{14b}\right)^{-4} = \quad \left(\frac{11}{6}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{11}{6}\right)^0 = \quad \left(\frac{11}{6}\right)^{-3} =$$

$$\frac{50^8}{10^8} = \quad \frac{56^{10}}{24^{10}} =$$

Vigyázat! Nem egyszerűsíthetünk „csak úgy”!

$$\frac{60^8}{10^6} = \quad \frac{12^7}{15^5} =$$

$$\frac{14^{-5}}{21^{-7}} = \quad \frac{14^{-7}}{21^{-5}} =$$

I/9) Hatvány hatványa

a) Bevezetés

$$(5^3)^2 = (5^3) \cdot (5^3) = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^6. \quad (7^3)^{-1} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}.$$

$$8^{10} =$$

$$343^{-5} =$$

b) **Mondóka: Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.**

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

c) Gyakorlás. (Ne feledjük, érdemes először az előjellel „elbánni”!)

$$(3^5)^6 =$$

$$(3^6)^5 =$$

$$(3^{-5})^6 =$$

$$(5^3)^{-7} =$$

$$(2^2 \cdot 3)^4 =$$

$$((7^2)^3)^4 =$$

$$(x^2 y)^6)^3 =$$

$$2^{3^4} =$$

Mostantól KANONIKUS ALAKOT KÉREK

$$25^3 =$$

$$27^5 =$$

$$(32^2)^7 =$$

$$(243^4)^5 =$$

$$144^{10} =$$

$$50^{-7} =$$

$$(12a^2)^3 =$$

$$24^{-3} =$$

$$324^{-5} =$$

$$8800^{-9} =$$

$$((15 \cdot 25)^{-3})^4 =$$

$$((45a^3)^5 \cdot 144^{-3})^{-4} =$$

$$(((3a^{-1}) \cdot 50)^{-3})^{-5} =$$

$$(16^2)^{-1} \cdot (56^3)^4 =$$

$$(10^{-2})^5 \cdot (10^2)^5 = \quad (12^{-3})^{-4} \cdot (12^3)^{-5} =$$

ELŐJEL: Csak a negatív szám pt hatványai negatívak, minden más hatvány pozitív értékű.

$$(-2)^6 \rightarrow \text{POZITÍV}$$

$$(-2)^3 \rightarrow \text{NEGATÍV}$$

Írd oda az előjelet

$$(-13)^4 \rightarrow$$

$$-13^4 \rightarrow$$

$$(-5)^0 \rightarrow$$

$$(-7)^{-3} \rightarrow$$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} \rightarrow$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^3 \rightarrow$$

Bontsd föl a zárójelet:

$$(11^{-3})^8 =$$

$$(-11^{-8})^3 =$$

$$(11^{-3})^8 =$$

$$(-11^{-8})^4 =$$

$$(5^{-3})^{-8} =$$

$$(-5^8)^3 =$$

$$(-5^{-3})^{-8} =$$

$$(-5^8)^{-3} =$$

$$(-3^5)^2 =$$

Kanonikus alakot kérek, és ne legyen tört!

$$(-12)^{12} =$$

$$-28^{-15} =$$

$$\left(\frac{100}{24}\right)^7 =$$

$$((-36)^4)^5 =$$

$$-75^2 =$$

$$(-2)^{3^2} =$$

$$(-5)^0 =$$

$$-36^8 =$$

Ne legyen se zárójel, se tört és minden prímtényezőös legyen!

$$\left(\frac{12}{27^{-3}}\right)^{-5} =$$

$$\left(\left(\frac{25}{98}\right)^{-3}\right)^{-2} =$$

$$\left(\left(\frac{27}{-50^{-2}}\right)^{-4}\right)^{-3} =$$

$$(((2)^3)^4)^5 =$$

d) Hogy is néz ki egy hatvány reciproka?

$$2^5 \text{ reciproka: } \frac{1}{2^5}. \text{ Ez mennyi? Az } 1 = 2^0. \text{ Ezért } \frac{1}{2^5} = \frac{2^0}{2^5} = 2^{-5}.$$

$$13^{-2} \text{ reciproka: } \frac{1}{13^{-2}}. \text{ Ez mennyi? Az } 1 = 13^0. \text{ Ezért } \frac{1}{13^{-2}} = \frac{13^0}{13^{-2}} = 13^2.$$

$$\text{Pl.: } 3^8 \text{ reciproka: } \frac{1}{3^8} = 3^{-8}. \quad (-12)^3 \text{ reciproka: } \frac{1}{(-12)^3} = (-12)^{-3} = -12^{-3}.$$

$$2^{-7} \text{ reciproka: } \frac{1}{2^{-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^7}} = 2^7. \quad 5^{-4} \text{ reciproka: } \frac{1}{5^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{5^4}} = 5^4.$$

$$17^{-2} \text{ reciproka: } 17^2.$$

e) Gondolkodtatók

Vigyázat nem ugyanaz: hatvány hatványa vagy hatvánnyal hatványozás!

Hány jegyű: $(10^4)^5$: $10^{4 \cdot 5} = 10^{20}$: 21
És 10^{4^5} : 10^{1024} : 1025

Melyik a nagyobb?:

$$3^{200} \square 2^{300}$$

$$400^{300} \square 300^{400}$$

$$* 2^{3^4} \square 3^{4^3}$$

Legalább hány számjegyből áll? Próbálj pontos becslést adni: 2^{1000} .

Ne feledjük, a „legalább”-nál mindig alá kell becsülni – de a lehető legpontosabban!

Körülbelül hány számjegyből áll? Próbálj pontos becslést adni: 14^{80} .

I/10) Összeg, különbség hatványa

Nem egyezik meg a hatványok összegével, különbségével.

Példa: $(1+2)^5 = 3^4 = 243 \neq 1^5 + 2^5 = 33$.

Emlékezzünk: ha egy műveletet végrehajtunk egy összegben, az nem egyezik meg azzal, hogy először az összeg tagjain végrehajtjuk a műveletet, majd utána összegzünk:

Lásd: $[2, 6+3, 7] = 6 \neq [2, 6] + [3, 7] = 5$

Két egymás utáni művelet, tevékenység sorrendisége: a legtöbb esetben nem fölcserélhető:

Anyuci sem először megsüti a tojást, cukrot, lisztet, majd utána keveri őket össze...
(Ha így van, ne küldjön be kóstolót!)

pl: egészrész abszolút értéke $\neq$ abszolút érték egész részével:

$$|[a]| \neq |[a]| \rightarrow = |[-2, 3]| \neq |[-2, 3]| =$$

tötrész négyzete $\neq$ négyzet tötrésze:

$$\{a\}^2 \neq \{a^2\} \rightarrow = \{1, 3\}^2 \neq \{1, 3^2\} =$$

Összeg hatványa $\neq$ hatvány összege

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3 \rightarrow = (5+2)^3 \neq 5^3 + 2^3 =$$

Összeg reciproka $\neq$ reciprokösszeg

$$\frac{1}{a-b} \neq \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{3-2} \neq \frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

I/11) Gyakorlás

Ne legyen se zárójel, se tört: minden „kanonikus” alakban legyen

$$81^5 =$$

$$125^{-7} =$$

$$100^3 =$$

$$12^3 =$$

$$14^5 : 14^{-3} =$$

$$10^2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^7 =$$

$$144^{10} =$$

$$32^{-5} =$$

$$\left(\frac{14}{7^2}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{16}{8}\right)^{-4} =$$

$$\frac{20^6}{10^6} =$$

$$\frac{5^{-7}}{5^{-8}} =$$

$$\left((36)^2\right)^5 =$$

$$\left((14)^{-3}\right)^{-4} =$$

$$\frac{1}{28^{-5}} =$$

$$\left(\frac{27}{16}\right)^{-5} =$$

$$\left(\left(\frac{40}{20^3}\right)^{-2}\right)^{-3} =$$

$$\left(\frac{81}{100}\right)^{-4} =$$

$$\left(\frac{18^{-1}}{27^{-3}}\right)^{-5} =$$

$$\left(\left(\frac{25}{98}\right)^{-3}\right)^{-2} =$$

$$\left(\left(\frac{25 \cdot 27}{-50^{-2}}\right)^{-4}\right)^{-3} =$$

$$\frac{98^{-2} \cdot 10^3}{21^{-3} \cdot 50^{-3}} =$$

$$\frac{(24^2 \cdot 15)^{-3} \cdot 100^4}{48^{-3} \cdot 45^{-2}} =$$

$$\frac{(45^2 \cdot 24^{-5})^3 \cdot 28^3 \cdot 50^0}{50^{-3} \cdot 324^{-3} \cdot 3^{-7} \cdot 63^{-3}} =$$

Mennyivel egyenlő:

$$375 \cdot 250 \cdot 96 \cdot 80 =$$

Hány 0-ra végződik: $400!$

Legalább hány jegyű: 2^{300} .

$$\frac{(45^2 \cdot 24^{-5})^3 \cdot 28^3 \cdot 50^0}{50^{-3} \cdot 324^{-3} \cdot 3^{-7} \cdot 63^{-3}} =$$

$$\frac{98^{-2} \cdot 10^3}{21^{-3} \cdot 50^{-3}} =$$

$$\frac{(24^2 \cdot 15)^{-3} \cdot 100^4}{48^{-3} \cdot 45^{-2}} =$$

II. Számok normálalakja

II/1) Bevezető

Egy elektron tömege

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 22 kg, azaz

$$\frac{9,109}{1000000000000000000000000000000000} = \frac{9,109}{10^{31}} = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

A Föld tömege = 5 973 600 000 000 000 000 000 kg = $5,9736 \cdot 10^{24}$ kg

Légközelebbi csillag: Proxima Centauri, 4,2 fényévre: $4 \cdot 10^{13}$ km

(1 fényév: $9,460529 \cdot 10^{15}$ m = 9,4605 billió kilométer = kb. 9,5 petaméter (Pm))

Fény sebessége: 300 000 km/sec

II/2) Tíz hatványai

$$0,001 = 10^{-3} \quad 1000 = 10^3.$$

II/3) Számok normálalakban

a) Ránézésre

$$20 = 2 \cdot 10^1 \leftrightarrow -20 = -2 \cdot 10^1$$

Vagyis a számot úgy írjuk föl, hogy előjelet nem figyelve az első tényező legyen: $[1;10[$ intervallumban, a második tényező a 10 megfelelő hatványa.

$[1;10[$ intervallum a következő számokat jelöli: $1 \leq x < 10$.

Mondj ilyen x-eket:

$$320 = \quad \leftrightarrow \quad -320 =$$

$$0,03 = \quad \leftrightarrow \quad -0,03 =$$

$$48\,200 = \quad \leftrightarrow \quad -48\,200 =$$

$$10 = \quad \leftrightarrow \quad -10 =$$

$$0,1 = \quad \leftrightarrow \quad -0,1 =$$

0 = 0 pontum – vagyis a 0-át nem bántjuk.

Írd fel normálalakban:

$$5600 \cdot 10^4 =$$

$$0,05600 \cdot 10^4 =$$

$$0,05600 \cdot 10^{-5} =$$

$$5600 \cdot 10^{-9} =$$

Melyik egyenlő a $2,03 \cdot 10^5$ normálalakú számmal?

a) 2030

b) $203 \cdot 10^3$

c) 20 3000

d) $20,3 \cdot 10^3$

e) $0,0203 \cdot 10^7$

f) $2,02 \dot{9} \cdot 10^5$

b) Lépegetve: „Tízzel hogy is osztunk, szorzunk?”

