# Matematika

# Függvények-Egyenletek – 2.

# Munkatankönyv

# v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

# Matematika

# Függvények – Egyenletek - 2

# Munkatankönyv

# v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

szmg.hu

*Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©*

# Tartalomjegyzék

**Másodfok – A-B: Ismétlés - Merőleges affinitás; Algebra ..... 9**

I. Merőleges affinitás ..... 9

I/1) A merőleges affinitás – nem egybevágósági transzformáció – sőt, szögeket sem tart… ..... 9

I/2) Szerkesszünk ilyet! ..... 10

I/3) Mire jó? ..... 10

II. Az egész kitevőjű hatványok ismétlése ..... 11

II/1) Pozitív egész kitevőjű hatványok ..... 11

II/2) Az egészkitevőjű hatványok ..... 11

II/3) Tételek: negatív kitevőre is működnek ..... 11

II/4) Gyakorlás – ne legyen se zárójel se tört ..... 12

III. Algebrai kifejezések – zárójelfelbontás – szorzattá alakítás ..... 12

III/1) Zárójelfelbontás. Amit lehet, fejben! ..... 12

III/2) Szorzattá alakítás ..... 13

IV. Algebrai törtek ..... 13

IV/1) Egyszerűsítsünk – szóban mondd meg az értelmezési tartományt ..... 13

IV/2) Hozz közös nevezőre; majd, ha lehet, alakíts szorzattá és egyszerűsíts ..... 14

IV/3) Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél! ..... 14

IV/4) Egyszerűsíts – illetve végezd el ..... 15

**Másodfok – C: Négyzetgyök ..... 16**

I. A négyzetgyök fogalma és a négyzetgyökvonás azonosságai ..... 16

I/1) Definíció ..... 16

I/2) Gyakorlása ..... 16

I/3) Azonosságok - szorzás ..... 17

I/4) Azonosságok - osztás ..... 17

I/5) Azonosságok - hatványozás ..... 17

I/6) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből ..... 18

II. Műveletek gyökös kifejezésekkel ..... 18

II/1) Kiemelés ..... 18

II/2) Bevitel ..... 18

II/3) Összevonások ..... 19

II/4) Négyzetgyökös kifejezések szorzása ..... 19

II/5) Végezd el a műveletet, és írd föl a legegyszerűbb alakban a következő számok számértékét! ..... 19

II/6) Négyzetgyökös kifejezések osztása ..... 20

II/7) Szorzattá alakítás, egyszerűsítés ..... 20

II/8) Négyzetgyökös kifejezések hatványozása ..... 20

szmg.hu

III. A nevező gyöktelenítése: az egyik legfontosabb művelet a gyökös kifejezéseknél ..... 21
III/1) Egytagú nevező ..... 21
III/2) Két- v. többtagú nevező – bővítés a konjugálttal ..... 21
IV. Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel ..... 22
IV/1) Gyökös kifejezések összegének négyzete ..... 22
IV/2) Ismerd föl a teljes négyzetet a gyök alatt! ..... 22
IV/3) Számológéppel kiszámolod, és négyzetre-emeléssel bizonyítod ..... 22
IV/4) Reciprok kifejezések ..... 23
IV/5) Egyéb négyzetgyökös példák. ..... 24

**Másodfok - D: az n-edik gyök ..... 25**
I. Definíciók, példák, azonosságok ..... 25
I/1) Bevezetés ..... 25
I/2) Definíciók ..... 25
I/3) Vegyük észre: úgy keressük a gyököt, hogy „leosztjuk a kitevőt” ..... 26
I/4) A gyökvonás azonosságai ..... 26
II. Az n-edik gyök fogalmának gyakorlása ..... 27
II/1) Milyen *a*-ra igaz? ..... 27
II/2) Emelj ki, amit lehet ..... 27
III. Műveletek gyökös kifejezésekkel ..... 28
III/1) Végezd el: érdemes prímtényezőket használni – amit lehet, emelj ki! ..... 28
III/2) Hozd egyszerűbb alakra, emelj ki, amit lehet! A változók pozitívok. ..... 29
III/3) Különböző kitevős gyökök összehasonlítása ..... 29
IV. Gyökös kifejezések átalakításai ..... 29
IV/1) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következőket: ..... 29
IV/2) Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket. Minden változó pozitív. ..... 30
IV/3) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket: ..... 30
IV/4) Végezzük el a következő műveleteket ..... 30
IV/5) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét *a változók megengedett értékei* mellett! ..... 31
IV/6) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét! A felhasználandó azonosság: ..... 32
IV/7) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket ..... 32

**Másodfok – E: Függvények ..... 34**
I. Általában a függvényekről ..... 34
I/1) Definíciók, alaptulajdonságok ..... 34
I/2) A bijektív függvények ..... 34
I/3) Másodfokú egyenletmegoldás – még megoldó képlet nélkül ..... 34
I/4) Függvény-jellemzés + definíciók, a jellemzés szempontjai ..... 35
I/5) Eddig tanult függvénytípusok ..... 37
II. Függvénytranszformációk ..... 38
II/1) A külső-belső fv. gyakorlása: ..... 38

szmg.hu

II/2) Az inverz függvény ..... 38
II/3) Függvényérték transzformáció ..... 39
II/4) A független változó trafói – argumentum-transzformáció ..... 40
III. Az elsőfokú törtfüggvények ..... 41
III/1) Általános alakjuk ..... 41
III/2) Fölépítésük az alapfüggvényből ..... 41
IV. A másodfokú fv. grafikonjának, a parabolának a trafói ..... 46
IV/1) A parabola definíciója, jellemzői ..... 46
IV/2) Az alapfüggvény és transzformációi ..... 46
V. A gyökfüggvények ..... 49
V/1) Az inverz függvény (ld. Másodfok – E/II/2.) ..... 49
V/2) A négyzetgyök függvény és transzformációja (ábr. jell.) ..... 49
V/3) Egyéb hatványfüggvények és inverzeik ..... 52
V/4) Gyakorlás ..... 53

**Másodfok – F: Egyenletek - egyenlőtlenségek megoldási módszerei ..... 54**
I. Egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei ..... 54
I/1) Amire mindig figyelünk ..... 54
I/2) Gyakorlás ..... 54
I/3) Egyismeretlenes egyenletek ..... 55
I/4) Egyenletrendszerek megoldása ..... 57
II. Egyenlőtlenségek megoldási módszere ..... 58
II/1) Mit szabad, mit nem szabad tenni, és az ekvivalencia ..... 58
II/2) Lineáris: hasonlóképp, mint az egyenletet, de figyelni kell és ki kell tenni az ekvivalencia jelet! ..... 58
II/3) A nem lineárisoknál a legjobb módszer ..... 58
III. A másodfokú függvény trafói – és a grafikus megoldás ..... 59
III/1) Ábrázoljuk a másodfokú függvényeket, adjuk meg a transzformációt ..... 59
III/2) Grafikus megoldás ..... 60
IV. Segédlet a szorzattáalakításokhoz – A Pascal háromszög illetve az azonos kitevők ..... 61
IV/1) Alapok ..... 61
IV/2) Azonos kitevők ..... 61
IV/3) Gyakorlásuk: ..... 61

**Másodfok – G: Általános megoldás és a másodfokú függvény ..... 62**
I. A megoldóképlet és a fv. transzformáció előkészítése ..... 62
I/1) A megoldóképlet levezetése, vagyis a paraméteres másodfokú egyenlet megoldása ..... 62
I/2) Példák – megoldóképlettel és megoldóképlet nélkül ..... 63
I/3) Gyakorlópéldák a másodfokú egyenletekhez ..... 64
I/4) Hiányos másodfokú egyenletek ..... 64
II. A szorzattá alakíthatóság és a gyöktényezős alak – és szorzattá alakítás. ..... 65
II/1) Emlékezzünk a megoldóképlet létrehozására ..... 65

szmg.hu

II/2) Gyakorlati alkalmazás ....66
III. Függvényvizsgálat: a függvény állása + szélsőérték .... 68
III/1) Adjuk meg az alábbi függvény szélsőértékhelyét és azon a helye a szélsőértékét! ....68
III/2) Másodfokú függvény szélsőértéke - általában ....68
III/3) Az $ax^2+bx+c$ – kifejezésnek maximuma v. minimuma van a főegyüttható előjele szerint ....69
III/4) Szélsőérték keresés: csakis transzformációval ....70
III/5) Szélsőérték feladatok....70

**Másodfok – H: Egyenletek – egyenletrendszerek - egyenlőtlenségek .... 74**
I. Másodfokra fokra visszavezethető egyenletek - 1. .... 74
I/1) Magasabb fokú polinom-egyenletek ....74
I/2) Egyenletek algebrai törtekből....74
I/3) Irracionális egyenletek – vigyázat a hamis gyökökkel! ....75
I/4) Fontos ötletek: új ismeretlenek bevezetése, teljes négyzet és összefüggések észrevétele....76
I/5) Szimmetrikus egyenletek....77
I/6) Egyéb ötletek ....77
II. Másodfokú egyenletrendszerek 1. – **általában behelyettesítéssel** .... 78
II/1) Bevezető ....78
II/2) Az állatorvosi ló....79
II/3) Ötletelni kell… ....80
III. Másodfokú egyenlőtlenségek 1. .... 80
III/1) Polinom-egyenlőtlenségek: ÁBRA; MI DERÜL KI A DISZKRIMINÁNSBÓL? ....80
III/2) Alappéldák ....81
III/3) Gyakorlás ....82
III/4) Egyenlőtlenségek algebrai törtekből: CÉL: SZORZATTÁALAKÍTÁS! ....83

**Másodfok – I: Paraméterek – Viète formulák – Paraméteres egyenlőtlenség, szélsőérték .... 85**
I. Paraméter 1. .... 85
I/1) Alap: a gyökök számát (is) firtató paraméteres egyenletek ....85
I/2) Kifejezés értékkészlet-vizsgálata paraméter segítségével:....89
II. Viete-formulák és DISZKRIMINÁNS +Másodfok - paraméter 2.... 89
II/1) Kétféle levezetés....89
II/2) Gyakorlás ....90
II/3) Egy egyenlet gyökei közti kapcsolatok....91
III. Egyenlőtlenség 2: Egyenlőtlenség és szélsőérték paraméterrel.... 94
III/1) Értelmezési tartomány keresés ....94
III/2) Paraméteres 2. fokú egyenlőtlenség $\forall\ x \in \mathbf{R}$-re igaz ....94
III/3) Gyökök egyéb függése a paramétertől:....95
III/4) Paraméter függése gyökök helyzetétől ....97

szmg.hu

**Másodfok – J: Egyenletrendszerek, szövegesek, egyéb feladatok ..... 98**
I. Egyenletrendszerek 2 ..... 98
I/1) Valamelyik egyenletben ∀ tag másodfokú: ..... 98
I/2) Egyéb ötletek ..... 99
II. Másodfokú szövegesek + másodfok a számelméletben, kombinatorikában, geometriában ..... 100
II/1) Egy ismeretlenes egyenlet ..... 100
II/2) Két v. több ismeretlenesek: 2. fokú egyenletrendszer ..... 101
II/3) Utazás ..... 102
II/4) Geometriai ..... 102

szmg.hu

szmg.hu

# Másodfok – A-B: Ismétlés - Merőleges affinitás; Algebra

## I. Merőleges affinitás

I/1) A merőleges affinitás – nem egybevágósági transzformáció – sőt, szögeket sem tart…

a) Def.: Adott egy $t \subset S$ és egy $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ekkor:

$t^{\lambda}(\ ): S \to S;\ P \mapsto P'$, ahol:

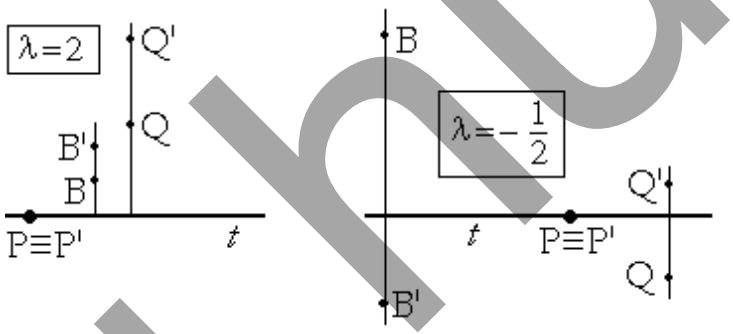
ha $P \in t \Rightarrow P' \equiv P$

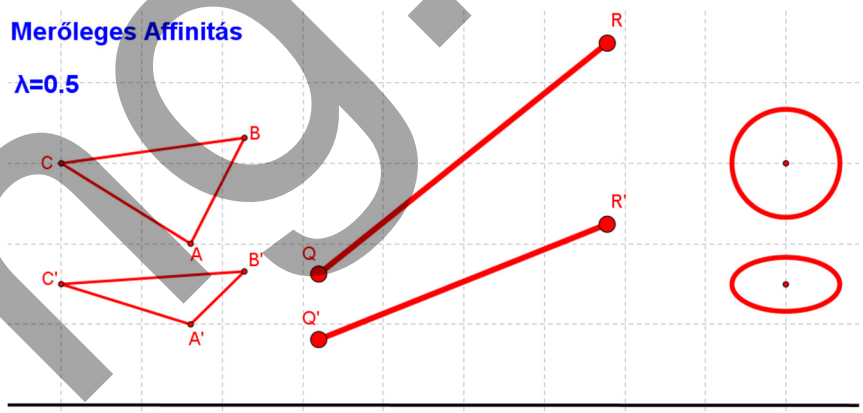
ha $P \notin t \Rightarrow P'P \perp t$, és $d(P'P \cap t; P') = |\lambda|\ d(P'P \cap t; P)$

és $\lambda < 0$ esetén t elválasztja PP' egyébként nem.