(i) Egynél nagyobb abszolút értékűek – lépegetek a tizedesvesszővel

$$5 \cdot 10^2 = 5 \underset{1}{0} \underset{2}{0}$$

$$3,6 \cdot 10^4 = 3 \underset{1}{6} \underset{2}{0} \underset{3}{0} \underset{4}{0}$$

$$6,1025 \cdot 10^6 = 6 \ 102 \ 500 = \leftrightarrow -6,1025 \cdot 10^6 = -6 \ 102 \ 500$$

(ii) Egynél kisebb abszolút értékűek

$$0,1 =$$

$$0,01 =$$

$$0,0023 =$$

$$0,0 \underset{1}{0} \underset{2}{0} \underset{3}{0} \underset{4}{0} \underset{5}{0} \underset{6}{0} \underset{7}{0} \underset{8}{0} \underset{9}{3} 4507 =$$

II/4) Normál alakban felírt számok helyiértékesen kiírva

a) Egynél nagyobb abszolút értékűek

$$3,4 \cdot 10^4 =$$

$$1,01 \cdot 10^1 =$$

b) Egynél kisebb abszolútértékűek

$$3 \cdot 10^{-1} =$$

$$4,503 \cdot 10^{-6} =$$

$$7,84 \cdot 10^{-8} =$$

II/5) A normál alak definíciója

Def.: $\forall$ nem nulla valós szám egyértelműen felírható olyan kéttényezős szorzatként, ahol az első tényező abszolút értéke az $[1;10[$ intervallumba esik, a második tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa.

Jelekkel: $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists! (m \in \mathbf{R} \wedge k \in \mathbf{Z}) \rightarrow |m| \in [1;10[\wedge x = m \cdot 10^k$.

Egy szám karakterisztikája: a normálalakban felírt formájában a 10 kitevője.
A 10 hatvány szorzótényezője pedig a „mantissza”

(„Karakterisztikája” – magyarban is használjuk: a karaktere, a lényege a személyiségének. Vagyis itt a szám nagyságrendjét azonnal látjuk!)

Valójában – de ezt nem áruljuk el senkinek:

az „x” szám karakterisztikája: $[lg(a)]$ az „x” szám mantisszája: $lg(a) - [lg(a)]$

II/6) Írd át normálalakba

$$453 \cdot 10^6 =$$

$$0,045 \cdot 10^{-5} =$$

$$305 \cdot 10^4 =$$

$$520 \cdot 10^{-7} =$$

II/7) Műveletek normálalakra hozott számokkal

a) Szorzás

„Kényelmesen.”: Azaz: $2,3 \cdot 10^3$ helyett érdemes $23 \cdot 10^2$ -t írni számolás közben – és csak a végeredményt írjuk át normálalakra!

$$2\,500 \cdot 800 =$$

$$32\,000 \cdot 15\,000 =$$

$$60\,000 \cdot 120 =$$

$$120\,000 \cdot 1\,700 =$$

$$0,000\,08 \cdot 0,007 =$$

$$0,000\,013 \cdot 0,000\,015 =$$

$$0,0014 \cdot 190\,000 =$$

$$0,000\,25 \cdot 60\,000\,000 =$$

$$200 \cdot 70 \cdot 2\,000 \cdot 3\,000 \cdot 20\,000 =$$

b) Hatványozás – érdemes zárójelet használni...

$$12\,000^2 =$$

$$200^5 =$$

$$0,001\,7^2 =$$

$$19\,000\,000^2 =$$

$$0,000\,001\,5^2 =$$

$$0,02^8 =$$

c) Osztás

„legalább zárójelet kell használni”, *de érdemes felírni először TÖRT ALAKBAN!*

$$80\,000 : 200\,000\,000 =$$

$$6\,240\,000 : 3\,000 =$$

$$8\,200 : 50\,000 =$$

$$680\,000 : 0,008 =$$

$$0,0002 : 0,00000016 =$$

$$\frac{300 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^7 \cdot 2000} =$$

$$\frac{25000000 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 500 \cdot 10^{-3} \cdot 40000} =$$

$$270000000 : 0,0000000009 =$$

d) Kivonás, összeadás

10 km hány cm?

43 kg hány gramm?

25 kg + 1,8 dkg = ?

Mo.:

kilo: 1000

deka 10 (pl.: Dekapolisz: „tíz város” Dekameron (Boccaccio): „Tíz nap”;

Dekatlon: „Tízpróba”

Dekára átszámolva: 1 kg = 100 dkg

Így: 25 kg = 25 · 100 dkg.

Vagyis: 2500 dkg + 1,8 dkg = 2501,8 dkg = 25,108 kg.

Grammra átszámítva:

$25 \cdot 10^3 + 1,8 \cdot 10 = 25000 + 18 = 25018 = 25,018 \text{ kg.}$

VEGYÜK ÉSZRE: MINDIG A „NAGYOBBAT” ALAKÍTJUK ÁT

$$5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^5 = 50 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^5 = 42 \cdot 10^5 = 4,2 \cdot 10^6.$$

$$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 =$$

$$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 =$$

$$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^7 =$$

$$3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^3 =$$

$$3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^7 =$$

$$3 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3} =$$

$$3 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-7} =$$

$$3 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3} =$$

$$3 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-7} =$$

$$9,7 \cdot 10^{-5} + 8,3 \cdot 10^{-6} =$$

$$9,7 \cdot 10^{-5} - 8,3 \cdot 10^{-6} =$$

$$1,8 \cdot 10^{-7} - 9,2 \cdot 10^{-8} =$$

e) Előtagok (prefixumok)

Előtag (prefixum)	Jele	Neve	Értéke	Pl.:
piko-	p	billiomod	10^{-12}	pm (pikométer)
nano-	n	ezerbilliomod	10^{-9}	ns (nanosecundum)
mikro-	μ (mű)	milliomod	10^{-6}	μg (mikrogramm)
milli-	m	ezred	10^{-3}	mm (milliméter)
centi- (ritkán)		század	10^{-2}	cm (centiméter)
deci- (ritkán)		tized	10^{-1}	dl (deciliter)
deka- (ritkán)		tíz	10^1	dkg (dekagramm)
hekto- (ritkán)		száz	10^2	hl (hektoliter)
kilo-	k	ezer	10^3	km
mega-	M	millió	10^6	Mt (megatonna)
giga-	G	milliárd (ezermillió)	10^9	Gt (gigatonna)
tera-	T	billió	10^{12}	Tm (1 teraméter: kb. a fény által egy óra alatt megtett út (fényóra))
Csalások az informatikában				
8 bit = 1 Bájt				
1 kB = 1024 Bájt = 2^{10} Bájt				
1 MB = 1024 kB = $1024 \cdot 2^{10}$ Bájt = 2^{20} Bájt = 1 048 576 Bájt				Kb. 1 Milliő Bájt
1 GB = 1024 MB = $1024 \cdot 2^{20}$ Bájt = 2^{30} Bájt = 1 073 741 824				Kb. 1 Milliárd Bájt
1 TB = 1024 GB = $1024 \cdot 2^{30}$ Bájt = 2^{40} Bájt = 1 099 511 627 776				Kb. 1,1 billió Bájt

f) Mértékegységek átváltása, számítások

mm→cm

cm→km

mm²→cm²

dm²→km².

m³→km³

Hány cm² Magyarország területe?

Mo.: 1 km = 10³ m = cm

⇒ 1 km² = (cm)² =

⇒ 93 · 10³ km² =

Hány m³ egy hidrogénatom térfogata, ha gömb alakúnak képzeljük, amelynek a sugara: 78 pm.

Mo.: 1 pm = 10⁻¹² m.

$V = \frac{4r^3\pi}{3} \Rightarrow V =$

A Balatont téglalapnak képzelve az átlagos szélessége 7,7 km, hossza 77 km. Az átlagos mélysége kb. 3,4 m. Hány liter víz van benne?

A betűk használata

I. Az „általában történő” felírások

I/1) Bevezetés

a) Négyzet

oldala: 16

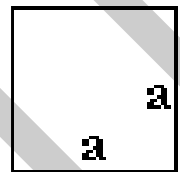
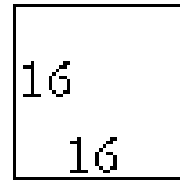
Területe: $T =$

Kerülete: $K =$

Oldal: a

Területe: $T =$

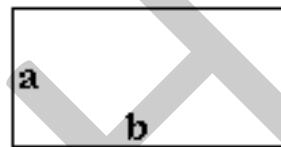
Kerülete: $K =$



b) Téglalap: oldalai: a és b .

Területe: $T =$

Kerülete: $K =$



c) Egy zsákban van 100 db. alma.

2 zsákban:

18 zsákban:

n db. zsákban:

$2x$ db. zsákban:

d) 1 zsákban x db alma és y db. körte van. $= x+y$ db. gyümölcs van

2 zsákban:

Tartozunk, tehát: -12 zsákban ☹:

„ b ” db. zsákban:

I/2) A műveletek kommutativitása (felcserélhetősége), sorrendje, zárójelezés

a) Kommutativitás (műveletnél a tagok felcserélhetősége)

$a; b \in \mathbf{R} \Rightarrow a+b = b+a$ – vagyis az összeadás kommutatív (felcserélhető)

A kivonás nem kommutatív: $a - b \neq b - a$

A szorzás kommutatív: $a \cdot b = b \cdot a$

Az osztás nem: $a/b \neq b/a$

b) Műveletek sorrendje, és a zárójelek:

A zárójelekben található műveleteket elvégezzük és utána bontjuk föl a zárójelet,

vagy pedig "zárójel-fölbontással", de odafigyelve.

$$3/6+4 \cdot (-3+5)-2-1-(2-4 \cdot 3)-5 \cdot (2-1)+3 \cdot 4/2 =$$

I/3) Kifejezés Értelmezési Tartománya

Az a legtágabb halmaz, amelyből bármely elemet választva még értelmes a kifejezés.

Pl.: $\frac{3}{x-5}$ $x=8$ $x=0$ ÉT:

$\frac{5-x}{2x-6}$ $x=4$ $x=5$ ÉT:

I/4) Írjuk föl jelekkel

1 dobozban 20 alma van. n dobozban mennyi?	
Egy kötél 30 méter. k db. kötél összesen hány méter?	
Egy füzetben x db. lap van. y db. füzetben hány db. lap van?	
Az a osztályban 2-vel több diák van, mint a b -ben. Fejezd ki a -ból b -t, majd b -ből a -t.	
Péter 5 kg-mal könnyebb Jánosnál:	
Budapesten 50-szer annyian laknak, mint Cegléden:	
Aladár negyedannyi könyvet olvasott, mint Béla:	
Pál és János együttvéve is 10 kg-mal kevesebb almát szedett, mint Hugó:	
Az általam gondolt x szám kétszerese 5-tel kevesebb, mint a háromszorosa.	
Tibor könyveinek a felénél is 10-zel kevesebbet olvasott el Márton:	
A vonat 1 óra alatt 60 km-t megy. Mennyit megy t óra alatt?	

I/5) Számok jelzése

- Írjuk föl az n -nél 1-gyel nagyobb számot:
- Írjuk fel n ötszörösét.
- Mi a baj a ezzel a párbeszéddel: „- Mit vettél a piacon? - „Én kétharmadot.” – „Én pedig 50%-ot.”

Mondóka: a százalék - valami megszorítása százados törttel.

Olyan nincs, hogy 15%. Csakis: valami $\cdot \frac{15}{100}$

Például: 60 ember 15%-a: $60 \cdot \frac{15}{100} = 9$ ember

200 km út 40%-a: $200 \cdot \frac{40}{100} = 80$ km

A 3000 eurós fizetés 160%-a: $3000 \cdot \frac{160}{100} = 4800$ euró.

Írjuk fel az alábbiakat jelekkel:

15-nek a 30%-a		x-nek a 20%-a.	
Írjuk fel azt a számot, melynél k 2-vel kisebb.		Az „ a ” 5-tel nagyobb mint a „ b ” Fejezd ki a -t b -ből illetve b -t a -ból.	
Az m kg. búza 75%-a		Írjuk fel az m természetes számot közrefogó két természetes számot.	
Írd föl a t -nek a $3/4$ -ét:		Két szám szorzata 12. Az egyik „ a ”. Mi a másik?	
Két szám hányadosa 7. Amit elosztottunk: 5. Mi a másik?		Az n fő lakos 35%-a:	
A v sebesség 140%-a:		Írd föl c és k különbségét:	
Írd föl a és b összegének a felét!		x nap hány óra?	
x perc hány óra?		y perc hány nap?	