$\lambda = 1 \Rightarrow$ Identitás

$\lambda = -1 \Rightarrow$ Tengelyes tükrözés



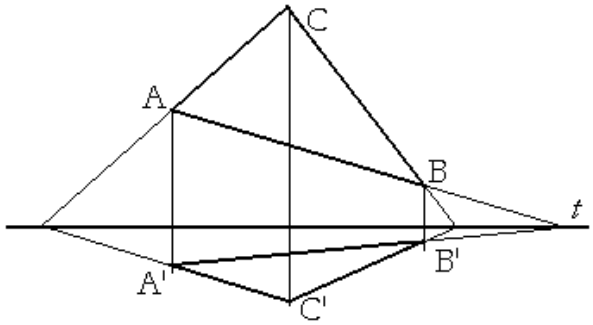




Tulajdonságai:

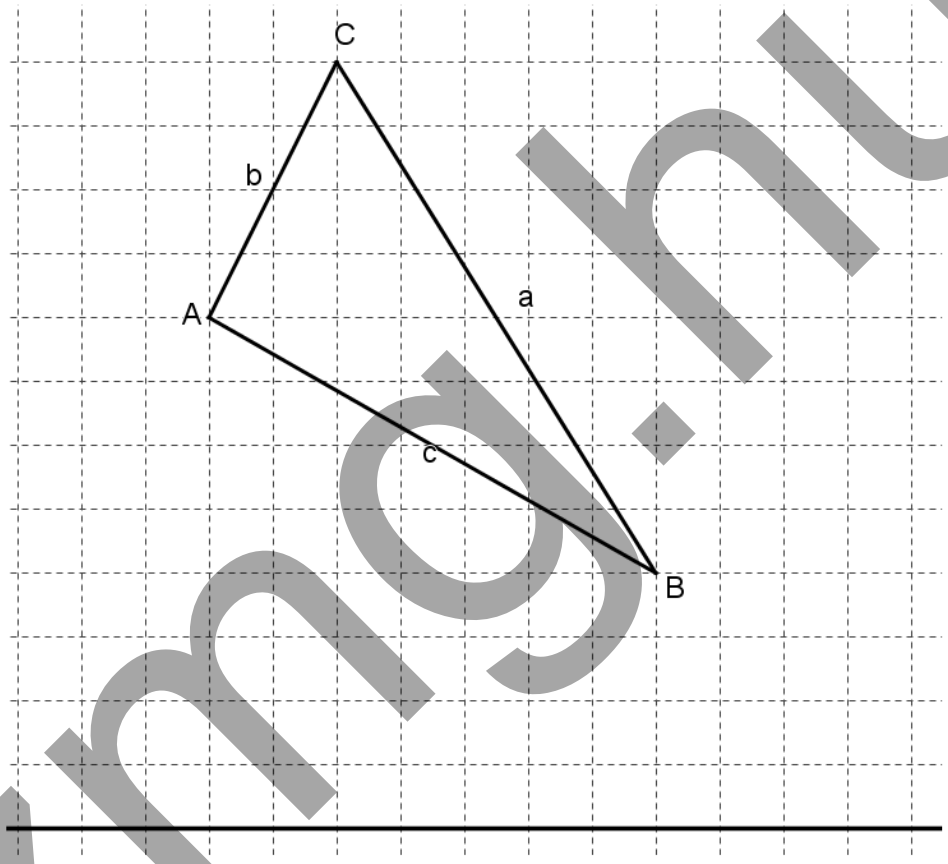
- Illeszkedéstartó
- Nem távolságtartó és nem is aránytartó, csak a párhuzamos (így egy egyenesre kerülőkét is) szakaszok hosszainak arányát tartja meg!
- Nem szögtartó, de párhuzamosokat párhuzamosokba visz.
  Hogy nem szögtartó: elég egy, a tengellyel nem párhuzamos és arra nem merőleges egyenes tengellyel bezárt szögét nézni.
- A körüljárástartás λ előjelétől függ: λ pozitív: megmarad; λ negatív: megfordítja.
- Általában nem szimmetrikus (λ=–1-nél igen, de az a tengelyes tükrözés)
- Injektív – azaz kölcsönösen egyértelmű (valójában bijektív is: a sík minden pontjához rendel képet, és a sík minden pontjának van ősképe)
- Az inverz függvénye: $t^{\frac{1}{\lambda}}(\ )$
- Fixegyenesek, invariáns egyenesek:
  Fixegyenes: ……..
  Invariáns egyenesek: ……
- Egyenes képe egyenes, kör képe ellipszis
- TERÜLETEK ARÁNYA: $T'/T = |\lambda|$

szmg.hu

I/2) Szerkesszünk ilyet!
Háromszög képe




$\lambda=1/2$




I/3) Mire jó?
Először is a függvénytranszformációk miatt nagyon fontos.
Egyéb haszna például: bizonyíthatón 2 merőleges affinitással minden háromszögből egyenlő-oldalú háromszög készíthető: sok „egy ponton áthaladó” feladat, illetve területekkel kapcsolatos feladat megoldható ennek segítségével.

szmg.hu

## II. Az egész kitevőjű hatványok ismétlése

II/1) Pozitív egész kitevőjű hatványok

Def: $a \in R$, $n \in N\setminus\{0;1\} \Rightarrow a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, ahol n db. tényező van.

Definíció szerint legyen: $a^1 = a$

II/2) Az egészkitevőjű hatványok

Permanencia elv: Ha egy logikai rendszerben új fogalmat, új definíciót vezetünk be, vagy a már meglévő definíciót bővítjük, akkor azt úgy szabad megtenni, hogy a korábbi definíciókból következő szabályok, tételek, összefüggések érvényesek maradjanak.

Def: $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ $n \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}$

Pl. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

II/3) Tételek: negatív kitevőre is működnek

- $a \in \mathbf{R} \Rightarrow a^1 := a$. Vagyis: Minden szám 1. hatványa legyen maga a szám.
- $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \Rightarrow a^0 := 1$. Vagyis bármely nem nulla szám nulladik hatványa: 1.
  A 0-nak csak pozitív természetes kitevőjű hatványa lehet, és az érték minden esetben 0.
- $a \in R\setminus\{0\}$, $k; n \in \mathbf{Z} \Rightarrow a^n \cdot a^k = a^{k+n}$ illetve $a^n : a^k = \dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$.

  Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.
  Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.
  $2^4 \cdot 2^{-7} = 2^{4+(-7)} = 2^{-3} = 0{,}125$ illetve $2^4 : 2^{-7} = 2^{4-(-7)} = 2^{11} = 2048$
- $a,b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$.

  Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezőket az eredeti hatványkitevőre emelve összeszorozzuk.
  $(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$ $(7 \cdot 10)^{-3} = 7^{-3} \cdot 10^{-3}$
  $(10)^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$ $(70)^{-3} = (2 \cdot 5 \cdot 7)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 7^{-3}$
  Azonos kitevőjű hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.
  $2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$ $2^{-3} \cdot 5^{-3} = (2 \cdot 5)^{-3} = 10^{-4} = 0{,}001$
- $a,b \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^k = \dfrac{a^k}{b^k}$.

  Törtet úgy hatványozunk, hogy a számlálót is és a nevezőt is az adott hatványkitevőre emeljük.
  Azonos kitevőjű hatványokat úgy osztunk, hogy az alapok hányadosát az adott kitevőre emeljük.

  Gyakorlás - Ne legyen se zárójel se tört:

  $\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 =$ $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-4} =$

- $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \wedge m,n \in \mathbf{Z} \Rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
  Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

szmg.hu

II/4) Gyakorlás – ne legyen se zárójel se tört

$\left(\frac{14^3}{7}\right)^3 =$

$\left(\frac{12^3}{12^{-5}}\right)^{-4} =$

$\frac{20^6}{10^6} =$

$\frac{5^{-7}}{5^{-8}} =$

$\left((36)^2\right)^5 =$

$\left((14)^{-3}\right)^{-4} =$

$\frac{1}{28^{-5}} =$

$\left(\frac{27}{16}\right)^{-5} =$

$\left(\left(\frac{40}{20^3}\right)^{-2}\right)^{-3} =$

$\left(\frac{81}{100}\right)^{-4} =$

$\left(\frac{18^{-1}}{27^{-3}}\right)^{-5} =$

$\left(\frac{18^{-1}}{27^{-3}}\right)^{-5} =$

$\left(\left(\frac{25\cdot 27}{-50^{-2}}\right)^{-4}\right)^{-3} =$

$\frac{98^{-2}\cdot 10^3}{21^{-3}\cdot 50^{-3}} =$

## III. Algebrai kifejezések – zárójelfelbontás – szorzattá alakítás

III/1) Zárójelfelbontás. Amit lehet, fejben!

$(a+b)^2=$ $(a-b)^2=$ $(7x+15)^2=$ $(13x^2-8x)^2=$

$(17x-11)(17x+11)=$ $(12x^2+7x)(1x^2-7x)=$

$(a+2b+3)^2=$ $(2x-3y-13)^2=$

$(2^{a-b})^{a+b}=$

$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) =$

$-2x(3x-2)^2-(2-5x)(2+5x)+(x+1)(x-2)(x+3) =$

Egyéb összefüggések – binomiális együtthatók ismeretében

$(a+b)^3=$ $(a-b)^3=$

$(x-1)^3=$ $(2x+1)^3=$

$(3x-2)^3=$ $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=$

$(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)=$

szmg.hu

III/2) Szorzattá alakítás

$-2x^2+12x-18=$

$-2a^2-4a-2=$

$36x^2-12x^3-27x=$

$50+18x^2-60x=$

$18x-3x^2-24=$

$5x^2-5x-60=$

$a^k-b^k=$

$a^{2k+1}+b^{2k+1}=$

$a^{2k}-b^{2k}=$

$a^3-b^3=$

$a^6-b^6=$

$x^3-8=$

$x^5+y^5=$

$27x^3+125=$

$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=$

$b^3-6b^2c+12bc^2-8c^3=$

Két nehéz alak:

$a^4+a^2+1=$

$a^4+4=$

## IV. Algebrai törtek

IV/1) Egyszerűsítsünk – szóban mondd meg az értelmezési tartományt

$$\frac{5ax}{-5ax^2}=$$

$$\frac{\frac{51}{3x-3}}{\frac{3}{2-2x}}=$$

$$\frac{8a^2-2b^2}{3b-6a}=$$

$$\frac{3a^2-3}{7a-7}=$$

$$\frac{12x-3x^2-12}{5x^2-20}=$$

$$\frac{4x^3y+4xy^3}{12x^4-12y^4}=$$

$$\frac{ax-by+bx-ay}{7x-7y}=$$

$$\frac{x^2-a^2+y^2+2xy}{x+a+y}=$$

$$\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}=$$

szmg.hu

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2+x}=$$

IV/2) Hozz közös nevezőre; majd, ha lehet, alakíts szorzattá és egyszerűsíts

$$\frac{5x-5}{10}+\frac{3x+6}{12}-\frac{12-6x}{15}=$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-3}+\frac{x^2-2x-1}{6-2x}=$$

$$\frac{3}{a+b}+\frac{3}{a-b}=$$

$$\frac{x^2+x}{x^3-x^2}-\frac{3x+3}{6x^2-6}=$$

$$\frac{3}{x-2}-\frac{2x+8}{x^2-4}=$$

$$\frac{5x}{2x^2-4x}-\frac{6x}{2x^2+4x}-\frac{12}{x^2-4}=$$

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+4}+\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x^2-4x+4}=$$

$$1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}=$$

IV/3) Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2-ax}{a^2}\cdot\frac{a}{x^2}=$$

$$\left(\frac{2ax}{yz}\div\frac{3bx}{ay}\right)\div\frac{9a^2b^2}{8xyz}=$$

$$\frac{7}{4x^3-36x}\cdot\frac{x^2-9}{14}=$$

$$\frac{15a^2-15b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{3a^3-6a^2b+3ab^2}=$$

$$\frac{ax+ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{2x^2-2y^2}{ax^2+2xay+ay^2}=$$

$$\frac{x^3+27}{4x+6}\cdot\frac{4x^2-9}{x^2+6x+9}=$$

szmg.hu

IV/4) Egyszerűsíts – illetve végezd el

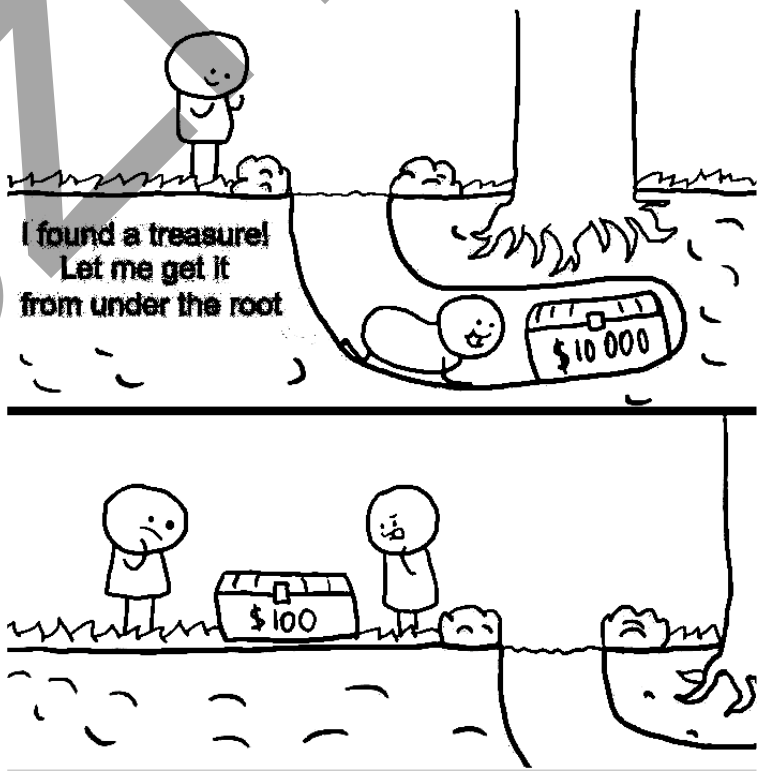
$$\frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=$$

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}=$$

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=$$

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right)\div\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=$$

$$\left(\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right)^2=$$




szmg.hu

# Másodfok – C: Négyzetgyök

## I. A négyzetgyök fogalma és a négyzetgyökvonás azonosságai

### I/1) Definíció

$a \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \sqrt{a} := c \in \mathbb{R}_0^+ \rightarrow c^2 = a$ (Bizonyítható, hogy a definíció egyértelmű.)

### I/2) Gyakorlása

a) Gyökök

$\sqrt{1} = 1$ mert $1^2 = 1$ $\qquad$ $\sqrt{64} =$ mert

$\sqrt{0{,}04} =$ mert $\qquad$ $\sqrt{\frac{25}{9}} =$ mert

$\sqrt{0} =$ mert $\qquad$ $\sqrt{-4}$

b) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

Vigyázat, ilyen szám már tényleg nincs a természetben. Még mondjuk 2/3 torta igen, de ez már tényleg bonyolult szám.

c) Műveletnek csakis egyféle eredménye lehet

$\sqrt{5^2} = 5$ $\sqrt{(-5)^2} = 5$ **!!!!!!!!!!!** $\sqrt{a^2} =$ **|a| !!!!!!!!!!!**

**Ugyanis: ha $\sqrt{4}$ =2 és $\sqrt{4}$ =–2, akkor 2$\sqrt{4}$ =0 stb.**

A gyökvonás műveletét gyakran és könnyen össze szoktuk keverni az $x^2=a$ egyenlet megoldásával ($a \geq 0$), ahol a megoldáshalmaz: $+\sqrt{a}$ és $-\sqrt{a}$.

„A négyzetgyökjel lefelezi a kitevőt”

$\sqrt{2^4} =$ $\qquad$ $\sqrt{a^8} =$ $\qquad$ $\sqrt{x^6} =$

d) A négyzetgyök argumentuma: értelmezési tartomány

K= $\sqrt{\frac{x+3}{5-2x}}$

H= $\sqrt{6-2x^2-x}$

Összefoglalva: Egyenlőtlenségeket kell megoldani, és a nevező nem lehet 0.

szmg.hu

e) Vigyázat: a négyzetgyök argumentuma is, értéke is nemnegatív szám!

$\sqrt{x^2-2x+1}=$ $\sqrt{25a^2}=$

$\sqrt{\left(10-6\sqrt{3}\right)^2}=$

I/3) Azonosságok - szorzás

*Áll.:* $a;b\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

Biz.: Mindkét oldal négyzete, felhasználva a szorzás kommutativitás- és asszociativitását!

FIGYELEM: GYÖKVESZTÉS LEHETŐSÉGE (pl. egyenletrendszernél)!

Pl.: $\sqrt{18}=$ !!!: $\sqrt{8\cdot c^6a^4b^7}=$ **!!!**

$\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}=$

(Persze rögtön prímek szorzatává is alakíthatjuk a gyökjel alatt szereplő számokat!)

$\sqrt{200}=$ Mindig ilyen legyen a végeredmény!

I/4) Azonosságok - osztás

a≥0; b>0 $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Biz.: Mindkét oldal négyzete, felhasználva a szorzás kommutativitás- és asszociativitását! FIGYELEM: GYÖKVESZTÉS LEHETŐSÉGE (pl. egyenletrendszernél)!

$\sqrt{\frac{121}{25}}=$ $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{12}}=$

$\sqrt{\frac{80a^3b^5}{9x^4}}=$ Kikötés!

I/5) Azonosságok - hatványozás

$a>0;\ n\in\mathbf{Z}\Rightarrow\sqrt{a^n}=\left(\sqrt{a}\right)^n$

Biz: n>0$\Rightarrow\sqrt{a^n}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^n$

n=0 ✓

n<0$\Rightarrow\sqrt{a^n}=\sqrt{\frac{1}{a^k}}$, ahol k=–n. $\sqrt{\frac{1}{a^k}}=\frac{1}{\sqrt{a^k}}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^k}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^{-n}}=\left(\sqrt{a}\right)^n$

pl.: $\sqrt{4^5}=\left(\sqrt{4}\right)^5=2^5$

$\left(\sqrt{23}\right)^3=$ $\sqrt{5^7}=$

szmg.hu

I/6) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből

a) Állítás: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

Biz: indirekt. Tfh. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p;q \in \mathbf{N}$ és $(p;q)=1$. $\Rightarrow 2q^2=p^2$

Ekkor: Ha $2 \mid p \Rightarrow (2^2 \mid p^2 \wedge 2 \nmid q$ (mert rel.pr.) ) de $4 \nmid$ baloldal ☠

Ha $2 \nmid p \Rightarrow 2 \nmid p^2 =$ De $2 \mid$ baloldal ☠

b) *Állítás: ha $r$ prím, $\sqrt{r} \notin \mathbf{Q}$

Biz: indirekt. Tfh. $\sqrt{r} = \frac{p}{q}$, ahol $p;q \in \mathbf{N}$ és $(p;q)=1$.

Stb.

c) Állítás: rac + rac = rac

Biz: $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$;

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Mivel a szorzás és összeadás nem vezet ki az egész számok köréből, ezért a számláló is egész, a nevező is egész, vagyis a tört racionális.

d) Állítás: rac + irrac = irrac

Biz.: Indirekt

Vagyis $\sqrt{6}+3$ irracionális. De lehet-e két irracionális összege, vagy szorzata racionális?

## II. Műveletek gyökös kifejezésekkel

II/1) Kiemelés

$\sqrt{63} =$ $\qquad$ $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98} =$

$\sqrt{18a^3 + 27a^2} =$

II/2) Bevitel

$3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} =$ $\qquad$ $4 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} =$ $\qquad$ $2 \cdot \sqrt{\frac{3a}{4} + \frac{1}{2}} =$

$2\sqrt{7} =$ $\qquad$ $-2\sqrt{7} =$

szmg.hu

II/3) Összevonások

$$5\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-\sqrt{48}=$$

II/4) Négyzetgyökös kifejezések szorzása

$\sqrt{30}\cdot\sqrt{20}=$ $\qquad$ $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{50x}=$

MAGYARÁZAT kell mindig, ha kellene, de mégsem kell abszolútérték jel!

Végezd el a változók megengedett értékei mellett:

$$\sqrt{\frac{3a^3+3b^3}{a-b}}\sqrt{\frac{12a^2-12b^2}{a^2-ab+b^2}}=$$

II/5) Végezd el a műveletet, és írd föl a legegyszerűbb alakban a következő számok számértékét!

$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=$ $\qquad$ $\left(6-2\sqrt{3}\right)^2=$

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=$$

$$\left(3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}\right)\left(3\cdot\sqrt{8}+4\cdot\sqrt{3}\right)=$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{18}-\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{2}}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt{13-\sqrt{48}}+\sqrt{13+\sqrt{48}}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=$$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=$ $\qquad$ $\Rightarrow\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}=$

VIGYÁZAT: Hibalehetőség: $\left|\sqrt{3}-2\right|=\left(2-\sqrt{3}\right)$

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=$$

$$\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b}\right)=$$

$$\sqrt{a+2b-2\sqrt{2ab}}\sqrt{a+2b+2\sqrt{2ab}}=$$

szmg.hu

II/6) Négyzetgyökös kifejezések osztása

$\frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} =$

II/7) Szorzattá alakítás, egyszerűsítés

Alakítsd szorzattá: $\sqrt{14} + \sqrt{6} =$

$\sqrt{ab} - \sqrt{ac} =$

b–c=

$a + b - 2\sqrt{ab} =$

$x + \sqrt{x} - 6 =$

Hozd egyszerűbb alakra:

$\sqrt{\frac{x}{y} - 1} \div \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1} =$

$\frac{\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right)}{\sqrt{ab}} =$

II/8) Négyzetgyökös kifejezések hatványozása

$\left(\sqrt{3}\right)^5 =$

$\left(-\sqrt{5}\right)^3 =$

$\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 =$

$\left(3\sqrt{6} - 2\right)^3 =$

$\left(\sqrt{12} - \sqrt{18}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 =$

$\left(\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{\sqrt{40} - \sqrt{15}} + \sqrt{\sqrt{40} + \sqrt{15}}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{a^3}\right)^3 =$

$\left(-\sqrt{a^3 b^2}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{a}\right)^2 =$

$\left(\frac{y + \sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{y - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 =$

szmg.hu

## III. A nevező gyöktelenítése: az egyik legfontosabb művelet a gyökös kifejezéseknél

### III/1) Egytagú nevező

Gyöktelenítsük a tört nevezőjét a változók lehetséges értéke mellett!

$\frac{3}{\sqrt{2}}=$ $\frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=$ $\frac{x}{\sqrt{y}}=$ $\frac{x^2}{\sqrt{xy}}=$

$\sqrt{0,2}=$ $\frac{2}{\sqrt{6x-6y}}=$

$\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}=$ $\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{5}}=$

$\frac{6\sqrt{6}+6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=$

$\frac{10}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=$ $\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$

### III/2) Két- v. többtagú nevező – bővítés a konjugálttal

Gyöktelenítsük a tört nevezőjét a változók lehetséges értéke mellett!

$\frac{5}{2-\sqrt{3}}=$ $\frac{2}{2+\sqrt{2}}=$

$\frac{1-2\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}=$ $\frac{\sqrt{8}-3\sqrt{3}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=$

$\frac{4}{3\sqrt{2c}-6}=$ $\frac{a}{a+\sqrt{a}}=$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=$ $\frac{\sqrt{3+\sqrt{a}}}{\sqrt{3-\sqrt{a}}}=$

$\frac{\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=$

$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=$

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}=$

szmg.hu

Általában: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=$

## IV. Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

IV/1) Gyökös kifejezések összegének négyzete

$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=$

$\left(\sqrt{5}+2\right)^2=$

$\left(2\sqrt{3}-1\right)^2=$

$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=$

$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=$

IV/2) Ismerd föl a teljes négyzetet a gyök alatt!

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=$

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}=$

$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$

$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}=$

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$

IV/3) Számológéppel kiszámolod, és négyzetre-emeléssel bizonyítod

Vagy rájössz… Vagy egyenletként megoldod…

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=x\Leftrightarrow$

Vagy észreveszed:

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$

$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=$

szmg.hu

Számold ki, mennyi: $\sqrt{23+4\sqrt{15}}+\sqrt{23-4\sqrt{15}}$

IV/4) Reciprok kifejezések

Adott a következő számkör: Z[ $\sqrt{3}$ ] vagyis az a+b $\sqrt{3}$ alakú számok, melyeknél az *a* és *b* egész. (Ezek kevesen vannak, pont annyian, mint a természetesek)

Mutassuk meg, hogy az ilyen alakú számok összege, szorzása nem vezet ki ebből a körből!

Mutasd meg, hogy az a+b $\sqrt{3}$ vagyis alakú számoknál 2+ $\sqrt{3}$ -mal mindent el lehet osztani!

Pl.: A 2+ $\sqrt{3}$ osztja a 5+7 $\sqrt{3}$ -at, mert van olyan a+b $\sqrt{3}$ alakú szám mellyel megszorozva a $2+\sqrt{3}$ -at 5+7 $\sqrt{3}$ -at kapunk.

Biz.:

Így persze minden a+b $\sqrt{3}$ alakút el tudok vele osztani: vagyis „egység”

Ső a $(2+\sqrt{3})^k$ és $(2-\sqrt{3})^n$ is mindennek osztója: „egység”

Vagyis nagyon fontosak a „reciprokok” a gyökös kifejezéseknél.

szmg.hu

IV/5) Egyéb négyzetgyökös példák.

Melyik a nagyobb: $\sqrt{7}+\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{8}+\sqrt{2}$

Végezd el: $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\sqrt{\sqrt{3}+2}=$

Oldd meg: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9$

szmg.hu

# Másodfok - D: az n-edik gyök

## I. Definíciók, példák, azonosságok

### I/1) Bevezetés

$5^3=$ $(-5)^3=$ $2^4=$ $(-2)^4=$ $3^5=$ $(-3)^5=$

Mit kell köbre emelni, hogy a következő számot kapjuk:

$8 \leftrightarrow$ $64 \leftrightarrow$ $343 \leftrightarrow$ $-125 \leftrightarrow$ $216 \leftrightarrow$ $-512$

Mit kell 5. hatványra emelni, hogy a következő számot kapjuk:

$-1 \leftrightarrow$ $234 \leftrightarrow$ $1024 \leftrightarrow$ $10^5 \leftrightarrow$ $2^{30} \leftrightarrow$

### I/2) Definíciók

Def.: A gyökkitevő ps szám: $k \in \mathbf{N}^+$ és $a \in R_0^+ \Rightarrow \sqrt[2k]{a} := c \rightarrow c \in R_0^+$ és $c^{2k}=a$.

Def.: A gyökkitevő pt szám: $k \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow \sqrt[2k+1]{a} := c \rightarrow c^{2k+1}=a$.

A definíciók miatt:

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, pl: $\sqrt[10]{(-2)^{10}} = |-2| = 2$

$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, pl: $\sqrt[9]{(-2)^9} = -2$

Példák:

$\sqrt[6]{64} = 2$ mert $2 \in R_0^+$ és $2^6=64$ $\sqrt[4]{625} =$ mert …

$\sqrt[12]{a^{12}} = |a|$, mert $|a| \in R_0^+$ és $|a|^{12}=a^{12}$

$\sqrt[3]{125} =$ mert $\sqrt[3]{-125} =$ mert

$\sqrt[3]{a^3} =$

$\sqrt[3]{512} =$ $\sqrt[4]{256} =$ $\sqrt[3]{3^6} =$ $\sqrt[7]{-10^{28}} =$

$\sqrt[7]{(-10)^{28}} =$ $\sqrt[14]{-10^{28}} =$ $\sqrt[14]{(-10)^{28}} =$ $\sqrt[4]{-10^{28}} =$

$\sqrt[4]{(-10)^{28}} =$ $\sqrt[3]{a^3} =$ $\sqrt[3]{a^6} =$ $\sqrt[3]{a^{15}} =$

$\sqrt[3]{-a^3} =$ $\sqrt[3]{-a^6} =$ $\sqrt[3]{-a^{15}} =$ $\sqrt[3]{(-a)^3} =$

$\sqrt[3]{(-a)^6} =$ $\sqrt[3]{(-a)^{15}} =$ $\sqrt[6]{a^{12}} =$ $\sqrt[6]{a^{18}} =$

$\sqrt[6]{a^{24}}$ $\sqrt[6]{-a^{12}}$ $\sqrt[6]{-a^{18}}$ $\sqrt[6]{-a^{24}}$

$\sqrt[6]{(-a)^{12}} =$ $\sqrt[6]{(-a)^{18}} =$ $\sqrt[6]{(-a)^{24}} =$

szmg.hu

I/3) Vegyük észre: úgy keressük a gyököt, hogy „leosztjuk a kitevőt”

$\sqrt[3]{2^{15}}$ =? Azt a számot keressük, amelyet 3. hatványra emelve $2^{15}$-t kapunk. Vagyis azt a számot keressük, amelyet 3-mal szorozva 15-öt kapunk.

(Ez a kérdés vezeti be valójában az osztás fogalmát!)

$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$ $\sqrt[5]{-0,00001} =$ $\sqrt[13]{0} =$ $\sqrt[3]{5^{3^7}} =$

I/4) A gyökvonás azonosságai

A következőkben ha $n$ páros, akkor $a;b \in R_0^+$; egyébként $a;b$ valósak, és ha $b$ nevezőben van, akkor $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ Biz.: Mindkét oldal $n$-edik hatványa, felhasználva a szorzás kommutativitását és asszociativitását!

FIGYELEM: GYÖKVESZTÉS LEHETŐSÉGE: Hiszen páros kitevő esetén a jobb oldalnál $a$ és $b$ egyszerre lehet negatív is!

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ Biz.:

FIGYELEM: GYÖKVESZTÉS LEHETŐSÉGE!

$a \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

Biz.: ugyanúgy, mint a négyzetgyöknél!

FIGYELEM: GYÖKVESZTÉS LEHETŐSÉGE (pl.: a<0, k=ps, n=ps)

Áll.: $n;k \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ (Nyilván így: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$ )

Biz.: $\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a \Rightarrow \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = a \Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

pl.: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} = \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{\sqrt[6]{a^6}} = \sqrt{|a|}$

$\sqrt[12]{5^8} =$ $\sqrt[10]{\sqrt[9]{x^{15}}} =$

szmg.hu

Közös gyökkitevő: a gyökkitevő bővítése-egyszerűsítése: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$

VIGYÁZZUNK AZ ELŐJELEKKEL!

Ez sokszor visszafelé jó: $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[3\cdot 2]{5^3}=\sqrt[2]{5}$

Vagyis: a gyök és a hatványkitevő egyszerűsíthető és bővíthető, csak: a fránya „előjelek”! Azokra kell vigyázni!

$\sqrt[n\cdot k]{x^{n\cdot m}}=$

$\sqrt[28]{(-3)^{20}}\neq\sqrt[7]{(-3)^5}$, hanem: $\sqrt[28]{(-3)^{20}}=\sqrt[7]{3^5}$

(Valójában 4-edik gyökvonás volt!)

VAGYIS: $\sqrt[2k]{x^{2n}}=\sqrt[k]{|x|^n}$

Közös gyökkitevő: Különböző gyökök szorzása:

$\sqrt[n]{a}\sqrt[k]{b}=\sqrt[nk]{a^k}\sqrt[nk]{b^n}=\sqrt[nk]{a^k b^n}$

Pl: $\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[10]{5^3}=$ $\qquad$ $\sqrt[15]{7^8}\cdot\sqrt[12]{7^2}=$

$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ DE: VIGYÁZZUNK AZ ELŐJELEKKEL!

## II. Az n-edik gyök fogalmának gyakorlása

II/1) Milyen *a*-ra igaz?

$\sqrt[6]{a^6}=-a$

II/2) Emelj ki, amit lehet

$\sqrt[3]{2500}=$ $\qquad$ $\sqrt[3]{25000}=$

$\sqrt[5]{320a^5b^{10}}=$ $\qquad$ $\sqrt[4]{8a^4b^8c^7d^9}=$

$\sqrt[n]{x^n}=$ vigyázat: *n* ps v. pt. Vagyis általában: $\sqrt[n]{x^n}=\mathrm{sgn}(x^n)|x|$

Az alapok legyenek most pozitívak:

$\sqrt[n]{2^{n+3}a^nc^{3n+2}}=$

$\sqrt[k-3]{a^{2k-5}4^{k-4}}=$

Emelj ki, vonj össze (x pozitív):

$\sqrt[3]{27x^5}-\sqrt[3]{8x^2}+\sqrt[3]{343x^8}=$

szmg.hu

Vigyük be a gyökjel alá.

$-7\cdot\sqrt[3]{9}=$

$-\frac{1}{5}\sqrt[4]{125}=$

Melyik a nagyobb $3\cdot\sqrt[3]{5}$ vagy $2\cdot\sqrt[3]{17}$

Gondok az előjelekkel:

$-3\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{3^4\cdot 2}$

$a\sqrt[8]{a^3b}=\text{sgn}(a)\sqrt[8]{a^{11}b}$ mert: $a$ lehet negatív, ha $b$ is az.

$a\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a^7}$ ugyanis: $a^3$ úgysem lehet negatív. Vagyis inkább érdemes mindig átgondolni az előjeleket!

$-2a^2\cdot\sqrt[5]{a^2}=$

$x\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$

$a\cdot\sqrt[n]{1}=\text{sgn}(a)\cdot\sqrt[n]{|a|^n}$

$a\cdot\sqrt[n]{a}=$

## III. Műveletek gyökös kifejezésekkel.

III/1) Végezd el: érdemes prímtényezőket használni – amit lehet, emelj ki!