Adott két szám: x és y

Mennyi az összegük?		különbségük?	
Mennyi a szorzatuk?		hányadosuk?	
Mennyi a reciprokok összege?		Mennyi a négyzetük összege? („négyzet-összegük”)	
Különbségük reciproka:		Reciprokuk különbsége:	
Mennyi x -nek y szorosa?		Mennyi az összegük négyzete?	

I/6) Írd föl „általában”

két egymás utáni egész:	
a négyzetszámok:	
a páros egészek: melyik oszlop a jó? Miért?	$\begin{array}{c c} n & 2n \\ \hline 1 & 2 \\ -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c c} n & 4n \\ \hline 1 & 4 \\ -4 & -16 \\ 0 & 0 \end{array}$
páratlan egészek:	
5-re végződő pozitív egészek:	
2 egymás utáni páratlan szám összege:	
Milyen apró tételt tudunk kimondani az összegükre: 2 egymás utáni páratlan szám összege:	
3 egymás utáni egész összege:	
Apró tételecske: három egymás után egész összege:	
5-tel (osztva) 4 maradékot adó természetesek:	

I/7) Változások, kapcsolat, „százalék”

a) Az a 5-tel nagyobb mint a b .

Fejezd ki a -t b -ből:

Fejezd ki b -t a -ból:

b) x felénél az y 2-vel nagyobb.

Fejezd ki x -ből y -t:

c) Egy bolt b bevétele egy év alatt a 65%-al nőtt. Mekkora most a bevétele.

d) Egy m magasságú diák egy év alatt 15%-kal nőtt. Mekkora most a magassága?

- e) A vonat 1 óra alatt s km-t tesz meg.
Mennyit tesz meg 5 óra alatt?
Mennyit t óra alatt?
- f) Egy r öfi 100 kg. Karácsonyra $\frac{1}{4}$ -ével hízott. Hány kilogramm most?
- g) Egy falu lakossága ℓ . 20%-kal csökkent 5 év alatt. Mekkora most a lakosság?
- h) Egy zsiráf z méter. Az $\frac{1}{3}$ -ával nőtt. Most mekkora?
- i) Egy zsákban g kg. gabona volt. Kifolyt a $\frac{2}{5}$ -e. Mennyi van most benne?

I/8) Ügyes felírások:

- a) Írd föl 3 egymás utáni egész összegét
- b) A kétjegyű természetes számok általános alakja
- c) Mutassuk meg, hogy 12 osztja 6 egymást követő páratlan egész összegét!

II. Műveletek algebrai kifejezésekkel: zárójelek felbontása

II/1) Elnevezések

- a) Változó, együttható

A változó általában az/azok a betű(k), melyek értékét magunk határozzuk meg – tehát változhat – vagyis: „változó”

Az együttható az, amivel a változó meg van szorozva.

Írd alájuk az együtthatót:

$3a$	$\frac{3}{2}y$	$5b^2$	$-2,7xy$	y	$7a^2$	$-b$	$\frac{3x}{2}$	$-\frac{x}{5}$	$2(x+y);$

b) Tag $\leftrightarrow$ tényező

Összege-nél-különb-ség-nél: tag van. Szorzás-nál: tényező.

$$x^2c + 2x(3x-4) - 5(x-6xy)(xy + c + 7) + 4xy$$

Ez a kifejezés: tagú.

Az 2. tag: tényező

A 4. tag:

3. tag 3. tényező, első tag:

$$\text{Kifejezés: } 3(4x^2+x)(5a-b)$$

Hány tagú?

Mi a 3. tényező?

Mi az x^2 ?

Mi az 5?

$$\text{Kifejezés: } (a+b)(a^2b-c)(c+3b-2xy)+7(4a+8b)$$

Hány tagból áll?:

Az első tag hány tényezőből áll?

A második tag hány tényezőből áll?

Az első tag második tényezőjének mik a tagjai?

Első tag harmadik tényező harmadik tag második tényező:

Mi a $2xy$?

Mi az a^2b ?

Mi a 3?

Mi a 4a?

c) Egynemű kifejezések: Ugyanaz a változó, vagy zárójeles „dolog” szerepel bennük, ugyanazon a hatványon, csak együtthatóikban különbözhetnek.

Húzd alá az egyneműeket azonos módon – és írd alájuk az együtthatót!

$$2x^3 - \frac{2y}{3} + \frac{2}{3}x^2 - 3x^3 + \frac{7y}{3} + 4y - x^2.$$

$$5x - 4y + 3x^2 - 12 - (x-y)^2 + 4,3y - x + x^2 - \frac{x}{5} + \frac{1}{y} - 8 + (x-y)^2 - 1$$

II/2) Helyettesítési érték

Az $5x$ helyettesítési értéke, ha $x = 2$: $5x = \dots\dots\dots$ Ha $x = -1,2$: $5x = \dots\dots\dots$

$3a+b/2$ helyettesítési értéke, ha $a = -2$, $b = 6$: $3a+b/2 = \dots\dots\dots$

Számold ki a következő helyettesítési értékeket: először $a = 2$ -vel, majd $a = -2$ -vel:

a	$3a$	$-a$	$-3a$	$-3a^2$	$(-3a)^2$	$\frac{a+1}{2}$	$(a+1)^2$	$\frac{a+1}{a-2}$
2								
-2								

II/3) Egyenmű kifejezések összevonása

- a) Mesével: Egy hűtőházban van 24 boci, 35 kacsa, 5 röfi. Hoznak még 6 bocit, elvisznek 10 kacsát és hoznak 3 röfit, de sajnos kártyán elvesztünk 50 kacsát... (Nem érdemes hasárdjátékozni, mert nem lesz kacssültünk...) Írd föl jelekkel, hogy mi történik, majd számold össze, miből mennyi lesz.

- b) Az egyenmű kifejezéseket össze kell vonni mindig!

$$x - 3y + 3x - x - 6x - y - 3y + y - 2y + 4x =$$

Összeszedjük az x és az y együtthatóit, majd kiszámoljuk, hogy mik a végleges együtthatók:

$$(\quad)x + (\quad)y =$$

$$x^2 - x - 2x^2 + 3x - 5x^2 - 2x =$$

$$p - 6y^2 + 12p + 2y^2 - 2p - 6p + 4y^2 =$$

$$-\frac{4}{3}x^2 - 3x + 7 + \frac{2}{5}x - \frac{x^2}{3} - 4 + 3x^2 - 1 =$$

$$-\frac{a^2b}{3} + 2 - \frac{2a^2b}{3} + a^2b - 3 =$$

$$-\frac{x}{5} + 11y - 2,5x - 4y^2 - 2 - 10y + 7,2y^2 - 0,4x - 1 =$$

$$ab + 2 - 4ab^2 + 3ab + 8ab^2 - 1 + 3ab + 7 - ab^2 - 4ab + 5 =$$

$$-x^2 - \frac{y}{3} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2}{3}y =$$

$$0,3c^3 - 0,1c^3 - 0,5c^3 =$$

$$-(x-y)^3 - 2(x+y)^3 + 3(x-y)^3 - 4(x+y)^3 =$$

$$-a^k - 3a^{k+1} - 4a^k - 2a^{k+1} =$$

c) „Szedjük szét” tagokra, tényezőkre:

$$4a = a+a+a+a \quad \text{vagy: } 4a = a+5a-2a$$

$$\text{Ne egyforma 4 tagra: } -3b =$$

$$\text{Ne egyforma 3 tagra: } 3a^2 =$$

$$6 \text{ tag legyen: } 3c - 5b^3 =$$

d) (Be)helyettesítés – helyettesítési érték

Figyelem: behelyettesítés előtt mindig összevonunk!

$$-a^2b - 5ba^2 - a^2b - 6ab + 3a^2b + 2ab = ? \text{ ha } a = 3, b = 1/3$$

$$-5x^2 - \frac{x}{5} - 3 + x^2 - \frac{2x}{10} + 5 - x + 2x^2 = ? \text{ ha } x = 1/2$$

II/4) Egytagúak szorzása, osztása – és zárójelfölbontás

Először az együtthatók szorzata, majd *abc* sorrendben a betűs kifejezések.

a) Szöveggel:

Ha 2 kg almát vettünk, kilóját *f* forintért, mennyit fizettünk?

Egy gyufásdobozban 50 szál gyufa van. Egy nagy kartonban 15 db. gyufásdoboz van. *x* db. kartonban hány szál gyufa van?

b) Bontsd föl a zárójelet:

$$(2x) \cdot 3 = \quad 4(-3x^2) = \quad 5x(2x)(-3x) =$$

$$(-11x)(11x^2) = \quad -(13x)(-14x) =$$

$$x^2 \cdot (2x^3)(-x) = \quad (11x^2)(13x^3) =$$

$$\left(-\frac{121}{35}ay\right)\left(-\frac{14}{22}ay\right) = \quad (12xy)13x(-3y) =$$

$$4a^3(-3a^2)(-5c)(-3c^2) =$$

$$11xy(18x^2y) =$$

$$(-15y^2x)(15x^3y) =$$

$$-(17ax)(-19xa) =$$

- c) Egytagok osztása először: úgy, mintha prímek lennének!

$$\frac{(x^2 \cdot y)^3 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^2}{(z^3 \cdot x)^3 \cdot y^2 \cdot (y^2 x z^2)^3} =$$

III. Egyszerűbb egyenletek megoldása

III/1) A mérlegelv bevezetése

- a) Írd föl az alábbi összefüggéseket:
(Figyelem: ha lehet, az „ = ” jelet, ha lehet, tartsuk egy helyen!)
Az általam gondolt szám harmadánál a kétszerese 75-tel több.

Gondoltam egy számot. Elhagytam a $\frac{2}{5}$ -ét és még 1-et. Így az eredeti szám kétszeresénél 50-nel kevesebbet kaptam.

- b) Mérlegelv
Meg szeretnénk tudni egy doboz tömegét.
Írd föl az egyenletet és rendezd nyomon követve az ábrát:

Egyenlet:



Kibontjuk a zsákokat



Elveszünk mindkét oldalból 2 dobozt



Elveszünk mindkét oldalból 3 kg-ot:



Minkét oldalt harmadoljuk:



Visszahelyettesítés:

III/2) Egyenletek felállítása, megoldása

- a) „Egy szám háromszorosa 2-vel nagyobb a nála 8-cal nagyobb számnál”

Az egyenlet: $3x - 2 = x + 8$

Ez egy állítás. (Az ige az egyenlőség jel). Nézzük meg, hogy a például próbálgatással eltaláljuk-e, melyik számra gondoltunk. Bo = Bal oldal; Jo. = ...

Például: a 0 számra igaz-e: Behelyettesítünk, és: Bo(0): -2 Jo.(0): 8

Nem igaz.

Akkor talán az $x = 7$ -re gondoltunk? Bo(7) = 19 Jo(7) = 15 . Ez sem jó.

Feladatunk: megkeresni, hogy melyik számra igaz az állítás!

Módszerünk: A mérleg elv. Úgy változtatok, hogy az „állítás”, az egyenlőség mindig megmaradjon.

$$3x - 2 = x + 8 \quad /+2 \quad \text{„Mindkét oldalhoz hozzáadok 2-őt”}$$

$$3x = x + 10 \quad /-x \quad \text{„Mindkét oldalból kivonok x-et.”}$$

$$2x = 10 \quad /:2 \quad \text{„Mindkét oldalt elosztom 2-vel.”}$$

$$x = 5$$

Megtaláltuk azt az x -et, amelyet visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe valóban egyenlő lesz a két oldal. Ha nem ezt az 5-öt helyettesítjük vissza, hanem mondjuk az $x = 3$ -at, akkor nem lesz egyenlő a két oldal. Tehát az egyenlet megoldása az $x = 5$.

VH: $3 \cdot 5 - 2 = 5 + 8 \Leftrightarrow 0 = 0 \checkmark$

Figyelem: mindig az eredeti egyenletbe helyettesítünk vissza: „VH”.

A végén a gyökök (megoldások) kigyűjtése: „Mo: $x = 5$ ”

Cél: egyik oldalon csak ismeretlen legyen, a másikon csak szám.