$\sqrt[3]{8\cdot 27}=$

$\sqrt[4]{108\cdot 24}=$

$\sqrt[5]{-48\cdot 405}=$

$\sqrt[6]{(-2)^9\cdot(-2)^7}=$

$\sqrt[4]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[4]{9-\sqrt{17}}=$

$\sqrt[3]{-18a^2}\cdot\sqrt[3]{(-6a)^2}=$

$\sqrt[5]{\frac{(27a^4)^2}{b^7}}\cdot\sqrt[5]{\frac{12b}{a^2}}=$

$\sqrt[4]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x^3+x^2+x+1}=$

$\sqrt[5]{(96a)^7}\div\sqrt[5]{9a^2}=$

$\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}=$

szmg.hu

III/2) Hozd egyszerűbb alakra, emelj ki, amit lehet! A változók pozitívok.

$\left(\sqrt[3]{7}\right)^4 =$ $\left(\sqrt[4]{2}\right)^8 =$ $\left(\sqrt[4]{8a^{-6}}\right)^3 =$

$\left(\sqrt[5]{125x^3}\right)^4 =$ $\left(\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{y^5}{x^5}}\right)^7 =$

$\left(\sqrt[k]{x}\right)^{k+3} =$ $\left(\sqrt[3k]{2^k}\right)^6 =$

$\left(\sqrt[3k]{2^k}\right)^7 =$ $\left(\sqrt[4k+3]{8^{k+3}}\right)^5 =$

$\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1\right)\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) =$

$\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right) =$

$a - 32 = \left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{32}\right)\cdot($ $)$

III/3) Különböző kitevős gyökök összehasonlítása

Melyik a nagyobb? $2\cdot\sqrt[3]{5}$ vagy $\sqrt{12}$

Két ötlet – nyilván hasonlók:

## IV. Gyökös kifejezések átalakításai

IV/1) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következőket:

Vigyázat, ahol nincs kiírva a gyökkitevő, az automatikusan „2.” gyök!

Minta: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[4]{2}$

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{8b^3c^6}} =$ $\sqrt[3]{2\sqrt{27}} =$

$\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{2}}} =$ $\sqrt{b\cdot\sqrt[5]{b^4\cdot\sqrt[6]{b^7}}} =$

$\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[4]{a^9}} =$ $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^3}} =$

$\sqrt[14]{(-2)^{18}\sqrt[7]{(-2)^{14}}} =$

szmg.hu

IV/2) Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket. Minden változó pozitív.

Minta: $\sqrt[10]{32^2} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[5]{1024} =$

$\sqrt[6]{2^9} =$

$\sqrt[15]{7^{10}3^{20}} =$

$\sqrt[12]{8^{30}} =$

$\sqrt[6]{8^5 a^9 b^{15}} =$

$\sqrt[20]{1024^3 c^{10} b^{120}} =$

IV/3) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} =$

$\sqrt[6]{5}\sqrt[4]{5^3} =$

VIGYÁZAT: A LEGJOBB KÖZÖS KITEVŐ NEM MINDIG A SZORZAT, HANEM A **LKKT**. HA SZORZATOT VESZEK, AKKOR UTÁNA LEHET KISEBB KIETVŐJŰ GYÖKKEL DOLGOZNI!

$\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^3} =$

$\sqrt[10]{8^3} \cdot \sqrt[6]{4^2} =$

$\sqrt[3]{4a^2}\sqrt[6]{16a^5} =$

$\sqrt[4]{x^3}\sqrt[6]{x^4} =$

$\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} =$

$\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^2}}\sqrt{\frac{y}{x}} =$

$\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^4}}\sqrt[15]{\frac{b^2}{a^7}} =$

$\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3} =$

$\sqrt[10]{\frac{\left(27a^4\right)^2}{b^7}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b}{12a^3}} =$

$\sqrt[4]{5}\sqrt[6]{5}\sqrt[9]{5^4} =$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\sqrt[6]{b} =$

$\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\sqrt[16]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^{20}]{2} =$

IV/4) Végezzük el a következő műveleteket

$\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{9} + \sqrt[4]{27}\right)\sqrt{3} =$

$\left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}\right) =$

szmg.hu

$$\sqrt[3]{10-\sqrt{92}}\cdot\sqrt[3]{10+\sqrt{92}}=$$

$$\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{27}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^4=$$

$$\frac{\sqrt[6]{8a^5}}{\sqrt[9]{12a^7}}=$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\div\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}}=$$

IV/5) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét *a változók megengedett értékei* mellett!

Érdemes kanonikus alakot nézni!

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}}=$$

$$\frac{6}{\sqrt[5]{2^3\cdot 3^2}}=$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^4}}=$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{72}}=$$

$$\frac{12}{\sqrt[4]{54}}=$$

$$\frac{10}{\sqrt[4]{600}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^2}}=$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}=$$

$$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a-b}}=$$

$$\frac{a-b}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}=$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a-b}}=$$

$$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}=$$

Hasznos először egy gyökjelet használni

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[4]{7\cdot\sqrt[3]{7}}}=$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[4]{3}}}=$$

$$\frac{14a}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}}=$$

$$\frac{14a}{\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[4]{a^3}}}=$$

$$\frac{a^2b}{\sqrt[3]{ab\cdot\sqrt[6]{ab^2}}}=$$

szmg.hu

IV/6) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét! A felhasználandó azonosság:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}+1}=$$

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}=$$

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=$$

$$\frac{a^2-4}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}=$$

$$\frac{34}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[2]{2}}=$$

Egy lépés, vagy két lépés: (a–b)(a+b) ; Másik: $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})$

$$\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}=$$

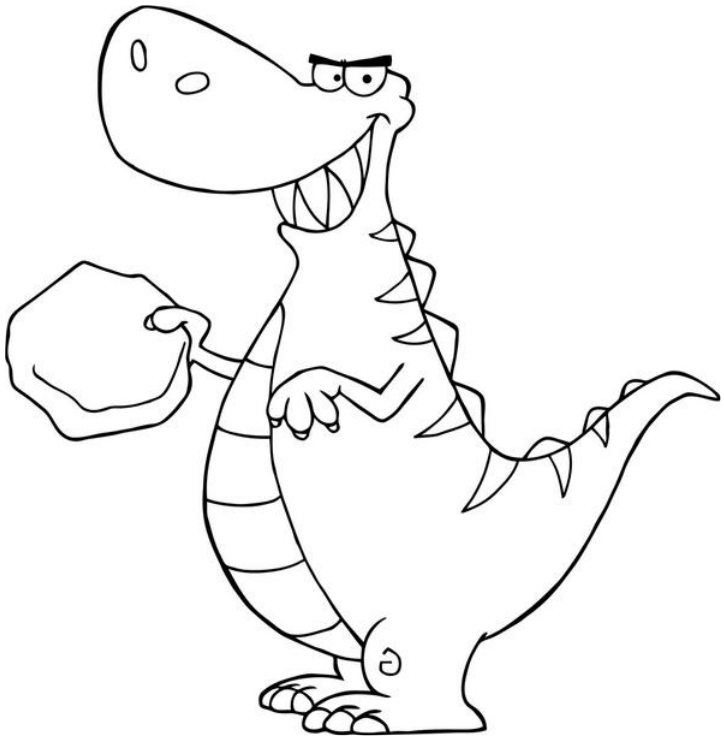
$$\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}=$$

IV/7) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket

$$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{\sqrt{bx}+3}=$$

szmg.hu

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right)\cdot\frac{a+b}{a\cdot\sqrt[3]{a}+b\cdot\sqrt[3]{2b}+b\cdot\sqrt[3]{a}+a\cdot\sqrt[3]{2b}}=$$



szmg.hu

# Másodfok – E: Függvények

## I. Általában a függvényekről

### I/1) Definíciók, alaptulajdonságok

Adott két nem üres halmaz, H és K. Ha a H halmaz (minden egyes/bizonyos) eleméhez/elemeihez hozzárendeljük a K halmaz egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezzük.

D, R. Figyelem, sok esetben úgy adjuk meg a fv-t, hogy a H≠D, vagyis az alaphalmaz nem az értelmezési tartomány – lehet bővebb, vagy szűkebb!

Megadásuk:

pl.: f( ):**R**→**N**; x ↦[x];  g( ): **R**\{0}→**R**; y=1/x

Két függvény egyenlősége: …$f$( )= $g$( ) ha $D_f=D_g$ és ∀x∈ $D_f$ ⇒ $f(x)=g(x)$

### I/2) A bijektív függvények

**Injektív** fv.: …egy $f$ függvény injektív (**kölcsönösen egyértelmű**),

ha $x;y\in D_f$ és $f(x)=f(y) \Rightarrow (\Leftrightarrow)\ x=y$

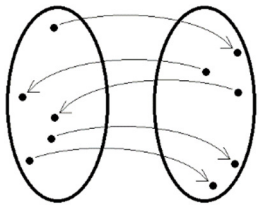
Vagyis bármely értékkészletbeli elemnek egyértelműen létezik ősképe. Vagy úgy is mondhatjuk, hogy különböző elemek képe különböző.

Nekünk gimnáziumban ez a tulajdonság a fontos!

**Szürjektív** fv.: … egy $f$ függvény szürjektív (szuperjektív), ha a képhalmaz ≡ $R_f$, vagyis a képhalmaz bármely elemének létezik ősképe.

Pl.: $f$( ): **R**→**R**; $y=x^2$. Illetve: Pl.: $f$( ): **R**→$\mathbf{R}^+_0$; $y=x^2$.

**… egy *f* függvény bijektív, ha injektív és szürjektív.**



### I/3) Másodfokú egyenletmegoldás – még megoldó képlet nélkül

$6x^2+10x-14=0$  $2x^2-6x+3=0$

$-4x^2+12x-17=0$

szmg.hu

I/4) Függvény-jellemzés + definíciók, a jellemzés szempontjai
Itt most le vannak írva. Az első használatuk után tudni kell őket.

a) Értelmezési tartomány - $D_{fv}$. (D=Domain)

Itt a kikötések fontosak: pl.: $y=\frac{x+3}{2x-1}$ esetén: $x\neq ½$ – (egyenletmegoldás)

Vagy: $y=\sqrt{2x-1}$ esetén: $D_f=[0,5\ ;\infty[$ – (egyenlőtlenség megoldás)

b) Zérushelyek – (általában egyenletmegoldás)

c) Periodicitás:

Def.: … f( ) fv. periodikus, ha létezik olyan $p\in \mathbf{R}\setminus\{0\} \rightarrow x\in D_f \Longrightarrow x+p\in D_f$ és $f(x+p)=f(x)$.

Van olyan definíció, ahol: $x+p\in D_f$ és $x-p\in D_f$

(Fontos tudni, hogy van olyan definíció, ahol a periódus csak pozitív lehet.)

A definícióból következik, hogy ha egy függvény *p*-re periodikus, akkor végtelen sok periódusa van: $1\cdot p$; $2\cdot p$; stb. **Ha ∃ legkisebb pozitív periódus, akkor az az alapperiódus**. Láttunk már ilyen függvényt: törtrészfüggvény.

d) Menet (lineárisnál a meredekség a táblázat mellé)

… f( ) fv. *szigorúan monoton nő*, ha $\forall\ x_1,x_2\in D_f$ esetén ha $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
… f( ) fv. *monoton csökken*, ha $\forall\ x_1,x_2\in D_f$ esetén ha $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

Minimum, maximum hely és érték $\Rightarrow$ (R: értékkészlet korlátai)
… $x_0\in D_f$ az *f*( ) fv. (abszolút) maximum helye, ha $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$
Ekkor $x_0$ az (abszolút) maximumhely, $f(x_0)$ az (abszolút) maximumérték.

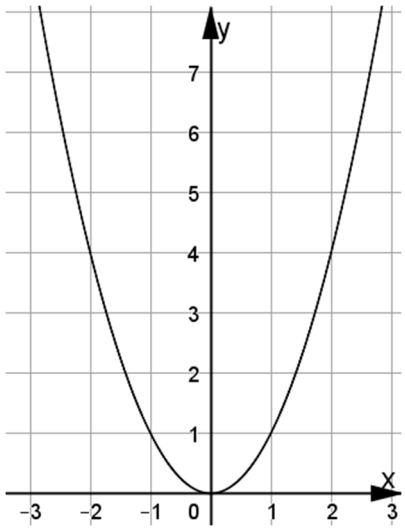
Helyi (lokális) minimum/maximum:
… $x_0\in D_f$ az *f*( ) fv. egy lokális maximum helye, ha
$\exists k_\delta(x_0) \rightarrow \forall x\in D_f\cap k_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$

Korlátosság
… f fv. felülről (alulról) korlátos, ha $\exists\ K\in \mathbf{R} \rightarrow \forall\ x\in D_f$ esetén $f(x)\leq (\geq)K$
… f fv. korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos
(… f fv. korlátos, ha $\exists\ K\in \mathbf{R} \rightarrow \forall\ x\in D_f$ esetén $|f(x)|\leq K$

e) Paritás

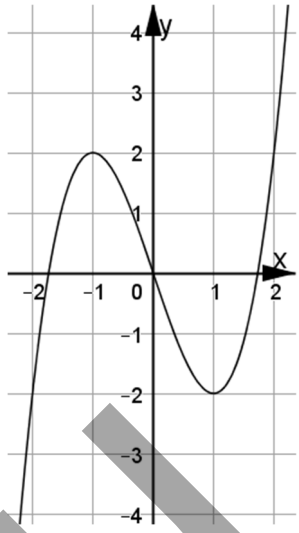
… *f*( ) fv. páros, ha $\forall\ x\in D_f$ esetén $-x\in D_f$, és $f(x)=f(-x)$
pl.: $f(\ ):\mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}$; $y=x^2$ :
Nyilván páros: $4^2=(-4)^2$. Vagy: $y=5x^6-4x^2-11$.
Vegyük észre, a páros kitevőről kapta a típus a nevét:
$x^4$ fv, v. az $x^6$ fv. is ilyen.
Vegyük észre: ez a típusú fv. grafikonja tükrös az ordinátára:

A P(x;f(x)) tükörképe az ordinátára: P(–x; f(–x))




szmg.hu

… $f(\ )$ fv. páratlan, ha $\forall\ x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ , és $f(-x)=-f(-x)$
pl.: $f(\ ):R \to R$; $y=x^3$
Nyilván páratlan: $4^3=-(-4)^3$ . Vagy: $x^3-3x$ (jobbra)
Vegyük észre, a páratlan kitevőről kapta a típus a nevét:
$x^1$ fv, v. az $x^5$ fv. is ilyen.
Vegyük észre: ez a típusú fv. tükrös az origóra.




f) Injektivitás: … $f(\ )$ injektív, ha $\forall\ x_1;x_2 \in D_f \wedge f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

g) Szürjektivitás: … $f(\ ):A \to B$ fv. szürjektív,
ha bármely $b \in B \implies \exists a \in A \to f(a)=b$ (Vagyis minden képbeli halmaznak van ősképe)

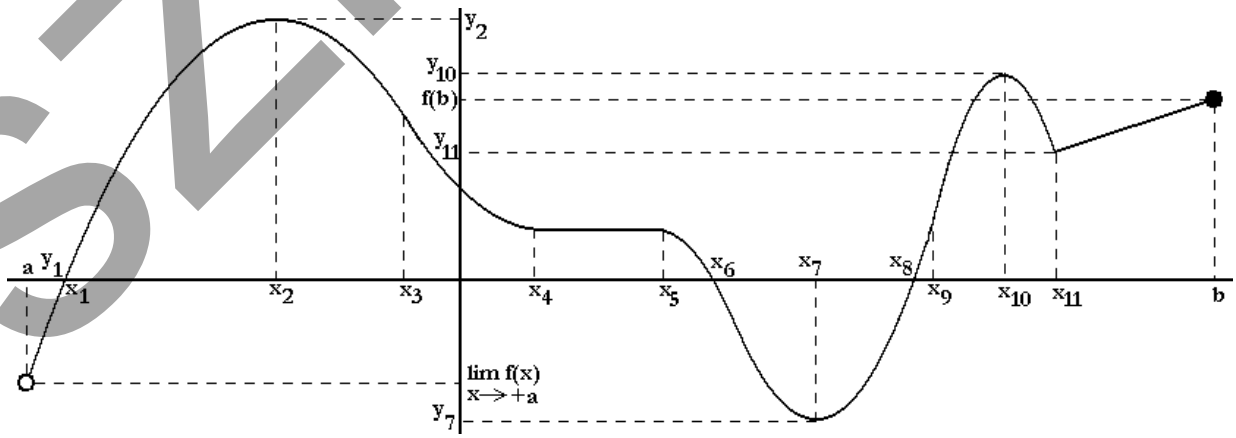
h) Szimmetricitás: … $f(\ )$ szimmetrikus,
ha $\forall\ x \in Df \Rightarrow f(x) \in D_f$ és $f(f(x))=x$.
Mondj szimmetrikus geometriai trafót.
Adj meg néhány szimmetrikus fv-t!

i) Fixpont

Mi volt egy tengelyes tükrözésnél a fixpont?
Függvénynél fixpont: adott egy $f(\ )$ fv. … $x \in D_f$ fixpont, ha $f(x)=x$.