Mondani kell: „mindkét oldalhoz...” „mindkét oldalt...”

- b) Egy szám ellentettjének duplája héttel kisebb a nála kettővel kisebb számnál.

VH:

Gyökök kigyűjtése: Mo: $x =$

- c) Oldd meg, de előtte mondj egy „rejtvényt”, melyet az egyenlet modellez!

$$4x+2=\frac{x}{2}+5$$

- d) Egy szám háromszorosa 4-gyel kisebb, mint -5 .

Visszahelyettesítés:

Gyökök kigyűjtése: Mo: $x =$

- e) Egy szám 7-szerese 6-tal kisebb, mint a duplájánál 4-gyel kisebb szám.

- f) Először összevonás kell

$$4x-2+3x=8x+x+1$$

g) $3c-5c+10 = -c+14-3c-4$

- h) Oldd meg: „Gondoltam egy számot. Öttel nagyobb magánál.” Mire gondoltam?
Egyenlet:

i) $4x-2+3x = 7x+1$

Valójában: $0 \cdot x - 2 = 0 \cdot x + 3$.

Márpedig ilyen x nincs.

Hiszen a cél az az, hogy megtudjuk, mely x értékekre lesz igaz a fenti állítás – egyenlet.

Vagyis ezt úgy hívjuk, hogy ellentmondás, ELLENTMONDÓ egyenlet: $\nexists$ mo.

- j) Gondoltam egy számot. Ha a dupláját hozzáadom, a háromszorosát kapom. Melyik számra gondoltam?
Egyenlet:

k) $-a-5a+4-a = 3+2a+1-9a$

Valójában az egyenlet:

valami = ugyanaz

$$-7a+4 = -7a+4$$

Bármi lehet az „ a ”, ez mindig igaz lesz.

Ezt úgy hívjuk, hogy AZONOSSÁG - Mo: $\forall x \in \mathbf{R}$.

Valamit kihagytunk: a VH: visszahelyettesítést. Miért?

$$l) \quad -2x - \frac{3x}{2} + 8 = 7 - 4x + \frac{x}{3}$$

$$-3(2x) + 4 + \frac{7x}{3} = 7 + 4x - 3$$

$$m) \quad -\frac{2x}{3} - 2 + 3x = 2x - \frac{4}{5} \quad \text{Mo: } 18/5$$

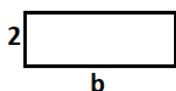
$$\frac{5x}{2} - 3x + 2 - x = 4 - x + \frac{2x}{3} \quad \text{Mo: } -12/7$$

$$n) \quad -\frac{x}{3} + 3 + 7x - 4 = \frac{5}{12}x - 4 + x \quad \text{Mo.: } -4/7$$

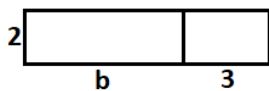
IV. Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval – zárójel-fölbontás

IV/1) Szemléltetések

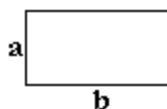
a) Téglalapok egyik oldalának változtatásával:



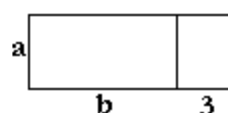
$$T_1 =$$



$$T_2 =$$



$$T_1 =$$



$$T_2 =$$

b) Mesével

Egy zsákban egyenletesen elkeverve x kg cukor és 10 kg mák volt. Kilukadt a zsák és kifolyt belőle a keverék, csak az $\frac{1}{3}$ -a maradt. Mennyi cukor és mák maradt?

Egy dobozban $x+3$ db. gyufaszál van. (Vagyis egy dobozban van egy maroknyi (nem tudjuk mennyi, tehát x) és még 3 szál gyufa.)

- 5 dobozban hány db. gyufaszál van?
- n db. dobozban hány db. gyufaszál van?

IV/2) Egytagú tényezővel többtagú szorzása

a) Az egytagú tényezővel a többtagú tényező minden tagját beszorozzuk a előjeleket megfelelően kezelve.

Egy tag – két tényező: $-2(3x-5) = -6x+10$

Mondani kell: „mínusz kettőször plusz három iksz az mínusz hat iksz, mínusz kettőször mínusz öt az plusz tíz”

$$7 \cdot (x-2) =$$

$$-13(-2x+12) =$$

$$-(x-3) =$$

$$4x(-x^2+2x-6) =$$

$$-(-2x^2-3) =$$

$$-8x \cdot (x+2) =$$

$$2(1,5-2x) =$$

$$-5\left(\frac{x}{5}-2\right) =$$

$$(2x+1,7) \cdot 1,3 =$$

$$-(-x^2-x+2) =$$

$$-3x(-2x^2-x+4) =$$

$$17x(2y-17) =$$

$$-x(-x+1) =$$

$$5x^2(3x^2-2x+1) =$$

$$(-12x+3)(-3xy) =$$

$$(-11b^2)(-3b-a) =$$

$$-3a^2(7a^2-8a-4) =$$

$$-(5x^2+x-3) =$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{15}{2}a+10b\right) =$$

$$-\left(\frac{26}{3}a\right)\left(\frac{21}{13}a-6b\right) =$$

b) Több tag – a műveletek után összevonás kell!

Több tag, tagonként egy többtagú tényező: elvégezzük a szorzást, majd összevonunk: mondjuk magunkban hangosan!

$$-6(x^2-5)-(5-3x)+3x(x^2-2x+3)+(-x-x^2) =$$

$$12x(12x^3+4x-13)-14x(12x-3)+(4-x) =$$

$$15(2p-\frac{6}{10}q)-8(5p-\frac{3}{2}q)-(p-q) =$$

$$2a^2-a(2a-5b)-b(2a-b)-(2ab+b) =$$

$$-12(\frac{2}{3}x+4)-5(x-3)-(2-x) =$$

$$3(2x+4)-5(x/3-3)+(-3x-2) =$$

$$-\frac{3}{2}(x^2+y^2-2x-1)-x(-x-2y+3)-y(-x+y) =$$

$$-11x(11x-10y-9)+3x^2(x-3y+4)-(-x^2-x^3+x^2y) =$$

$$-(x^n+x^{n+1})-3x(x^{n-1}-5x^n) =$$

$$5(x^n-y^n)-y(x^n+3y^{n-1})+4x(x^{n-1}-5y^n) =$$

$$10x(4x^2-7y)-6x(5y+7x^2)-3xy =$$

Kitevőknél. Hogy is szól a hatvány hatványozására vonatkozó mondóka?!?

$$(a^{k-3})^{-5} =$$

$$(4^{-x+3})^{-x} =$$

$$(5^{x-3})^{-3x} =$$

$$(x^{-7+a^2-2a})^{-3a} =$$

$$\left((3^{-2x+3})^{4x}\right)^{-5x} =$$

$$\left((2^{-x+3})^2\right)^{-x} =$$

IV/3) Helyettesítési érték - behelyettesítés

FIGYELEM, CSAKIS ZÁRÓJELFÖLBONTÁS ÉS ÖSSZEVONÁS UTÁN ÉRDEMES SZÁMOLNI

$$2u(u-3v)-4v(0,5u-2v)-u(2u-2v)-2v(u+4v) = ? \quad u = -\frac{1}{4}; v = \frac{1}{2}$$

IV/4) Egytagok osztása - egyszerűsítés

Csak tényezőt és csakis tényezővel oszthatunk, egyszerűsíthetünk.
Vagyis a számláló is és a nevező is egy tagú! (Most csak egyszerűsítünk!)

$$\frac{x^6}{x^7} =$$

$$\frac{(-x)^5}{(-x)^3} =$$

$$\frac{(-x)^3}{(-x)^6} =$$

$$\frac{98a^3b^2}{14ax^2b^3} =$$

$$\frac{(2ab)^3b^2(-xa)^3}{(-4xab)^4} =$$

$$\frac{6(2x-3y)^3}{2x-3y} =$$

$$\frac{2x-y}{x-y} =$$

IV/5) Egyenletmegoldás

$$5(3x-4)-(2x+3) = 3(-2x+5)+6(4x+1)-5(x-8)$$

$$5(3x-2(x-4))+5 = 2(5x-3(x-1)-4)$$

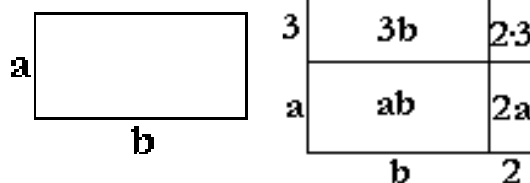
$$-(5-x)+2(x-1)+8 = 17-(2x+1)+3(5+x)$$

V. Több tag szorzása több taggal

V/1) Bevezetés, szemléltetés

$$T_1 = ab$$

$$T_2 = (a+3)(b+2) = T_2 = ab+3b+2a+6$$



Hogy is történik a korábbi zárójelfőlbontás módszerével?

$$(a+3)(b+2) = (a+3)b+(a+3)2 = b(a+3)+2(a+3) = ba+b3+2a+3 = ab+2a+3b+6$$

Vagyis: „Minden tagot minden taggal”!

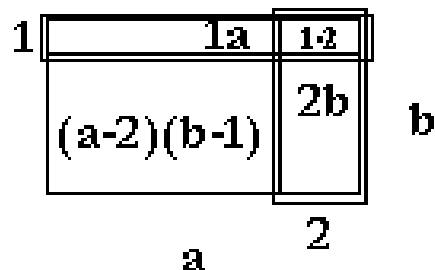
Aláhúzogatós módszer: (most először az a-val szorzunk végig!)

$$(a+3)(b+2)=$$

A végén, ha lehet, összevonunk

$$T_1 = ab$$

$$T_2 = (a-2)(b-1) = T_2 =$$



V/2) Több tagúak szorzása

- a) Egy tag, két kéttagú tényező v. két kéttagú tényező és egy egytagú tényező (néha 3 tag megjelenik már)

$$(x+5)(y+4) =$$

$$(12a+11b)(12c+15d) =$$

$$(3x-5)(3x+5b) =$$

$$(a-3)(x-4) =$$

$$(a+2)(4a-8) =$$

$$(x-2)(2x-3) =$$

$$(3x-2)(5-4x) =$$

$$(5x+2)(3x-8) =$$

$$(4a-x)(x-4a) =$$

$$(5a-3x)(5a+3x) =$$

$$(2ab-5x)(3ab-2x) =$$

$$\left(-\frac{1}{2}a+3\right)(-7a+2) =$$

$$(-3a-3)\left(a+\frac{5}{3}\right) =$$

$$-4(-2a-3)(-4a+12) =$$

$$(-3a-1)(a^2-a+1) =$$

$$(-2x-3)(3x^2-x+1) =$$

$$(-x+2)(x^2+2x+4) =$$

$$(3x^2-2x+1)(x-5) =$$

$$(4ab-a^2)(0,5ba-b^2) =$$

$$\left(\frac{4}{b^2}-x\right)\left(xb-\frac{b^2}{x^2}\right) =$$

$$3(2-x)(-5-x) =$$

$$-2(x-3)(7x+5) =$$

$$-(2x+1)(1-5x) =$$

$$-17(13x-2)(x+4) =$$

$$(3x-5)(5x+2) =$$

$$-(1-4x)(5x+3) =$$

$$-12(12x-1)(x+3) =$$

$$(2x^2-3x-4)(5x-1) =$$

$$(11x^2-x+2)(5x-3) =$$

$$-3(8-2x)(8+2x) =$$

$$(5x+1)^2 =$$

$$(x-3)^2 =$$

$$-2(5-2x)^2 =$$

$$(x^2+1)(x^3+2) =$$

$$(-3x^3-2)(-x^2+2) =$$

$$(a^2+a+1)(a-1) =$$

$$(x^4-x^2+1)(x^2+1) =$$

- b) „Fejben” – rögtön a végeredményt írva
Csökkenő hatvány szerint haladva: $(x+2)(x+1) = x^2+3x+2$

$$(x-2)(x+3) =$$

$$(2x+1)(x+3) =$$

$$(x-5)(x+5) =$$

$$(5x+3)(7x-1) =$$

$$(x^2-5)(3x^2+1) =$$

$$(x^2-2)(5x^3+x) =$$

$$(x-4)(x-4) =$$

$$(2-x)(x+3) =$$

$$(3-2x)(5+x) =$$

$$(2x-1)(2x-1) =$$

$$(7+3x)(-1-4x) =$$

$$(-3x+4)(-3x-4) =$$

$$(x-1)^2 =$$

$$(2x+1)^2 =$$

$$(x-2)^2 =$$

$$(2-x)^2 =$$

$$(x-3)(3-x) =$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 =$$

- c) Egy tag – három v. több tényező

$$x(x-2)(x-3)=$$

$$(x-3)(x^2+9)(x+3)=$$

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=$$

- d) Több tag, egy tag többtényezős: NAGY ZÁRÓJELEK KIRAKÁSA:

$$\begin{aligned} & 3(x-1)(x-2)+2(2x-3)(x+5)-(3x+2)(x-1) = \\ & \color{red}{(3(x-1)(x-2))} + \color{red}{(2(2x-3)(x+5))} - \color{red}{((3x+2)(x-1))} = \\ & = \color{red}{(3(x^2-3x+2))} + \color{red}{(2(2x^2+7x-15))} - \color{red}{(3x^2-x-2)} = \\ & = \color{red}{(3x^2-9x+6)} + \color{red}{(4x^2+14x-30)} - \color{red}{(3x^2-x-2)} = \\ & = 3x^2-9x+6+4x^2+14x-30-3x^2+x+2 = \underline{4x^2+6x-22} \end{aligned}$$

Ahol tehát már több tényező van, pl.: $2(3x-4)(5x+1)$ v. $-(2x-3)(x+2)$, ott zárójelezünk, mert különben totálisan elrontjuk.

$$(x-2)(x-3)-(x-4)(x+1)-4(5-x)(7-x) =$$

$$-7(x-1)(2-3x)-4(x-1)(x+5) =$$

$$-3(2x+3)(x-7)-5(3-4x)(4-3x)+(x-1)(1-x) =$$

$$(ab-a)(4ba-b)-3(2a-b)(b-a)-5(ab-2a)(ba+a) =$$

- e) Három, vagy többtagú tényezők is (minden tagot minden taggal!)

$$(x^2+x-4)(x-5) =$$

$$(x+y-2)(x+y+2) =$$

$$(x^2-x+1)(x^2+x+1) =$$

$$(ax+x+y)(y-xa-x) =$$

$$(3x-4-y)(-x^2-2y-3) =$$

$$(2x+y+3)(2x-y+3) =$$

$$(-a^2+3)(-a^2+7a-4) =$$

$$(12a+7b-c)(12a+7b+c) =$$

$$(3x^2+5x+1)(-x^2+5x+2) =$$

$$(y^4-y^3x+y^2x^2-yx^3+x^4)(x+y) =$$

$$(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) =$$

$$(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) =$$

$$\left(-5x-\frac{3}{x}\right)(x+x^2) =$$

$$\left(2a-\frac{1}{b}\right)\left(2a+\frac{1}{b}\right) =$$

$$\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right)^2 =$$

Gyorsítotlan: csökkenő kitevőket figyelve:

$$(2x-5)(3x+7)=6x^2-x-35$$

$$(3x-2)(5x-7)=$$

$$(4-5x)(2x+3)=$$

$$(x^2-3x-5)(2x^2+5x-1) =$$

$$(-2x^3+2x+1)(x^2-x-3) =$$

f) Több tényező, több tagú tényezők, több tag

$$-x(x-3)(x+3)-3x(2x+5)(x-4) =$$

$$3(2x-5)(4-3x)-5x(7x+1)(3-2x) =$$

$$-(x-1)(x+2)(x-2)-4(x-3)(x+5)(x+3) =$$

$$-3(2x-5)(3x^2-x+4)-(4x-2)(4x^2+2x+1)-2x(8x^2-x+3) =$$

$$-(-2x^2+x-2)(5-6x)+2x(5x^2-3x-1)-(x-2)(-2x^2-x+3) =$$

g) Több tényezős szorzatok: keressük a szimmetriát!

$$(1+x)(1+x^2)(1-x) =$$

$$(2a-2)(2a-1)(2a+1)(2a+2) =$$

$$(b-2)(b-1)b(b+1)(b+2) =$$

v/3) „Kéttag” összegének, különbségének négyzete: oda-vissza tudni...

a) Alap

$$(a+b)^2 =$$

$$(x+1)^2 =$$

$$(x+2)^2 =$$

$$(x+3)^2 =$$

$$(3x+1)^2 =$$

$$(2x+3)^2 =$$

$$(2x+y)^2 =$$

$$(x+y)^2 =$$

$$(3x+5)^2 =$$

$$(2x+3)^2 =$$

$$(4x+2y)^2 =$$

$$(15x+2)^2 =$$

$$(11x+6)^2 =$$

$$(12x+8)^2 =$$

Mondóka: Két tag összegének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete plusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

$$(a-b)^2 =$$

$$(x-2)^2 =$$

$$(3x-1)^2 =$$

$$(2x-y)^2 =$$

$$(3x-5)^2 =$$

$$(11x-2)^2 =$$

$$(11x-6)^2 =$$

$$(x-1)^2 =$$

$$(x-3)^2 =$$

$$(2x-3)^2 =$$

$$(x-y)^2 =$$

$$(8x-3)^2 =$$

$$(13x-3)^2 =$$

$$(13x-7)^2 =$$

Mondóka: két tag különbségének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete mínusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

b) Gyakorlás

$$(x+1)^2 =$$

$$(a-2)^2 =$$

$$(x+11)^2 =$$

$$(a-1)^2 =$$

$$(x-5)^2 =$$

$$(2x+1)^2 =$$

$$(13x-1)^2 =$$

$$(3x+5)^2 =$$

$$(1-3x)^2 =$$

$$(3-2x)^2 =$$

$$(11x+6)^2 =$$

$$(2a^2+3)^2 =$$

$$(y^3+12)^2 =$$

$$(y^3+12)^2 =$$

$$(y^3+12)^2 =$$

$$(7-\frac{12}{3}y)^2 =$$

$$(ac^3+ad^3)^2 =$$

$$(2a^n-1)^2 =$$

$$(a+1)^2 =$$

$$(x+3)^2 =$$

$$(x-1)^2 =$$

$$(2-a)^2 =$$

$$(15-y)^2 =$$

$$(3x+1)^2 =$$

$$(2x+3)^2 =$$

$$(2a-1)^2 =$$

$$(17a-1)^2 =$$

$$(3y-\frac{5}{2})^2 =$$

$$(7x-17)^2 =$$

$$(7x-17)^2 =$$

$$(a^3+b^3)^2 =$$

$$(\frac{5}{12}x-4)^2 =$$

$$(\frac{5}{12}x-4)^2 =$$

$$(3ab-3b)^2 =$$

$$(a^2y^3-a)^2 =$$

$$(a^n+a^k)^2 =$$

$$(x^k + x^2)^2 =$$

$$(x^k - x^{k+1})^2 =$$

$$\left(5x - \frac{3}{5}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{x}{15} - 5\right)^2 =$$

$$\left(\frac{13x}{14} - \frac{4}{22}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{a}{15} - \frac{b}{16}\right)^2 =$$

$$(1,2x - 0,5x^2)^2 =$$

$$(x^{a-1})^{a-1} =$$

$$(a^{2x-3})^{2x-3} =$$

$$(a^{5-12x})^{5-12x} =$$

$$(3x^{2k+1} - 2x^5)^2 =$$

$$(5x^{k-3} - x^{k-5})^2 =$$

$$(4x^{k-3} - 3x^3)^2 =$$

$$(2x^{3x-2} - 7x^{k+5})^2 =$$

Visszafelé: minek a négyzete a következő? vagyis Szorzattá alakítás!

$$x^2 - 2x + 1 =$$

$$4a^2 + 4a + 1 =$$

$$9a^2 + 12a + 4$$

$$x^2 - \dots + 9 =$$

$$4x^2 - 12x \dots =$$

$$25y^2 - \dots + 4 =$$

V/4) Gyakorlás

$$(11x+4)^2 - 2(x-3)^2 - 3(2+x)^2 =$$

$$-(2x+3)^2 + 2(5-2x)^2 - 2(3x-3)^2 =$$

$$-(5x+14)^2 - 3(4x-1)^2 - 3(-1-3x)^2 =$$

$$4x(-x+1)^2 - 2(5+7x)^2 - x(-1-2x)^2 =$$

Egészítsd ki úgy, hogy teljes négyzet legyen!

$$x^2 - \dots + 9 =$$

$$4x^2 - 12x \dots =$$

$$36y^4 - \dots + 25 =$$

Szorzáttá alakítás, egyenletek

I. Műveletek algebrai kifejezésekkel: szorzattá alakítás

I/1) Csak szám emelhető ki

$$3a+3x =$$

$$3x - 15y =$$

$$5a+10b =$$

$$25a-5c^2 =$$

$$-4a+12b =$$

$$45x-75c =$$

$$-24a-40b =$$

$$12a-18b+28a^2 =$$

$$-7a+14b-28c =$$

LNKO: Írd ide, hogy találjuk meg két v. több szám LNKO-ját:

$$(48;54) =$$

$$(63;52) =$$

$$(2275;490) =$$

$$(15;150) =$$

I/2) Betű is kiemelhető

- a) Ha minden tagban van ugyanolyan változó (határozatlan), akkor az a változó (határozatlan) kiemelhető (a szereplő legkisebb hatványon)
Mindent kiemelünk, a főegyüttható a zárójelen belül pozitív legyen, csökkenő fokszám, abc sorrend – de csakis tényező emelhető ki!

$$ab+ac =$$

$$-ab+a^2 =$$

$$2xa+2xc =$$

$$-5x^3-10x^2 =$$

$$7x^5-14x^6 =$$

$$-12ax+15ax^2 =$$

$$-bx-xa =$$

$$54a^2b-24b^2a =$$

$$-20x^3-15x^2 =$$

$$75ax+45bx-60xc =$$

$$y^3-y^2-y =$$

$$2x^4-x^5-x^3 =$$

$$25ab-20ba^2 =$$

$$-40x^3+30x^2 =$$

$$20xb^2c-12x^2b^2c =$$

- b) Összetettebb – mindent kiemelünk, a főegyüttható a zárójelen belül pozitív legyen, csökkenő fokszám, abc sorrend

$$15p^3q^2+16p^2q^3-17p^4q^4 =$$

$$18x^{k+n}-63x^k =$$

$$x^2+x+1 =$$

$$-35x^2y^2+30xy^3-40x^3y =$$

$$8x-2x^3-4x^2 =$$

$$15x^{m+2}-21x^2 =$$

$$-6m^2x^3+9m^3x^2 =$$

$$18a^{2k+1}-12a^2 =$$

$$-6x^{m+4}-15x^{2m+3} =$$

$$-9a^2x-12xb+6x =$$

$$-15a^3-5a^2+10a =$$

$$-15x^2y^3-9x^3y^4+18x^3y^3 =$$

$$-24a^2bc^3-36ab^3c^2+12a^3bc^3 =$$

- c) Zárójeles kifejezés emelhető ki: a zárójeles kifejezést mindig egy betűs kifejezéshez hasonló „változónak”, tényezőnek tekintjük! *Csakis tényező emelhető ki.*

$$a(x-1)+4(x-1) =$$

$$x(x-1)-2(x-1) =$$

$$-a(x-1)+b(x-1) =$$

$$x(a+3)+(a+3) =$$

$$x(a+b)-(a+b) =$$

$$4(x-3)-c(x-3) =$$

$$x(a-b)-y(a-b) =$$

$$-x(a+b)-(a+b)+x^2(a+b) =$$

$$(x+5)-y^2(x+5)+y(x+5) =$$

$$-(3x+2)+b(2+3x) =$$

$$kc(b-a)-21c(b-a) =$$

$$k(b-c)-k^2(b-c) =$$

- d) A kiemeléshez sok esetben „belső” kiemelés kell először. A szorzattá alakításhoz először *mindent* ki kell emelni... Figyelem: a „-1” kiemelése: a főegyüttható a zárójelen belül pozitív legyen