Keressük ki az $y=x^2-x-3$ hozzárendelésű fv. fixpontját!
Vegyük észre: a fixpont-keresés: egyenletmegoldás!

j) Grafikonról a tulajdonságok




szmg.hu

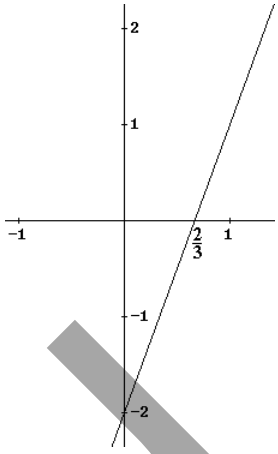
I/5) Eddig tanult függvénytípusok

a) Lineáris és konstans:

elsőfokú: $a \neq 0$, $f(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto ax+b$ pl: $f(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $y=3x-2$

$D_{f(\ )}=\mathbf{R}$

ZH: $x=2/3$




y=3x-2

| ]-∞;2/3 ; [ | ZH: [2/3] | ]2/3 ; ∞[ |
|---|---|---|
| – | 0 | ⊕ |
| Szig. mon. nő ↗ m=3 | | |

Injektív

$R_f=\mathbf{R}$

b) Az intervallumonként lineáris v. lineárissá tehető fv-ek

Szignum

Egészrész

Törtrész: periodikus

Abszolútérték fv.: abs( ): $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $y=\mathrm{sgn}(x) \cdot x$

Például:

$f(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $y=|3-x| - 2|x+1|$

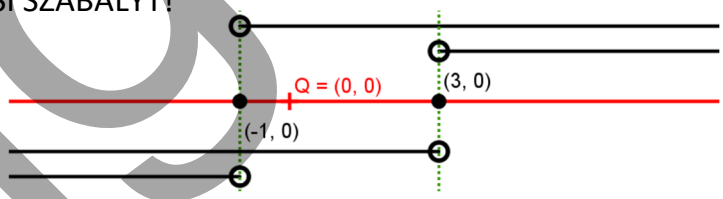
$D_{f(\ )}=\mathbf{R}$

MIELŐTT BÁRMIT TENNÉNK:

ÁTALAKÍTJUK A HOZZÁRENDELÉSI SZABÁLYT!

y =

Előjel grafikon:

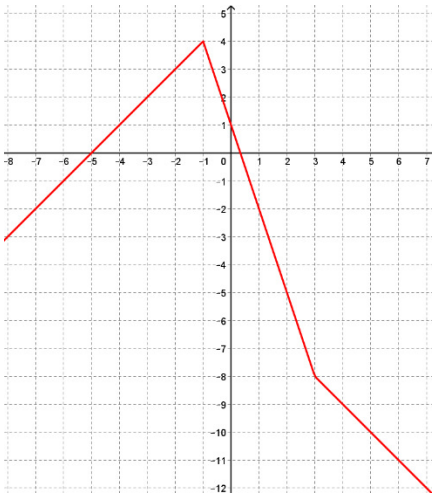



I. II. III.

f|]−∞;−1[:

f|[−1;3[:

f|[3;∞[:



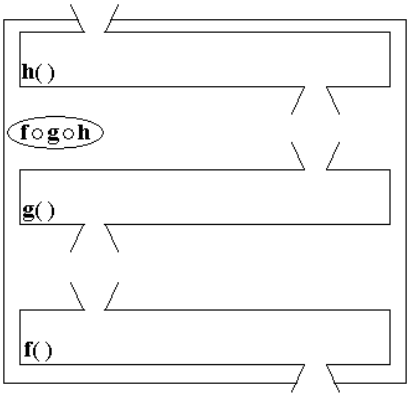
nem injektív

$R_f$ =

| ]−∞ ; −1[ | [-1] max.h. | ]-1;3[ | [3] | ]3;∞[ |
|---|---|---|---|---|
| ↗ | | ↘ | | ↘ |
| m=1 | | m= -3 | | m= -1 |
| | max é: 4 | | | |

szmg.hu

## II. Függvénytranszformációk




II/1) A külső-belső fv. gyakorlása:

Adott a következő négy függvény

f( ): $y=x^2$ g( ): $g(x)=2x$

h( ): $y=x-3$ k( ): $k(x)=|x|$

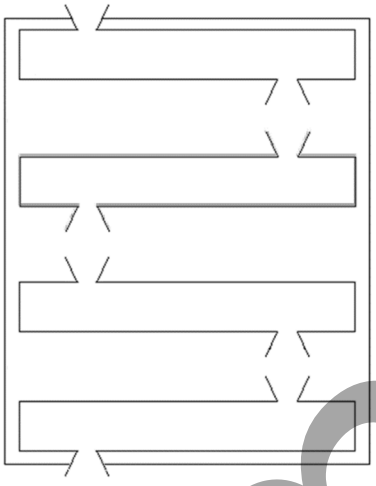
Rajzold föl géppel!

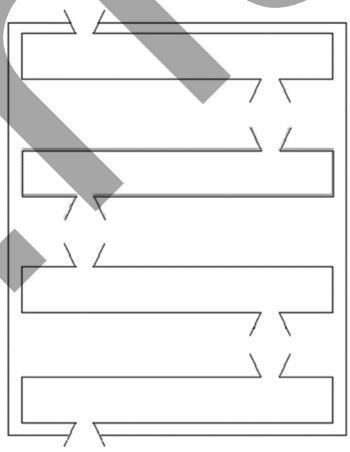
$f\circ g\circ h$: **R**→**R**; y=

**$f\circ g\circ h=f(g(h(\ )))$**

Írd föl a hozzárendelési szabályt (ahol van gép, írd bele a fv-eket)

$g\circ k\circ h\circ f$ $k(h(g(f(\ ))))$





II/2) Az inverz függvény

Egy *f*( ) fv. invertálható, ha injektív. (Mert akkor lehet minden értékkészletbeli elemhez megtalálni egyértelműn az ősképét!)

Adott egy f( ) kölcsönösen egyértelmű fv. Ekkor azt mondjuk, hogy $f^{-1}$ az a függvény, amely $R_f$-ből $D_f$-be képez, és $f^{-1}(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$

Példa: f( ):**R**→**R**; y=(2x–7)/3

$\Rightarrow f^{-1}(\ )$:**R**→**R**; y=

Másféleképp: függő változó $=\dfrac{3\cdot \text{független változó } +7}{2}$

szmg.hu

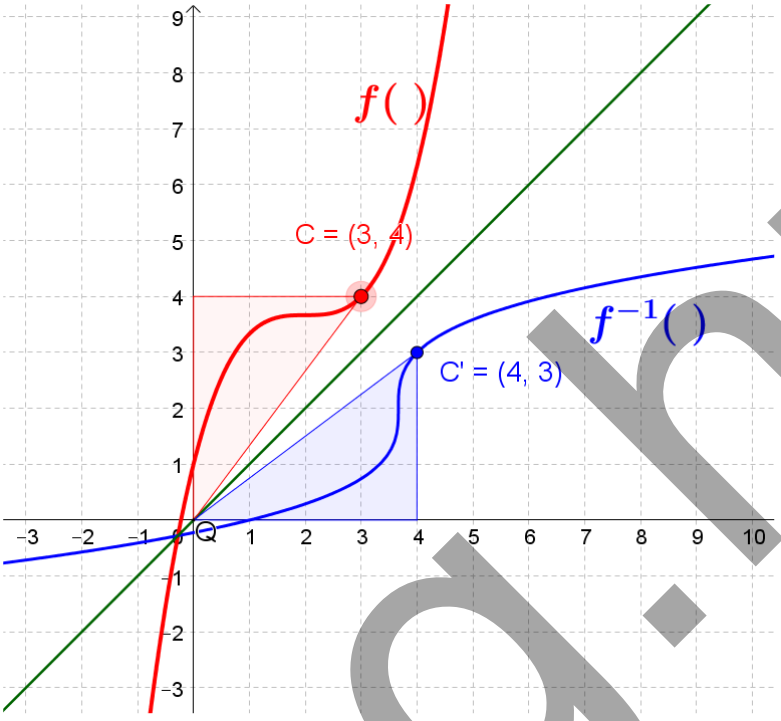
Az inverz függvény képe általában.

***inverz függvény képe.ggb***

Tükrös az y=x tengelyre.

Ugyanis: $C(x;f(x)) \in \text{graf}_{f(\ )} \Leftrightarrow C'(f(x);x) \in \text{graf}_{f^{-1}(\ )}$

Nézzük meg az ábrát: a két derékszögű $\Delta$ tükrös az y=x tengelyre.




Áll.:

$f$ szig. mon. nő $\Leftrightarrow f^{-1}$ szig. mon. nő

Biz: $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f \circ f^{-1}$= identitás, vagyis: $f \circ f^{-1}(x)=x$ $\quad (f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f)$

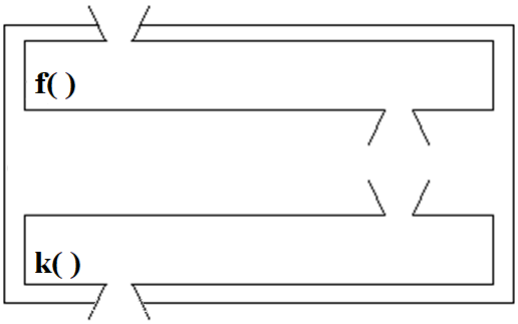
Biz: definíció alapján triviális

II/3) Függvényérték transzformáció

A külső függvény lineáris, a belső az alap (= a függvényérték trafói)

$k(\ )$: $mx+c$

$k(f(\ ))$: $m \cdot f(x)+c$



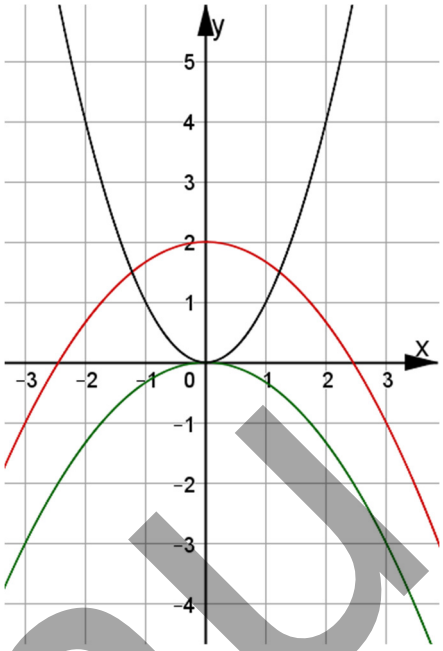

Először az abszcisszára, $x^{\lambda=m}(\text{graf}_{f(\ )})$ merőleges affinitással transzformálódik, majd ez a kép $E^{\underline{v}(0;c)}(\text{graf}_{f(\ )})$ trafóval tolódik el.

szmg.hu

Pl.: $g(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=-1/3\cdot x^2+2$

Először: $x^{\lambda=-\frac{1}{3}}$ (graf$_{f(\ )}$) merőleges affinitással transzformálódik.

Majd: $E^{\underline{v}(0;2)}(\ )$ trafóval tolódik el.




II/4) A független változó trafói – argumentum-transzformáció
a belső függvény lineáris, a külső az alap

***trafó - külső - belső.ggb***

a) Addíció: $f(x+c)$: az abszcissza mentén történő eltolás.

pl.: $x^3 \to (x-2)^3$.

Ha eddig egy $y_0$ (=27) értéket az $x_0$ (=3) helyen vette fel, akkor ezentúl ugyanezt az $y_0$ (=27) értéket az $x_0+2$ (=5) helyen fogja felvenni – tehát *„2-vel jobbra rajzolódik meg az eredeti ív”.*

Vagyis az $f(x+c)$ fv. grafikonját az $f(\ )$ fv. grafikonjából $E^{\underline{v}(-c;0)}(\ )$ eltolással kapom meg.

b) Multiplikáció: $f(c\cdot x)$: az abszcissza mentén, az ordinátára történő merőleges affinitás.

$g(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=(x-2)^3$.

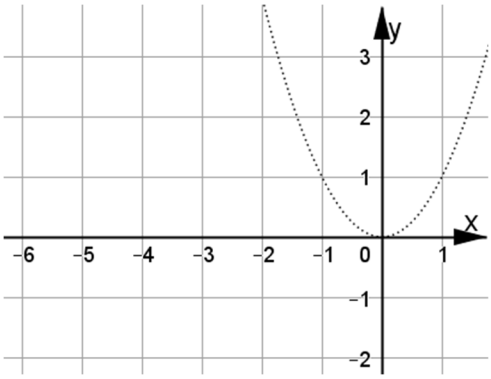
Ha eddig egy $y_0=8$ értéket az $x_0 = 2$ helyen vette fel az $x^3$ fv, akkor ezentúl ugyanezt az $y_0=8$ értéket az $x_0/(-1/3) =-6$ helyen fogja felvenni.

Vagyis az $f(c\cdot x)$ fv. grafikonját az $f(\ )$ fv. grafikonjából $y^{\lambda=1/c}(\ )$ merőleges affinitással kapom meg.

c) Hogy trafózódik az alapfüggvény ($y=x^2$) grafikonja?

$$y=-\frac{3}{2}(x+3)^2+2$$

$$y=\left(-1-\frac{x}{2}\right)^2-1$$. Ez utóbbinál „trükk” kell!




szmg.hu

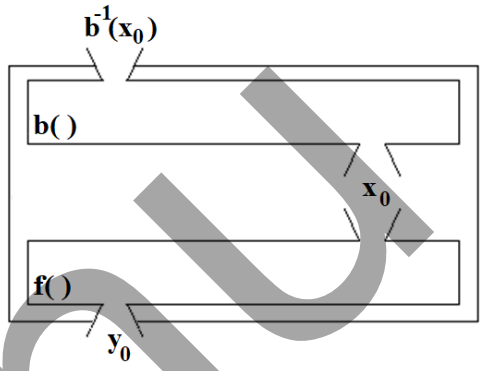
d) A belső függvény egy ax+b alakú függvény

*** A kettő együtt: $f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=frac(3x–2)

Konkrét értéken:

Ha eddig egy $y_0$ (=0,42) értéket az $x_0$ (1,42) helyen vette fel, akkor ezentúl ugyanezt az $y_0$ (=0,42) értéket hol veszi fel?