$$(1-x) =$$

$$3(2-3x) =$$

$$(2x-3x^2) =$$

$$-4(5x-10x^2) =$$

$$a(5-b)-c(2b-10) =$$

$$-b^2(3ab-12b)-b(5ac-20c) =$$

$$a(b-3)+c(3-b) =$$

$$x(x+3)+2(-x-3) =$$

$$ax^2(4-4x)-ax(6x-6)+ax^3(2-2x) =$$

$$4x(15x-5x^2)+5bx(2x^3-6x^2) =$$

$$-3x(-15x^3-5x)+4(6x^4+2x^2) =$$

$$-b(5ay-20a)+(8b-2by) =$$

$$2a(9x^2-6x)-\frac{1}{2}(6x-4) =$$

$$x(-x+3)-(x-3) =$$

$$x(4+x^2)-(-4-x^2) =$$

$$x(x-5)+(5-x) =$$

$$2x(x+2)+4(-x-2) =$$

$$x^2(4-x)-(x-4) =$$

$$6(x-2)-9(2-x) =$$

$$x(2-3x)+(6x^2-4x) =$$

$$c(14-21x)+(9x-6)-5a(8x-12x^2) =$$

$$6x^2(x-3)+12x(6-2x)-6x(3-x) =$$

$$5x^2(a^2-1)+(5-5a^2) =$$

$$-2(6x-3x^2)-3(4x^2-8x)-2x(5x^2-10x) =$$

- e) Nincs csoportosítva – avagy „magad uram, ha szolgád nincsen”
Először kiemelés, utána szorzattá alakítás

$$ax+a+x+1 =$$

$$ax+2+a+2x =$$

$$x^4-x+3x^3-3 =$$

$$x^4-x-x^3+1 =$$

$$ax-a-2x+2 =$$

$$c^2a-2a+c^2b-2b =$$

$$xa+3b-xb-3a =$$

$$6xy+2x-9y-3 =$$

$$5ac^2+3b-3c^2b-5a =$$

$$2ya+3a-2by-3b =$$

$$20xy-15x-8y+6 =$$

$$5xa-5bx+b-a =$$

$$m^2a^2+m^2b^2-b^2-a^2 =$$

$$ax-3x+ya-3y =$$

$$3ax-4-3a+4x =$$

$$5x^3-5x^2-3x+3 =$$

$$10x^2-6-5x^3+3x =$$

$$5xy+3a-3y-5ax =$$

$$5a-ab^2+5cb^2-25c =$$

$$ax+ay+2x+2y =$$

$$ax+2y+ya+2x =$$

$$ak-ac-3c+3k =$$

$$5a^2b+10ab^2+3a^2bc+6ab^2c =$$

$$a^2-a-ca+c =$$

$$a^3-a^2-a+1 =$$

$$bax-bay-cbx+cyb =$$

$$2ax+2ay+4bx+4by =$$

$$xab-3xb^2+cax-3bcx =$$

$$x+x^3-x^2-x^4 =$$

$$6ax+4-3a-8x =$$

$$10+3ax-2x-15a =$$

$$3a^2-3ab+3b^2-3ab =$$

$$a^2c^2-b^2c^2-a^2c+b^2c+a^2-b^2 =$$

$$5y+3x+15+xy =$$

$$x^3+15+5x^2+3x =$$

$$ab+3c-ac-3b =$$

$$x^2a-x^2b-2ax+2bx+a-b =$$

$$2ax^2+bx+bx^2+2ax-2a-b =$$

$$30-12x+8ax-20a-18y+12ay =$$

HOGY KÉSZÜLNEK EZEK A SZÖRNYŰSÉGEK? Így:

$$(6b-3c)(7b^2-2c+3) = 42b^3-12bc+18b-21b^2c+6c^2-9c =$$

II. A teljes négyzet

Figyelem: Először amit lehet, kiemelünk. Ha kell, akkor a -1 -kiemelése is, hogy a főegyüttható pozitív legyen!

II/1) Szorzattá alakítás előtt mindent kiemelünk!

$$x^2-2x+1 =$$

$$3a^2-6ab+3b^2 =$$

$$x^2+6x+9 =$$

$$9x^2-6x+1 =$$

$$-4x^2+24x-36 =$$

$$4x-4x^2-1 =$$

$$x^2+8x+16 =$$

$$16x^2-8x+1 =$$

$$12a-4a^2-9 =$$

$$25x^2+70x+49 =$$

$$x^4+2x^2+1 =$$

$$-50x^4+40x^2-8 =$$

$$-12a^2+36a-27 =$$

$$5a^4-10a^2b+5b^2 =$$

$$-25x^4+20x^2-4 =$$

$$-18-32x^2+48x =$$

$$-12y^2+12y-3 =$$

$$-5x^4-10x^2-5 =$$

$$60x^2-18x^3-50x =$$

$$-56x+8x^2+98 =$$

II/2) Több mindenre kell figyelni

$$4ax^3 - ax^4 - 4ax^2 =$$

$$5a^2b^2 - 10ab + 5 =$$

$$3x^4 - 12x^3 + 12x^2 =$$

$$-5a^2 + 10ab - 5b^2 =$$

$$4x^4 - 4x^2 + a + 4x^4a + 1 - 4x^2a =$$

$$a^2x - 1 - 2ax + x - a^2 + 2a =$$

$$4ax^2 - 8bx^2 - 4ax + 8bx + a - 2b =$$

$$4a^2x^2 - 12a^2x + 12x + 9a^2 - 4x^2 - 9 =$$

III. Egy különleges alak: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Két tag összegének és különbségének szorzata =

III/1) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ „á plusz b é szer á mínusz b é egyenlő á négyzet mínusz b négyzet”

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$(x-1)(x+1) =$$

$$(a+4)(a-4) =$$

$$(2x-1)(2x+1) =$$

$$(3x+2)(3x-2) =$$

$$! (x-1)(1-x) =$$

$$(x-12)(12+x) =$$

$$(13a-b^2)(13a+b^2) =$$

$$(12x-15)(15+12x) =$$

$$(11-19y)(11+19y) =$$

$$(x^m + x^n)(x^m - x^n) =$$

$$(14x-7)(7+14x) =$$

$$(5x-4)(-5x-4) =$$

$$! (5x+4)(-5x-4) =$$

$$\left(\frac{17}{25} - \frac{32}{13}a^2\right)\left(\frac{17}{25} + \frac{32}{13}a^2\right) =$$

$$\left(\frac{2}{5}b^2 + \frac{3}{2}a^2\right)\left(\frac{2}{5}b^2 - \frac{3}{2}a^2\right) =$$

$$(16xy+15x)(16xy-15x) =$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) =$$

Számokkal:

$$35 \cdot 25 =$$

$$71 \cdot 69 =$$

$$22 \cdot 18 =$$

Többtagú tényezők, amit lehet: fejben

$$(a+b+c)(a+b-c) =$$

$$(x^2+x-3)(x^2+x+3) =$$

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d) =$$

$$(x^2+x-2)(x^2+x+2) =$$

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2) =$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) =$$

III/2) Visszafelé: alakítsd szorzattá

a) Egyszerűbbek. A főegyüttható pozitív legyen, és legyen minden kiemelve!

$$a^2 - b^2 =$$

$$a^2 - 1 =$$

$$324 - 289b^2 =$$

$$80a^2 - 405b^2 =$$

$$3a^2 - 363 =$$

$$144x^2 - 9c^4d^2 =$$

$$45x^4 - 20a^2 =$$

$$\frac{4}{25} - x^2 =$$

$$x^2y^2 - 0,01a^6 =$$

$$243x^4 - 3 =$$

$$2a^4b^2 - 32 =$$

$$x^2 - 256x^4 =$$

$$3x^4 - 48x^8 =$$

$$7a^8 - 7 =$$

$$x-289x^3 =$$

$$x^4-x^{12} =$$

$$4a^5-a^3 =$$

$$\frac{1}{25}x^2-\frac{18}{32}a^6 =$$

$$0,0004x^3-x^5 =$$

$$25x^6-9b^2 =$$

b) Számok: Ötlet: $95^2-5^2 = (95+5)(95-5) = 100 \cdot 90 = 9000$

$$15^2-85^2 =$$

$$72^2-28^2 =$$

Több tag

$$(a+b)^2-c^2 =$$

$$(x+1)^2-a^2 =$$

$$(x+3)^2-5^2 =$$

$$(x+4)^2-36 =$$

$$(a-b)^2-121 =$$

$$(a^2+1)^2-4a^2 =$$

$$!! (a^2+1)^2-289 =$$

$$!! a^4-(2a+1)^2 =$$

$$x^2-(a+b)^2 =$$

$$x^2-(a-b)^2 =$$

$$x^4-(2x-1)^2 =$$

$$(1+x^2)^2-(1-x^2)^2 =$$

$$!! (a^2+b^2)^2-4a^2b^2 =$$

$$25x^2-(b+x)^2 =$$

$$49(x+2)^2-(a-b)^2 =$$

$$0,36x^2-(x^3-x^2)^2 =$$

c) Összetettebb feladatok

$$a^4b^2-(c^2-d^2)^2 =$$

$$(x^2-y^2)^2-(x^2+y^2)^2 =$$

$$x^2-2xy+y^2-a^2 =$$

$$(x+y-a)^2-(a+x+y)^2 =$$

$$(x^2-x)^2-(x-1)^2 =$$

$$4(m^2-c^2)^2-9(c-m)^2 =$$

$$(x^2+3x-1)^2-(7x-5)^2 =$$

$$(p-2q)^4-(p+2q)^4 =$$

$$(x-3)^4-(x^2-1)^2 =$$

$$(c^2-b^2)^2-(c+b)^4 =$$

$$(a+b)^4-16a^2b^2 =$$

$$(x^2-2x)^2-1 =$$

III/3) Egy nehéz, egyelőre intuíciót kívánó alak

$$x^2+3x+2 =$$

$$-x^2+8x-15 =$$

$$6x-3x^2+9 =$$

$$15x-18-3x^2 =$$

$$20x^2+40x+15 =$$

$$-2x-12x^2+2 =$$

$$x^2+7x+12 =$$

$$4x-8+4x^2 =$$

$$-5x^2+10x+40 =$$

$$2x^2+x-1 =$$

$$2x^2-5x-3 =$$

$$5x^2-13x-6 =$$

IV. Egyenlet megoldás

ÉT: Értelmezési Tartomány, VH: visszahelyettesítés

Elsőfokú egyenletnél a cél, hogy az egyik oldalon csak az ismeretlen álljon (valamilyen együtthatóval), a másik oldalon pedig egy konstans.

Jól rendezettek pl.: $-3x = 7$ vagy $\frac{2x}{3} = 5$ vagy $6x = 0$ Már csak osztani kell.

Még nem rendezett: $3x+2 = -7$ vagy $5x = 8x$ Ezeknél még mindkét oldalon van x vagy konstans.

IV/1) Egyszerűbb egyenletek

$$2(x-3)-4(2-x) = 6(x+1)-2(3x-8)$$

$$-(4 - (2x-5)) = 3(5x-7) - 2(4x-1)$$

$$5(2x-1)-3(x-2) = 2(x-3(x-2))$$

IV/2) Törtös egyenletek

Figyelem: a törtvonal minden esetben zárójelet helyettesít:

„kunkorítsuk fel a törtvonalak végét. Kunkori Aki nem teszi, pokolra jut.