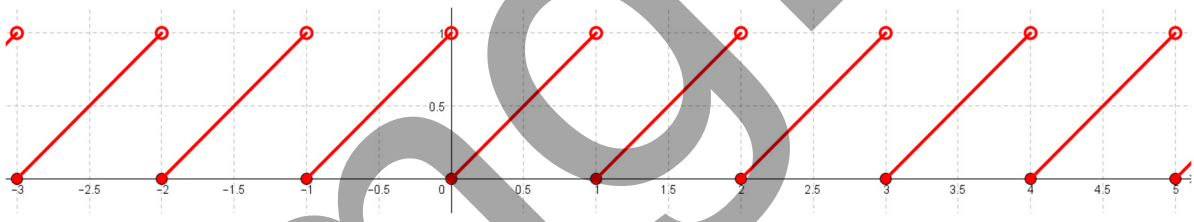
Mit kell bedobni a b( ): 3x–2 fv-be, hogy 1,42-őt kapjak?




$b^{-1}(3{,}42)$-őt: 1,14-et.

$b^{-1}(x_0)=\dfrac{x_0}{3}+\dfrac{2}{3}$

Vagyis az f(b(x)) fv. grafikonját az f fv. grafikonjából úgy kapom meg, hogy a *belső függvény inverzével* trafózom a képet az abszcissza mentén.




## III. Az elsőfokú törtfüggvények

III/1) Általános alakjuk

$f(\ ):\mathbf{R}\backslash\{-d/c\}\to\mathbf{R};\ x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ahol c ≠0 és b/a≠d/c

III/2) Fölépítésük az alapfüggvényből

a) Az alapfüggvény

$f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=\dfrac{1}{x}$

| ]-∞;0[ | [0] | ]0;∞[ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

$D_f$= ZH: Menet:

Valójában ezek után lehet csak megrajzolni a képét, ha nem tudnánk, hogy hiperbola.

$R_f$=

Nem korlátos; Nem periodikus.

Nem injektív.

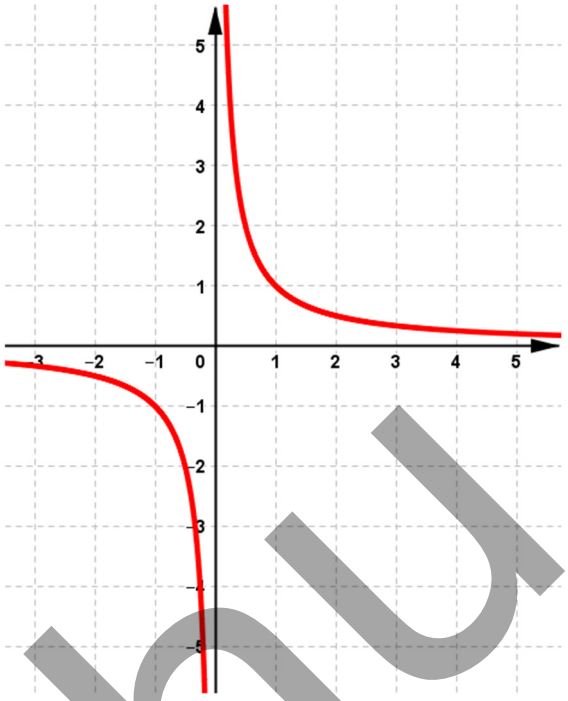
Páratlan

szmg.hu

**Aszimptota**

Görög szó: „össze nem eső”

Egy végtelenbe nyúló görbeív aszimptotája olyan egyenes, amelyet a görbe tetszőleges pontossággal megközelít.



Az aszimptoták: y=0 és az y=0

Mit is jelent ez:

x=0 egyenes aszimptota, vagyis az y tengely.

Mivel az x=0 nincs az értelmezési tartományban.

y=0 egyenes aszimptota, vagyis az x tengely.

Mivel az y=0 érték nincs az értékkészletben.

Érdekes módon ezt az alább, egy kicsit bonyolultabb törtnél könnyebben megértjük.

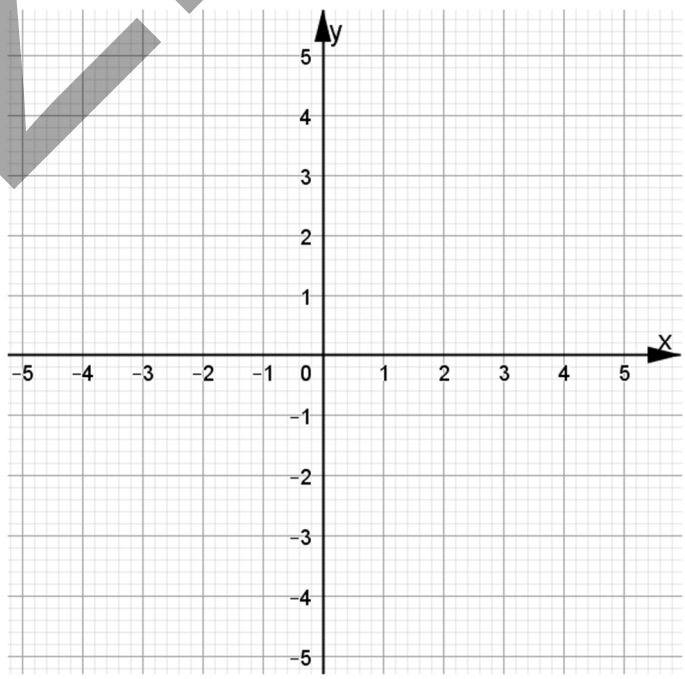
Páros-e? f(x)=f(–x) ?

Páratlan-e? f(x)=–f(–x)?

Invertálható-e? Szimmetrikus-e?

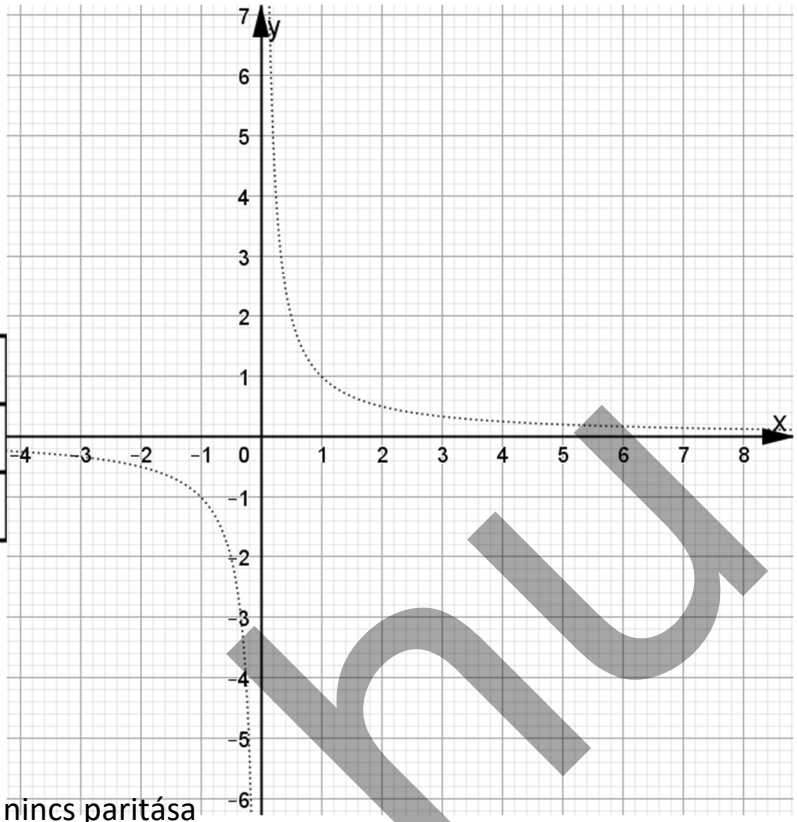
A táblázat alapján kézzel rajzold meg!

| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | -0,8 | -0,6 | -0,5 | -0,25 | 0,2 | -0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -0,2 | -0,25 | -0,333 | -0,5 | -1 | -1,25 | -1,667 | -2 | -4 | 5 | -10 |



szmg.hu

b) Trafózzuk az alapfüggvényt




$g(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=\dfrac{3}{x-1}$

$D_g$= ZH:

Trafó:

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

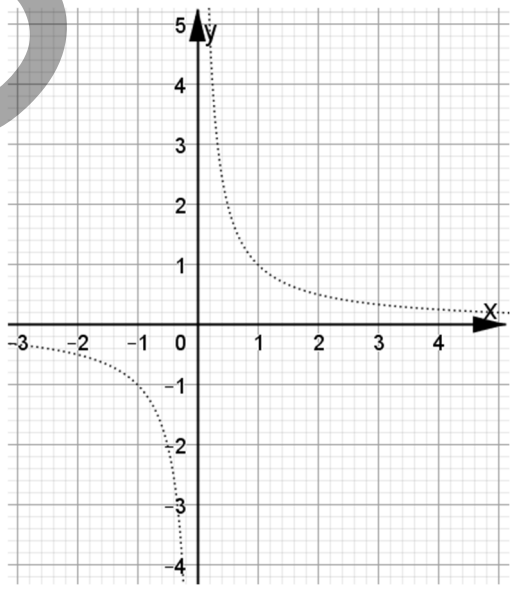
Alak:

Aszimptoták:

Nem korlátos, nem periodikus, nincs paritása

$f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=\dfrac{2}{3x-4}+1$

A trafó (külső-belső fv. segítségével):




De lehet egy másik trükkel is dolgozni:

$\dfrac{2}{3x-4}+1=$

Így eljutunk a következő hozzárendelési szabályig:

$y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{4}{3}}+1$ Vagyis a trafó:

Sőt: tudjuk, hogy milyen értéket nem vesz fel:

az y=……-et, vagyis a vízszintes aszimptota:

És tudjuk, hogy mi nem tartozik az értelmezési tartományba:

a x≠…… Vagyis a függőleges aszimptota:

Persze azt is mondhattuk volna nemes egyszerűséggel, hogy a két aszimptota is trafóródott.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

szmg.hu

c) Hogy találom meg a két aszimptotát?

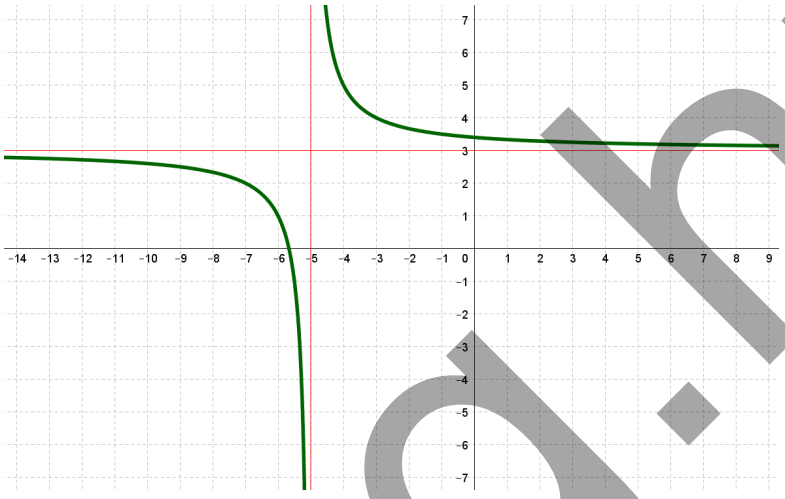
$y=3+\frac{2}{x+5}$ Ez valójában az: $y=\frac{3(x+5)}{x+5}+\frac{2}{x+5}=\frac{3x+17}{x+5}$ törtfüggvény

De most „kellemesen rendezve van”, mivel látható, hogy az

x nem lehet –5, vagyis az x=–5-nél egy „függőleges vonal” húzható a grafikonon,

az y pedig 3, mivel a $\frac{2}{x+5}$ bármilyen értéket fölvehet, csak épp 0-t nem.

Vagyis az aszimptoták az Értelmezési tartomány hiányát és az értékkészlet hiányát mutatják itt. (Van olyan fv., ahol nem, de a mi törtfüggvényeinknél igen!)

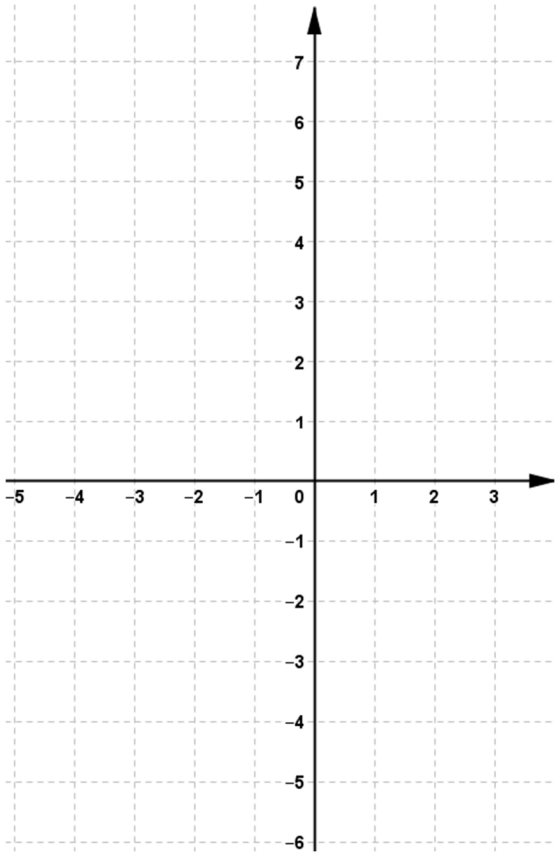


Általános elsőfokú törtfüggvény ábrázolható alakba hozása

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Konkrét példán

$$y=\frac{3x-2}{2x+1}$$

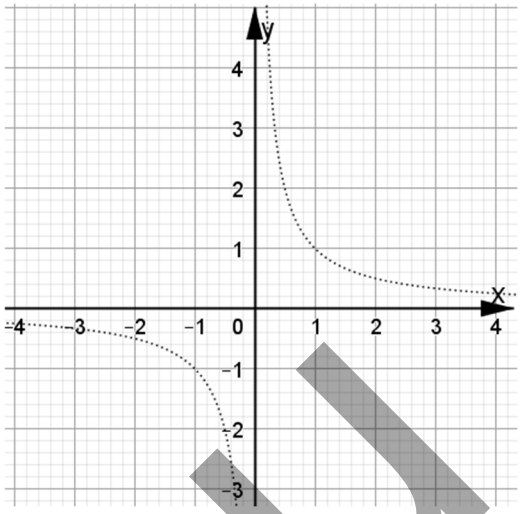


Aszimptoták:

szmg.hu

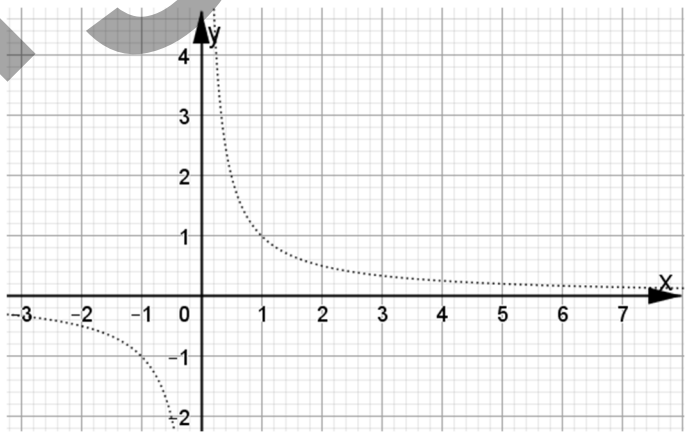
d) Gyakorlás

h( ):**R**→**R**; $y = \dfrac{3x+1}{2x+1}$




| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

f( ):**R**→**R**; $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$

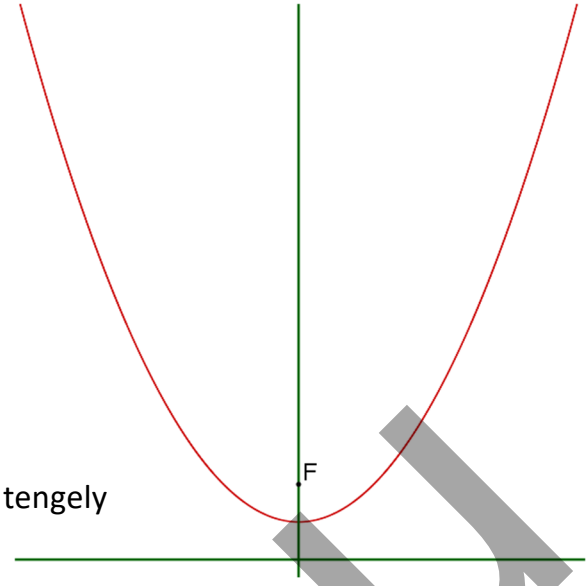



| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

szmg.hu

## IV. A másodfokú fv. grafikonjának, a parabolának a trafói

### IV/1) A parabola definíciója, jellemzői




Adott egy *v* vezéregyenes és egy F∉ *v* fókuszpont.