Ha törtet látunk egy egyenletben és szorozni akarjuk az egyenletet, érdemes mindkét oldalt zárójelbe tenni!

$$\frac{2x-3}{4} - \frac{3-2x}{6} - x = 1 - \frac{3x-2}{3}$$

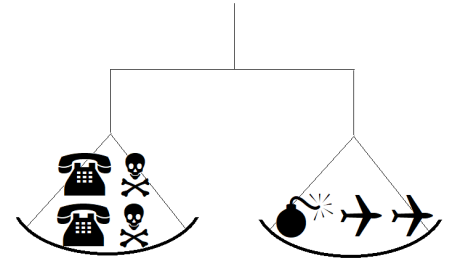
Figyelem, ha nem teszed ki a színes zárójeleket: nagyon elrontod.

$$\frac{3x-4}{2} - \frac{2x-3}{3} - 2x = 1 - \frac{x-6}{6}$$

Mi történik, ha nem mindent szorzok meg
Olyan ez a hiba, mint a következő:

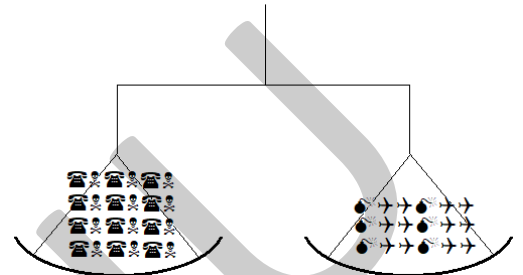
Legyen:

$$2\text{db } \text{☎} + 2\text{db } \text{☠} = 1\text{db } \text{💣} \text{ és } 2\text{db } \rightarrow$$

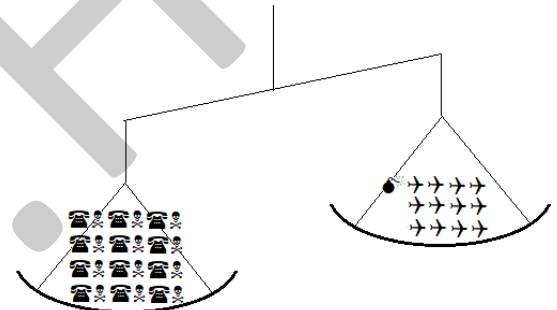


Ha mindkét serpenyőben megszorozom a tartalmat, akkor egyenlők maradnak:

(lesz bal oldalon 12db ☎ és 12db ☠
a jobb oldalon 6db 💣 és 12 db →



De ha a bombák számát nem hatszorozom meg (elfelejtem, mert az egyenlet két oldalát nem zárójeleztem be a nagy színes zárójellel), akkor elbillen az egyenlőség:



A másik típushiba ugyanennél az egyenletnél: ha elfelejtem a kunkorit, vagyis nem kunkorítom fel az egyenletben a zárójelek végét, ahogy most itt látható:

JÓL:

$$\left(\frac{3x-4}{2} - \frac{2x-3}{3} - 2x \right) = 1 - \left(\frac{x-6}{6} \right)$$

Hibásan: $\frac{3x-4}{2} - \frac{2x-3}{3} - 2x = 1 - \frac{x-6}{6}$

Namármost megszorozom az egyenlet mindkét oldalát 6-tal:

$$\frac{3x-4}{2} - \frac{2x-3}{3} - 2x = 1 - \frac{x-6}{6} \quad / \cdot 6$$

És a következő óriási hibát követem el:

$$9x-12-4x-6-12x=6-x-6$$

Hibás, mertha zárójeleztem volna:

Jól: $\left(\frac{3x-4}{2} - \frac{2x-3}{3} - 2x \right) = 1 - \left(\frac{x-6}{6} \right) \quad / \cdot 6$

$$3(3x-4) - 2(2x-3) - 12x = 6 - (x-6)$$

$$9x-12-4x+6=6-x+6$$

Vagyis aki törtes egyenletnél a törtvonalakat nem kunkorítja föl (piros zárójelek), a gyehehnára kerül. Azzal egyetemben, aki egyenlet szorzása előtt nem zárójelezi be az egyenlet két oldalát (nagy zöld zárójel).

Természetesen a diák mindenre képes: hiába zárójelez, elfelejti az egyenlet *mindkét* oldalát megszorozni...

Közös nevező: legkisebb közös többszörös legyen. A törtvonal: zárójelet helyettesít – de mi azért nem vagyunk restek kitenni a zárójelet!

$$\frac{7x-2}{10} - \frac{4-3x}{5} = 3x - \frac{3x+1}{2} + 1$$

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-3}{4} = \frac{3}{20}$$

$$-2x - \frac{7x-3}{6} = -4x + \frac{5-2x}{10}$$

$$\frac{-4x-3}{4} - \frac{7x+5}{6} = 3-2x \quad \text{Kunkori!}$$

$$\frac{-2x-1}{6} - \frac{1-3x}{15} = \frac{1+4x}{10} - \frac{x-3}{5}$$

$$\frac{3(2x-5)}{14} - \frac{7+3x}{6} + \frac{x}{2} = \frac{2x-3}{7} - \frac{3-2x}{21}$$

$$2. \frac{x-3}{10} - \frac{3(x-2)}{15} = -\frac{3x-4}{6} + \frac{2x-4}{5}$$

$$\frac{4x-3}{5} - \frac{3-4x}{6} = \frac{-2x-7}{15} + x$$

$$\frac{3-4x}{4} - \frac{3x-1}{3} = -3x + \frac{13}{12}$$

$$\frac{3(5x-1)}{4} - \frac{5(6-2x)}{3} = 8x - \frac{x+3}{2}$$

IV/3) Egyenlet = állítás

- mely vagy igaz, és akkor meg kell találni, mely számra igaz; vagy lehet, hogy „becsapás”

Egyenletmegoldás: azon x-ek keresése, melyekre igaz az állítás...

$$\frac{-x+1}{6} - \frac{5-4x}{9} = x - \frac{13x-2}{18}$$

ÉRTELMEZÉS:

Tudjuk: az egyenlet egy állítás: A tanár gondol egy számra, és azt mondja, hogy a kétszerese 10. A diák átírja egyenletté: $2x = 10$.

Megoldja: $x = 5$ és megmondja, hogy a tanár az 5-re gondolt.

A tanár talányosabb lesz: azt mondja, hogy gondol egy számra, a kétszerese 7-tel nagyobb, mint a kétszerese.

Rögtön tudjuk, hogy ilyen szám nincs, ellentmondó a gondolat.

De azért a diák felírja az egyenletet:

$$2x-7 = 2x$$

Majd megoldja:

$$2x-7 = 2x \quad /-2x$$

$$-7 = 0$$

Rájön a diák, hogy ellentmondó az egyenlet, nincs olyan szám, amelyre a tanár gondolhatott. ☺

Egyenlet = állítás.

Egyenletmegoldás: azon x-ek keresése, melyekre igaz az állítás...

$$\frac{x+1}{3} - \frac{-4-3x}{12} = x + \frac{3-3x}{4} - \frac{2-8x}{24}$$

Értelmezés:

Tudjuk: az egyenlet egy állítás: A tanár gondol egy számra, és azt mondja, hogy a háromszorosánál 2-vel kisebb szám a felénél 8-cal nagyobb.

A diák átírja egyenletté: $3x-2 = x/2 + 8$.

Megoldja: $x = 4$ és megmondja, hogy a tanár az 4-re gondolt.

A tanár talányosabb lesz: azt mondja, hogy gondol egy számra, a kétszerese a felének a négyszerese. Melyik ez a szám?

Ha egy kicsit gondolkodunk, akkor kiderül, hogy teljesen mindegy, hogy mire gondolt a tanár, bármelyik számra igaz ez.

De azért a szorgalmas diák felírja az egyenletet:

$$2x = 4 \cdot \frac{x}{2}$$

Majd megoldja:

$$2x = 2x \quad / -2x$$

$$0 = 0$$

Rájön a diák, hogy ez mindig igaz, vagyis bármely számra igaz az egyenlet:
„Azonosság, bármely valós x megoldás: Azonosság: $\forall x \in \mathbb{R}$ Mo.



$$-6 - \frac{6x-2}{5} - 3 \cdot \frac{3+x}{2} = -1 - \frac{20+3x}{2}$$

$$\frac{-6x+10}{5} + \frac{3-2x}{3} = \frac{6-12x}{4} - \frac{-9x-5}{3} - 2 \cdot \frac{(4x+1)}{5}$$

IV/4) Szorzattá alakítással: elsőfokúakra bontva - alap

Mondóka: Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

Mondóka: Ismeretlen tartalmazó tényezővel nem osztunk.

a) $(x-3)(x+5) = 0$

b) $\left(\frac{3x-2}{5}+1\right)(5-2x)\left(\frac{x+2}{3}-\frac{3-x}{5}\right)=0$

IV/5) Szorzattá alakítással: elsőfokúakra bontva - gyakorlás

a) $(x-2) \cdot x = -5x$

Mi volna, ha mindkét oldalt leosztanám x-szel?

Egy polinom-egyenletnek (egy ismeretlen különböző hatványait tartalmazó egyenletnek) annyi „gyöke” (megoldása) lehet, ahányad fokú!
Lehet, hogy egy gyök többször előfordul.

Mondóka: másod, vagy magasabb fokú egyenlet úgy oldunk meg, hogy „egy oldalra rendezünk” („nullára redukálunk”), majd szorzattá alakítunk. (Úgy, hogy az az oldal egytagú, de több tényezőtől áll.)

b) $x^2 \cdot (x-3) = 0$

c) $(y-2) \left(\frac{3y-2}{4} + 5 \right) \left(6 - \frac{5-2y}{3} \right) = 0$

d) $y^2 = 5y$

$32x^3 = 2x$

e) $2x^2 = 4x - 2$

f) $-20x^3 = 45x - 60x^2$

$$x^3 + 3x^2 = 4x + 12$$

g) $60x^2 = 18x^3 + 50x$

$$6x^3 + 15x^2 = 9x$$

h) $x(x-3)^2 = -12x^2$

$$5x^2 = 80$$

i) $\left(4 - \frac{2-4x}{6} - \frac{5x+3}{9}\right)(4x^2-9)=0$

j) $(2x-1)^2 = 2x(2x-3)$

k) $3x^2+48 = -24x$

$$6x^3 = 15x^2.$$

V. Algebrai törtek

V/1) Algebrai tört

Definíció: Algebrai törteknek hívjuk azokat a törteket, amelyek számlálója is és nevezője is egy polinom.

V/2) Kezelésük:

Ha megfigyeljük a racionális számokat, ott látható, hogy az egyszerűsítés úgy történik, hogy mind a számlálót, mind a nevezőt elosztjuk ugyanazzal a nem 0 számmal.

$$\frac{504}{540} =$$

Törtek egyszerűsítése: A számláló is és a nevező is egy tag lehet csakis. Csak utána egyszerűsíthetünk a közös tényezővel.

$$\frac{12a^3b}{15ab^2} = \frac{\frac{12a^3b}{3ab}}{\frac{15ab^2}{3ab}} =$$

Mi van akkor, ha több tagból áll a számláló?

$$\frac{5a+10a^2}{6a^2+3a} =$$

$$\frac{-3x-3x^2}{x^3+x^2} =$$

$$\frac{27x-3x^3}{5x^2+15x} =$$

$$\frac{3b^3-3a^2b}{5a-5b} =$$

V/3) ÉT (Értelmezési Tartomány) és egyszerűsítés

Egy tört nevezője soha sem lehet 0.

Vagyis egy törtkifejezés Értelmezési Tartománya nem tartalmazhatja azokat a számokat, mely számokra a nevező értéke 0.

Törtet csak akkor egyszerűsíthetünk, ha a számláló és a nevező is egy tag, és akkor csakis a közös tényezőikkel.

Vagyis jelen esetben az ÉT keresése egy egyenlet megoldás, polinom típusúaknál általában gyökkeresés.

Első fokú polinom-egyenletnél: két oldalra rendezünk, másod és magasabb fokúaknál egy oldalra, és szorzattá alakítunk. Annyi gyököt keresünk, ahányad fokú a polinom.

Pl.: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

x	5	4	-2	-1	0	3	6	1	
$x^2 - 3x + 2$									
$x - 2$									
$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$									

Melyik az a szám, amire nincs értelmezve a tört?

ÉT: a nevező nem lehet 0, vagyis megkeressük, hogy mikor 0 a nevező.