Ekkor a Parabola:={P∈ S | d(P;F)=d(P;*v*)}

Elnevezések:

F: fókusz

*v* = vezéregyenes v. direktrix,

p=d(F;*v*) = a parabola paramétere

a *v*-re merőleges, fókuszon áthaladó egyenes: tengely

tengely ∩ parabola: tengelypont v. csúcspont

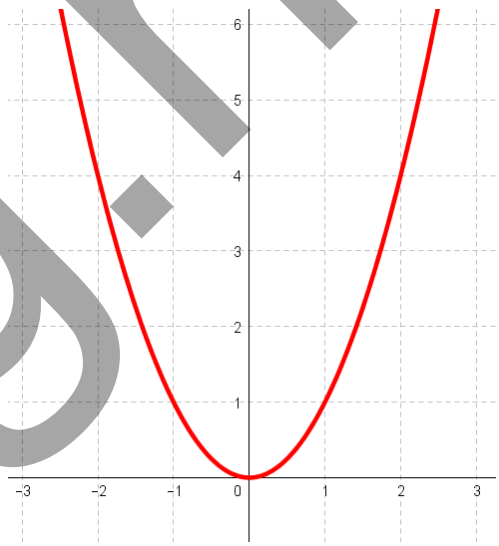
vezérsugarak

### IV/2) Az alapfüggvény és transzformációi

a) Az alapfüggvény sqr( ): **R**→**R**; $y=x^2$

A csúcspont: C(0;0)

Alakja: felfelé nyíló parabola



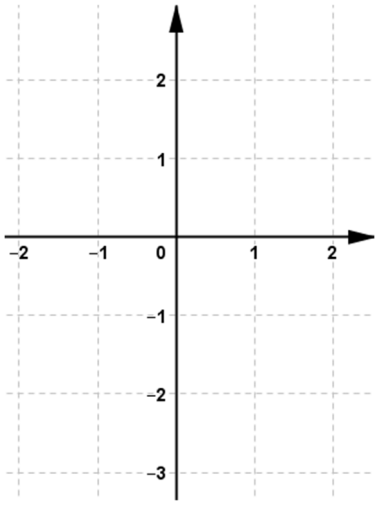

b) Egyszerűbb trafó

g( ): **R**→**R**; $y=-3x^2+2$

Trafó:

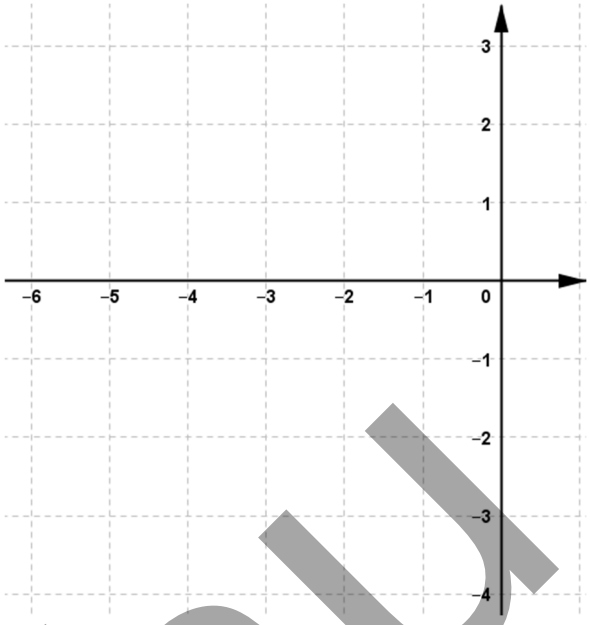
A csúcspont C(  ;  )

Alak:




szmg.hu

f( ): **R**→**R**; $f(x)=-\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2+3$




Trafó:

C(  ;  )

Alak

c) Másodfokú polinomfüggvény csúcsponti egyenletre történő hozása

$f$( ):[−1;5[→**R**; $y=-\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}$

Át kell először alakítani ábrázolható formára: $a(x-u)^2$+v alakra

$-\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}=$

Azért írják $a(x-u)+v$ alakra, hogy a C(u;v) felírása könnyű legyen

Ezt az alakot hívják **csúcsponti egyenletnek** (amikor egyenletként kezeljük)

$D_f$=[−2;5[

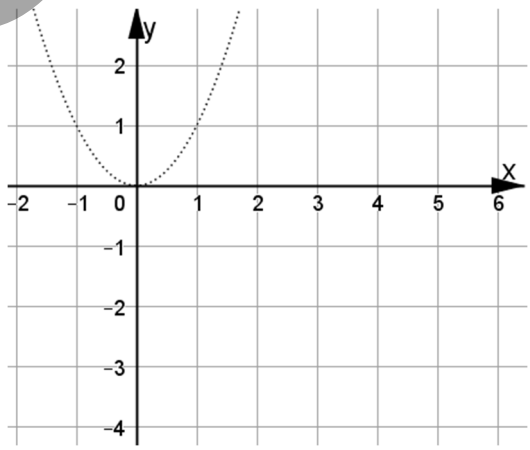
Nem periodikus

ZH:

Először trafóval ábrázolhatjuk:

Trafó:

Menet:




$R_f$=[−2,25; 4], tehát korlátos

Nincs paritása

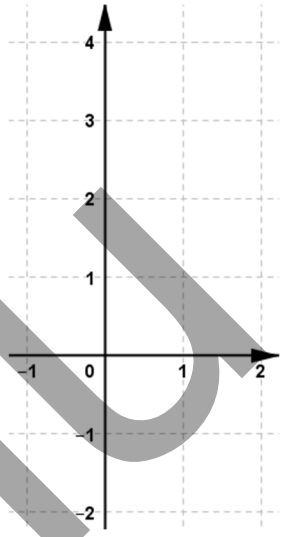
Alak: lefelé nyíló parabolára illeszkedik (parabola ív)

szmg.hu

g( ):]–1;1] $\to$**R**; $y = 3x^2 - 2x - \frac{5}{3}$

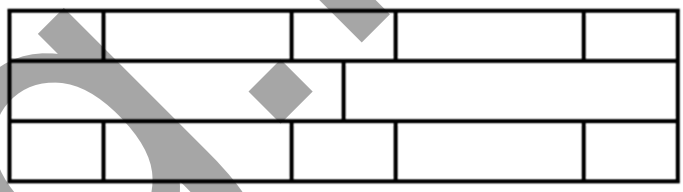
$D_g$=]–1;1]

ZH:




Trafó:

Menet, stb.



d) f( ):**R**$\to$**R**; y=2x$^2$ –3x + *q*

Mennyi legyen a *q*, hogy a fv. minimumértéke –3 legyen?

szmg.hu

## V. A gyökfüggvények

V/1) Az inverz függvény (ld. Másodfok – E/II/2.)

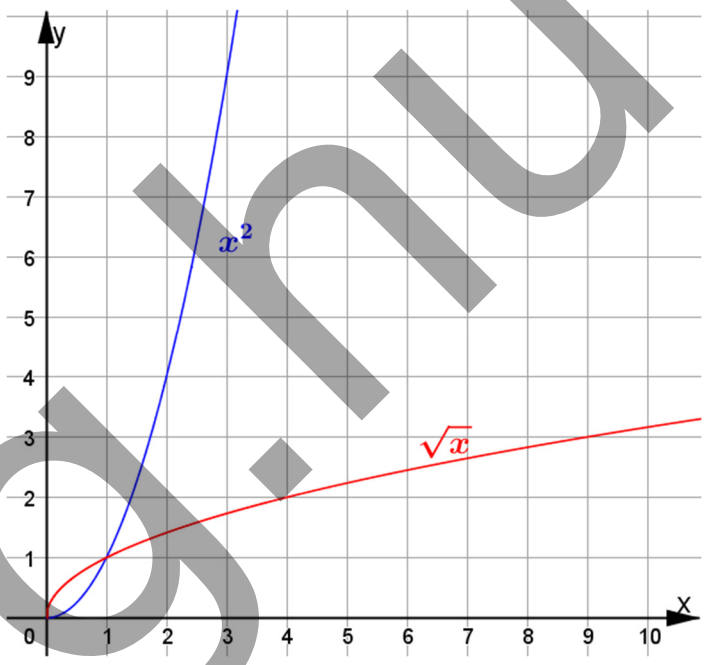
V/2) A négyzetgyök függvény és transzformációja (ábr. jell.)

a) Az alapfüggvény

A négyzetgyök definíciója „inverz” definíció: $x \in R_0^+ \Rightarrow \sqrt{x} \in R_0^+ \longrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, vagyis a definíció alapján a négyzetgyök függvény a „négyzetfüggvény” inverze.

f( ): $R^+_0 \rightarrow x \in R^+_0$; $y=x^2$ inverze: $f^{-1}( ) \equiv g( )$: $R^+_0 \rightarrow R^+_0$; $y=\sqrt{x}$

Grafikonja az $x^2$ fv. jobb szárának tükörképe az y=x egyenesre.




Jellemzése:

$D_g = \mathbf{R}^+_0$

ZH={0}

Menet: szig monoton nő

$R_g = \mathbf{R}^+_0$

Alakja: „jobbra nyíló” parabola szár

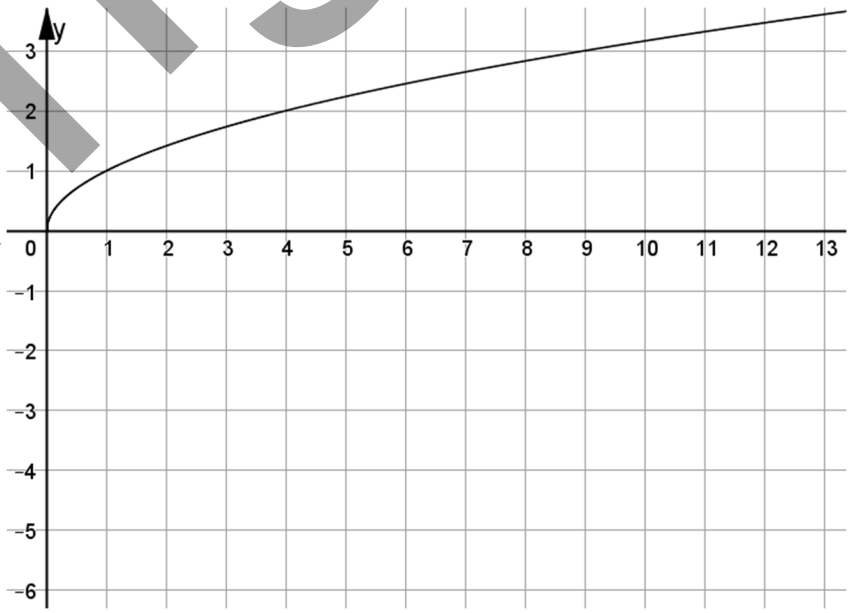
C( ; )

injektív

b) Trafózott függvény

f( ): $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $y = -2\sqrt{x-3}+1$

$D_f$:




Egyenlőtlenség megoldás!

ZH:

Transzformáció:

Alak

C( ; )

szmg.hu

c) Egy becsapósabb transzformáció

g( ): **R**$\rightarrow$ **R**; $y=-2\sqrt{3-x}+1$

Ez becsapós, mivel: $\sqrt{-x}\neq-\sqrt{x}$

Hiszen a bal oldal

értelmezési tartománya: a nempozitívak,

értékkészlete: a nem negatív számok.

A jobb oldal:

értelmezési tartománya: a nem negatív számok,

értékkészlete: a nempozitívak

**Tehát nem szabad –1-et kiemelni.**

$-2\sqrt{3-x}+1 \neq\neq\neq\neq\neq\neq\neq\neq -2\sqrt{x-3}+1$

$-2\sqrt{3-x}+1 \neq\neq\neq\neq\neq\neq\neq\neq 2\sqrt{x-3}+1$

Akkor először nézzük meg a két „alapfüggvényt”

Ha a $\sqrt{x}$ fv az x=4 helyen veszi fel az y=2 értéket,

akkor a $\sqrt{-x}$ fv az x= –4 helyen veszi fel az y=2 értéket,

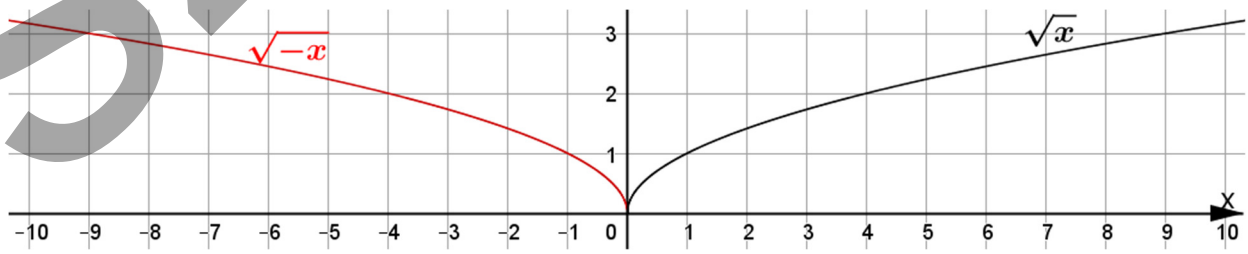
Ha a $\sqrt{x}$ fv az x=1 helyen veszi fel az y=1 értéket,

akkor a $\sqrt{-x}$ fv az x= –1 helyen veszi fel az y=1 értéket,

Ha a $\sqrt{x}$ fv az x=9 helyen veszi fel az y=3 értéket,

akkor a $\sqrt{-x}$ fv az x= –9 helyen veszi fel az y=3 értéket,

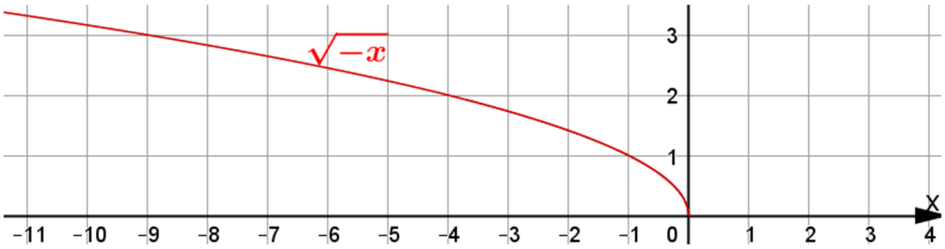
Vagyis az y tengelyre tükrözök! Persze, ez jön az y= –x hozzárendelésű fv. inverzéből is!