ÉT:

Csakis az értelmezési tartomány megállapítása után szabad egyszerűsíteni:

Egyszerűsíteni csakis olyan törtet szabad, melynek számlálója is, nevezője is egytagú: vagyis egyszerűsítés előtt szorzattá kell alakítanunk – hiszen akkor lesz a számláló és a nevező is „egytag” – de több tényezősszorzat:

V/4) Gyakorlás

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} =$$

$$\frac{4-2x}{x^2-4} =$$

$$\frac{x^4-1}{x^2+1} =$$

$$\frac{4-4x^2}{3x+3} =$$

$$\frac{12x-3x^2-12}{x^2-4} =$$

$$\frac{27+3x^2-18x}{6x-2x^2} =$$

V/5) ÉT-ra figyelni

$$A = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x - 2}$$

ET:

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{-x - 2} =$$

Számítsuk ki a helyettesítési értékeket:

x	$A = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x - 2}$	
5		
2		
0		
-2		
-3		
0,5		

Algebrai törtnél egyszerűsítés előtt: megvizsgáljuk az értelmezési tartományt, mert egyszerűsítés után már sok esetben megváltozik az ÉT.

ÉT, majd egyszerűsíts!

$$\frac{21a - 7a^2}{a^2 - 5a + 6} =$$

$$\frac{20 - 5b^2}{3b^2 - 12b + 12} =$$

$$\frac{x+2}{x} =$$

$$\frac{x^8 - 1}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{2x - x^2 - 1}{2x - 2} =$$

$$\frac{x}{2x^2 - x} =$$

$$\frac{3 - 3x}{2x^4 - 2} =$$

Nem kötelező, otthoni gyakorló: $\frac{4x^2 - 4}{3x + 3} =$; $\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} =$; $\frac{2y^2 - 20y + 50}{3y - 15} =$;
 $\frac{x^2 - 1}{x^2 - c + x - cx} =$; $\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 3} =$; $\frac{2x + 2}{3x^2 - 6x + 3} =$; $\frac{15x^2 - 3x}{a - 15x^2 + 3x - 5ax} =$

V/6) Törtök összeadása, kivonása, szorzása, osztása: vond össze, csak egy tört legyen
 Közös nevezőre hozás... „Összevonás”.

Mivel egy tört valójában egy szorzat – pl.: $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$, ezért az összevonás valójában
 szorzattá alakítás.

Pl.: $\frac{3}{5} + 2 = 3 \cdot \frac{1}{5} + 2$ DE: ez így nem szorzat. Vagyis csakis egy tört lehet, ezért
 „összevonunk”:

$$\frac{3}{5} + 2 = \frac{3}{5} + \frac{2 \cdot 5}{5} = \frac{13}{5} \text{ Így lett egy tört!}$$

$$4 - \frac{8}{5} =$$

„Vonj össze” – vagyis „alakíts szorzattá”

$$4 - \frac{2p+1}{p} =$$

$$\frac{p}{p^2-3p} - \frac{1}{p} =$$

$$\frac{7p-3}{5-2p} - 4 =$$

$$\frac{x-3}{2x-4} - \frac{2}{x+1} =$$

$$\frac{x-1}{4x-2} - \frac{1}{4x^2-1} =$$

$$\frac{3x+4x^2-1}{2x+5}-2x-1=$$

$$\frac{3x^2+5}{3x-4}-x+2=$$

$$\frac{3x+7}{2x+1}-x+3=$$

$$3-2x-\frac{5+x}{x-1}$$

VI. Szöveges egyenletek

VI/1) Alapvető gondolatok

Főbb megoldási ötletek: Táblázat; „Nyomkövetés”, egyéb ötletek

A legfontosabb: megtalálni, mely adatot keressük, mely legyen az ismeretlen az „ x ”!
Vagyis: ha például egy szöveges egyenlet arról szól, hogy a békák száma hogyan változott az évek alatt a tóban, és a békák kezdő létszámát firtatja, akkor a következő kérdést kell föltennem magamban:

Mondóka minta: „Tudom, hogy hány béka volt kezdetben a tóban? Nem tudom. Tehát tudom: x ”

Mert ezzel az x -szel lehet algebrailag felgöngyölíteni, nyomon követni a példát, és végül felállítani egy algebrai összefüggést, vagyis az x -re egy egyenletet.

VI/2) Szöveges egyenletek

- a) Apa tizenöt évvel ezelőtt kétszer annyi idős volt, mint a most 12 éves fia. Hány éves most az apa?

	M	12 éve
A	x	$(x-15)$
F	12	

- b) Nagyanyónál tyúkok és rőfik élnek. Együtt 30 fejük van és 80 lábuk. Hány tyúk van?

	F	L
Ty	x	
R	$30-x$	

- c) Hód és vidra együtt 30 kg. A hód tömege a vidráénak 5-szöröse. Hány kg külön-külön a két jószág?

- d) Egy fagyi árus 5 gombóc híján 4-szer annyi csokis fagyit adott el, mint vaníliásat. Vaníliásból pedig pont fele annyit, mint puncsot. Összesen 65 gombócot adott el. Melyikből mennyit?

- e) A hetedikesek Valentin-napon rózsát árulnak. A rózsák 20%-át és még 2-öt az ötödikesek, a maradék harmadánál 2-vel kevesebbet a hatodikosok vettek meg. A megmaradt rózsák kétharmadát a nyolcadikosok vették meg. 50 maradt. Mennyi volt?

- f) Egy istállóban 20-szal több ló van, mint a másodikban. Ha az elsőbe még 8 lovat, a másodikba pedig még 2 lovat visznek, akkor az első istállóban háromszor annyi ló lesz, mint a másodikban. Hány ló van most az egyes istállóban?

- g) Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 11. Maga a szám 27-tel kisebb, mint a jegyei felcserélésével kapott szám. Mi az eredeti szám?

- h) Egy tóban élt néhány béka. A békák száma egy év alatt kettőhöz a háromszorosára növekedett, egy újabb év elteltével pedig (az előző évihez képest) megötszöröződött. Franciák költöztek a közelbe, így a harmadik évben annyival csökkent a békucik száma, amennyi ahányan eredetileg a tóban laktak. Ekkor 12-szer annyi béka volt a tóban, mint eredetileg, és még 6. Hány béka volt eredetileg a tóban?

- i) Két pozitív egész szám összege 726. Ha a nagyobbik szám utolsó jegyét, a 0-t elhagyjuk, akkor a kisebbik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

- j) A terráriumban gonosz pókok és ártatlan legyek élnek nagy barátságban (míg föl nem falják egymást): pók (8 láb), légy (6 láb). Összesen 234 lábuk van és 33 fejük (gilisza nincs). Hány pók osztozhat a legyecskéken?

- k) Egy háromjegyű szám első jegyénél 2-vel nagyobb a középső és a harmadik duplája a középsőnek. Ez a szám 196-tal kisebb, mint az a 3 jegyű szám, melynek minden jegye az eredeti középső jegye. Mi az eredeti szám?

VII. Ismétlés

VII/1) Végezd el a műveletet – összevonás – csökkenő fokszám

$$(2x-3)^2 =$$

$$(5x-6)^2 =$$

$$(6x^2+5)(6x^2-5) =$$

$$(x^2+2x+3)(x^2+2x-3) =$$

$$(x+1)(x^2-x+1) =$$

$$(x^2-2)(x^4+2x^2+4) =$$

$$(12x+1)(x+3) =$$

$$(2x-3)(5x-1) =$$

VII/2) Szorzattá alakítás

$$3cx^2 - 9 - x^2 - 18cx + 27c + 6x =$$

$$2x^7 - 2x =$$

$$(x^2-8x-7)^2-81 =$$

$$(a^4+1)^2-289 =$$

$$x^4-(2x-1)^2 =$$

$$45-3x^2-6x =$$

$$5x+14-x^2 =$$

$$49x^2-28x+4 =$$

$$(4x^2+1)^2-25 =$$

$$2x^2+9x+10 =$$

$$6x^2-23x+21 =$$

$$\frac{2}{1250}x^4 - \frac{3}{48}a^4 =$$

$$-18x^3-32x+48x^2 =$$

$$a^2x-1-2ax+x-a^2+2a =$$

$$-25x^4+20x^2-4 =$$

$$(x^2+16)^2-64x^2 =$$

$$x^2-6x+5 =$$

$$2x^2+2x-24 =$$

$$-3x^2+3x+90 =$$

$$4x^2+2x-12 =$$

$$-9x^2+21x-6 =$$

$$-4x^2+4x+3 =$$

$$x^4-5x^2+4 =$$

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 =$$

$$9x^2-24x+16 =$$

VII/3) Egyenletek

$$\frac{x-5}{3} - \frac{2(3-2x)}{5} = \frac{4-6x}{6} - 2$$

$$2x^2 = 16x-32$$

$$9x^3 = 4x$$

$$3x^2 = 10-13x$$

$$\frac{2x^2-18}{3x^2-6x-9} = 2$$

$$\frac{3-3x^4}{5x^3+5x^2+5x+5} = -2$$

$$\frac{2x^2-x}{2x^2+1} = \frac{4x^2-12x}{x^2-3x}$$

$$2x - \frac{4-3x}{2} - \frac{15-5x}{10} = -\frac{3-12x}{6} - 2 \cdot \frac{20-15x}{15}$$

$$2 - \frac{5x-1}{3} = 1 - \frac{2x+3}{2}$$

$$-\frac{2x+1}{2} + \frac{1-3x}{2} = -\frac{3x+2}{6} - 3 \cdot \frac{4+6x}{10}$$

$$(3x-2)(5x-1) = 0$$

$$5x^2 - 125 = 0$$

$$(x-2)^2 - (2x+1)^2 = 0$$

$$x^2 + 5 = 0$$

$$6x^2+13x-5=0$$

$$4x^2-12x=-9$$

$$7-\frac{5x-2}{4}+\frac{3-3x}{6}=2x+3-\frac{-2x-1}{3}-\frac{5+2x}{2}$$

Add meg a következő két szám összes közös osztóját:

$$a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \quad b = 2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$$

$$2x - 4 = 2 - \frac{2 - 3x}{3}$$

$$-\frac{2}{5}(5 - 3(x - 3) + 5) = -\frac{3 - 4x}{5}$$

Számold át 10-es számrendszerbe:

$$201120_3 =$$

Számold át 2-es számrendszerbe:

$$1731 =$$

Számold át 5-ös számrendszerbe:

$$2589 =$$

$$(5x^4-5)(3x^2+18x+27) = 0$$

$$12x^3+3x = 12x^2$$

Adott a következő 5 jegű szám: $30\square4\square$ Osztható 15-tel is és 24-gyel is. Mi lehet ez a szám (Ha több van, add meg mindet!)

Számold át a 3021_4 számot az 5-ös számrendszerbe!

Alakítsd szorzattá

$$9x^2 - 6x + 1 =$$

$$20y - 20y^2 - 5 =$$

$$81x^4 - 16 =$$

$$-4 + 2x^3 + x^2 - 8x =$$

$$x^2 - 3x - 10 =$$

$$2x^2 - x - 15 =$$

Körülbelül hány jegyből áll: 7^{65}

Oldd meg: $\frac{8x-4}{2x^2+3x-2} - \frac{3x^2-12x+12}{5x^2-20} = 1$

Egy természetes szám pozitív osztóinak száma: 10. Melyik ez a legkisebb szám? (Ne csak végeredményt ír, látszódjék, hogy gondolkodsz...)

Legalább hány számjegyből áll a 12^{80} ? Próbálj mennél pontosabb becslést adni!

Melyik a nagyobb? 2^{4^5} vagy 25^{4^3} ?

Adott két szám az x -es számrendszerben: 21_x és 23_x . A szorzatuk: 513_x . Melyik ez a számrendszer?

Kétféle daráltkávém van: az olcsóbb kilója 20 €, a drágábbé 30€. 40 kg kávét akarok úgy kikeverni belőlük, hogy annak kilója 27€ legyen. Melyikből mennyit kell a keverékbe tenni?

Melyik a nagyobb: $\frac{35!}{24!}$ vagy 5^{21}

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©