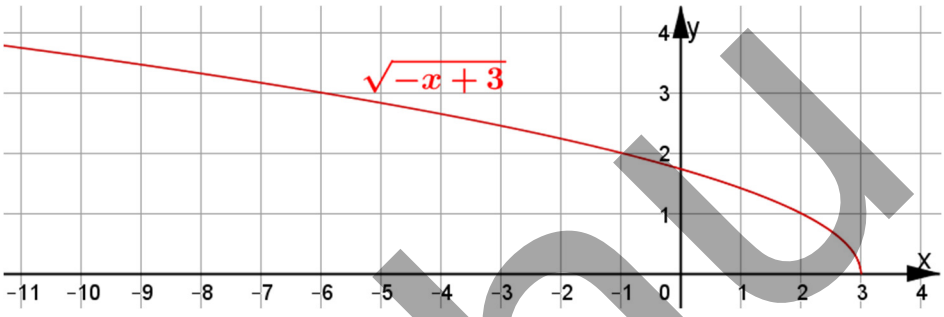

szmg.hu

Nézzük újra a g( ): **R**→ **R**; $y=-2\sqrt{3-x}+1$ fv-t

$y=\sqrt{-x}$ - tükröződik az y tengelyre

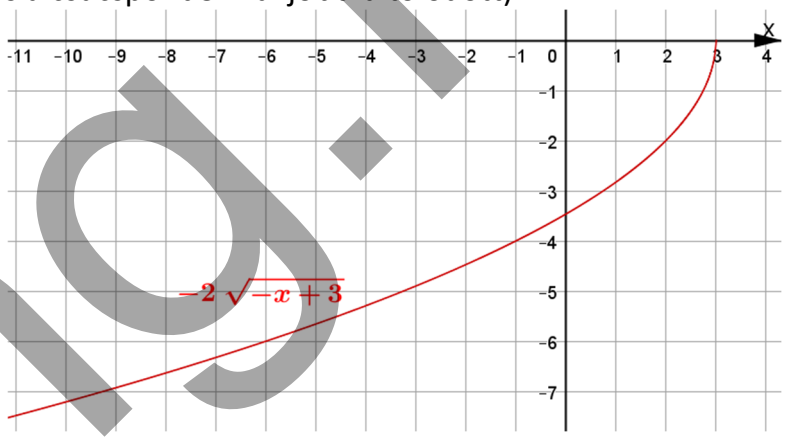



$y=\sqrt{-x+3}=\sqrt{3-x}$




Hárommal jobbra tolódott, hiszen 0 helyett 3-at kell „bedobni”, hogy 0-át vegyen fel függvényértékként (vagyis a csúcspont 3-mal jobbra tolódott).

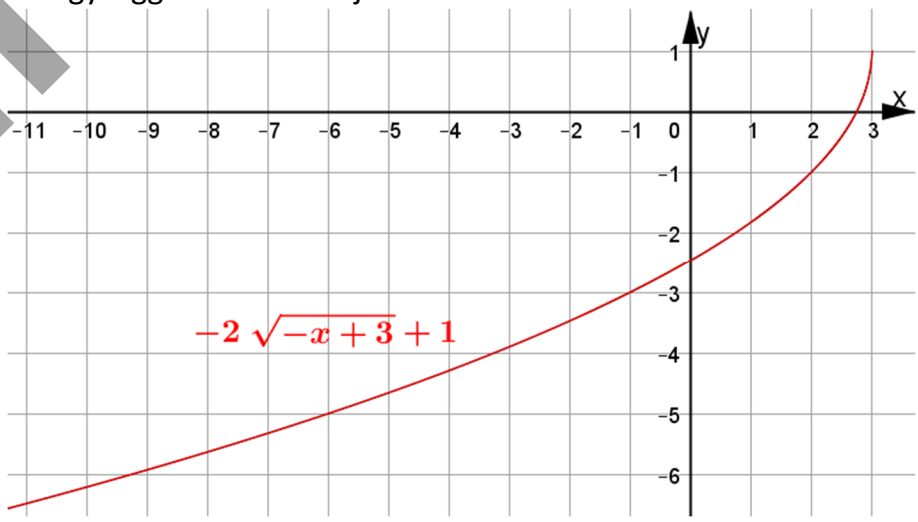
$y=-2\sqrt{3-x}$




Itt már csak a szokásos x-tengelyre vett trafó jött.

Végül: $y=-2\sqrt{3-x}+1$ : 1 egységgel fentebb toljuk.

Tehát a transzformáció:




Természetesen érdemes megnézni csak a belső függvényt, és annak inverzét:

y=–x+3 inverze: y=–x+3, vagyis: tükrözünk az y tengelyre, majd jobbra tolunk 3-mal…

szmg.hu

V/3) Egyéb hatványfüggvények és inverzeik

a) A köb és a köbgyök

$x^3$ és $\sqrt[3]{x}$

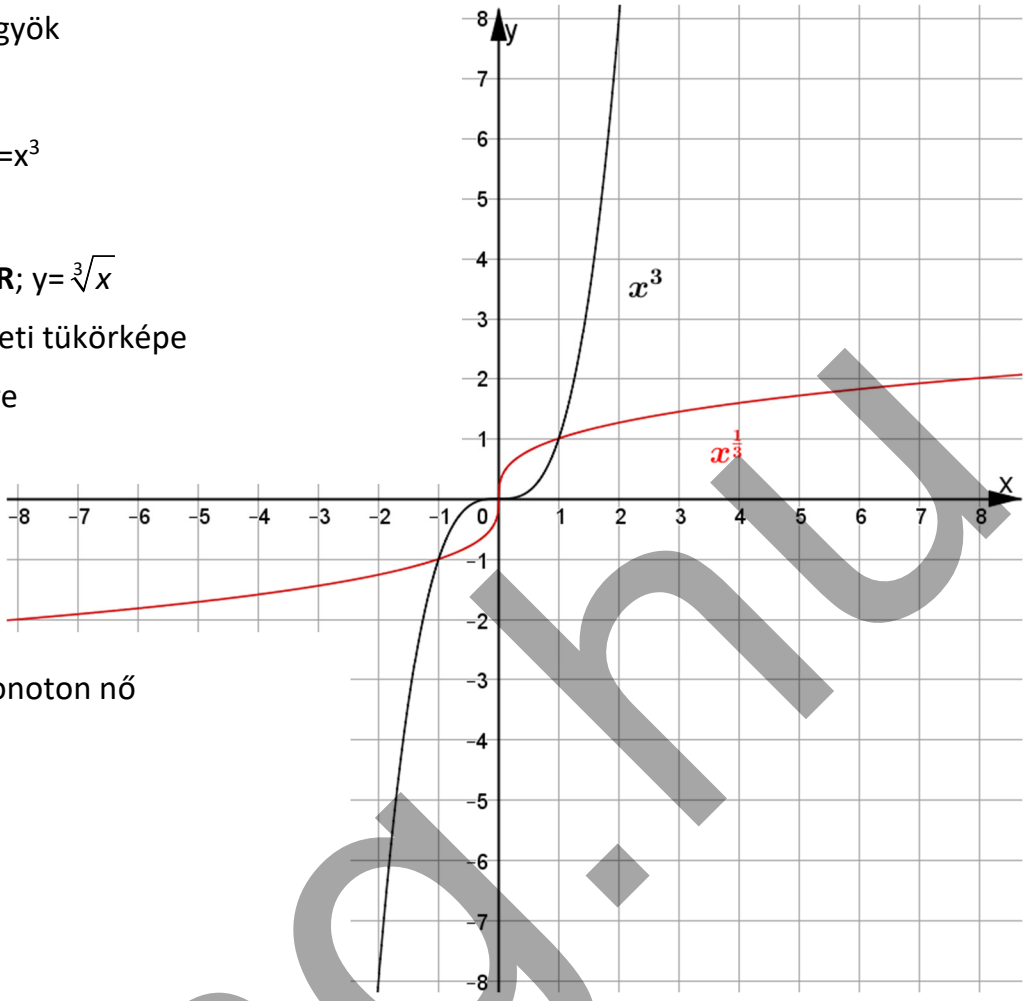
f( ): **R** $\rightarrow$ x$\in$ **R**; y=$x^3$

inverze:

$f^{-1}$( )$\equiv g$( ): **R**$\rightarrow$ **R**; y= $\sqrt[3]{x}$

A képe az eredeti tükörképe

az y=x tengelyre




$D_g$= **R**

ZH={0}

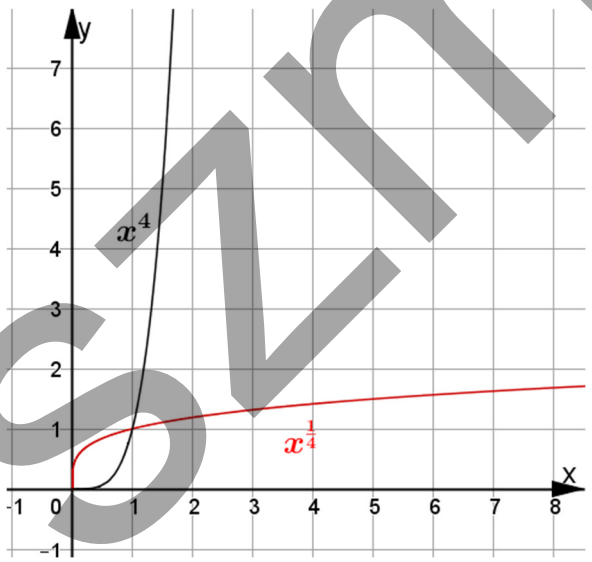
Menet: szig monoton nő

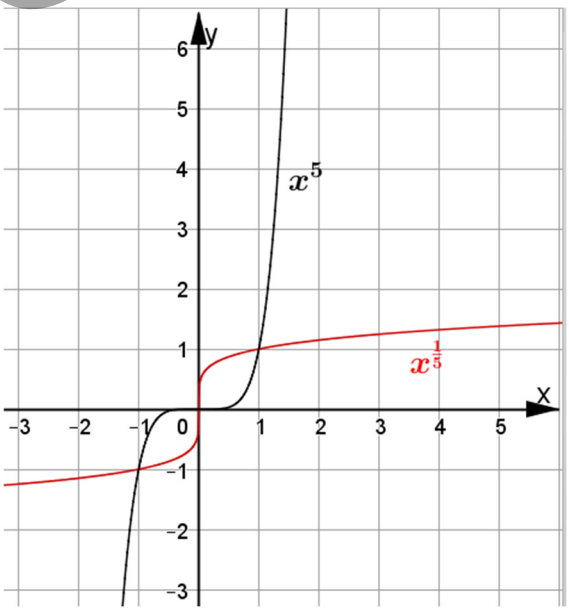
$R_g$= **R**

injektív

páratlan

$x^4$; $x^5$ és az inverzeik: ugyanígy.




szmg.hu

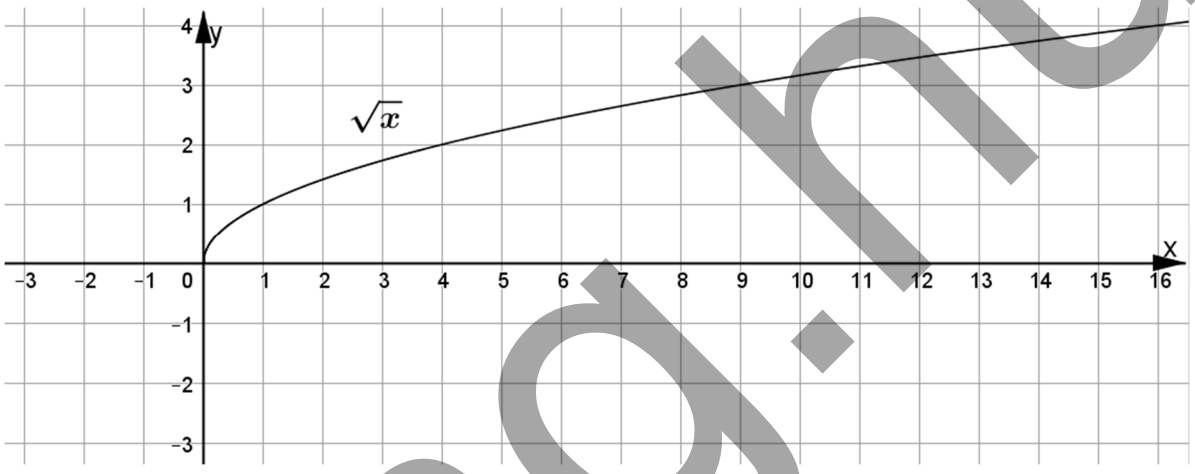
V/4) Gyakorlás

Ábrázold és jellemezd (D, ZH, transzformáció, menet, R stb.):

$f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ f(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x+3}+2$

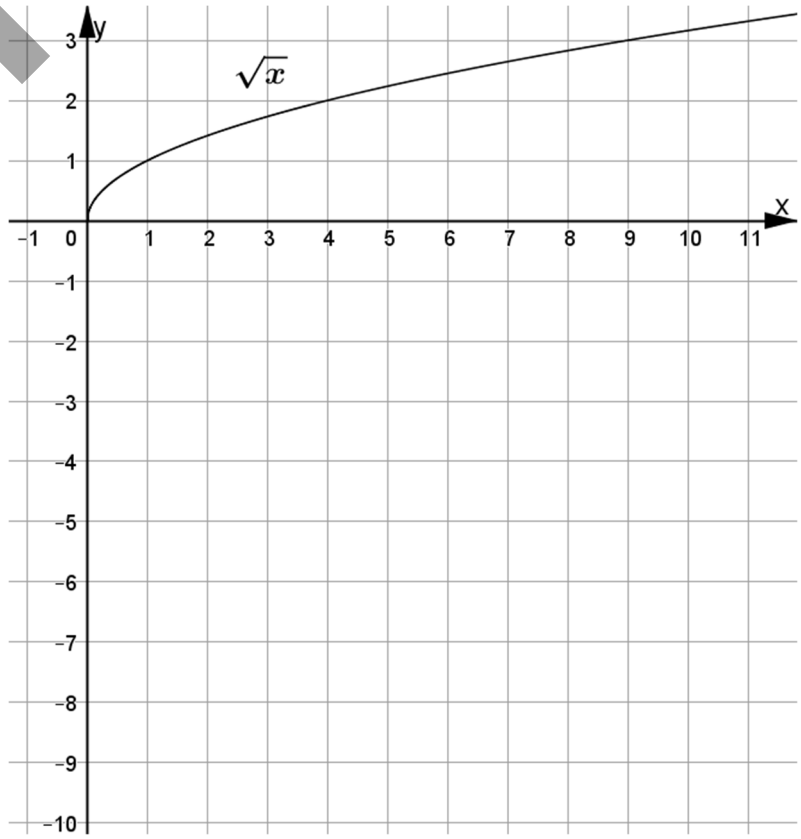
$D_f$:

ZH:




Ábrázold és jellemezd (D, ZH, transzformáció, menet, R stb.):

$g(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ g(x)=-2\sqrt{3x-2}+1$




szmg.hu

# Másodfok – F: Egyenletek - egyenlőtlenségek megoldási módszerei

## I. Egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei

### I/1) Amire mindig figyelünk

Kikötések; az ekvivalencia figyelése; gyökvesztések, hamis gyökök, visszahelyettesítés.

Egyenleteknél a legbiztosabb **<u>mindig visszahelyettesíteni</u>**: így mindig kiszűrhetjük a hamis gyököt, és valójában azzal lesz teljes az „ekvivalencia”

### I/2) Gyakorlás

$$\frac{3}{1-x}-4=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{1-x^2}$$

$x-1=\sqrt{16-4x}$ Kikötés:

Egyenletben ☠gyökvonás☠: soha!!!, inkább szorzattá-alakítás, mert különben gyökvesztés lesz.

$x^2=5$

szmg.hu

Ismeretlent tartalmazó tényezővel nyakló nélkül nem osztunk: I. II.stb.: **<u>gyökvesztés!</u>**

x(x+1)=3(x+1) x(x+1)=3(x+1) (Leosztással történő mo)

Mégis, mi az előnye a leosztásnak?

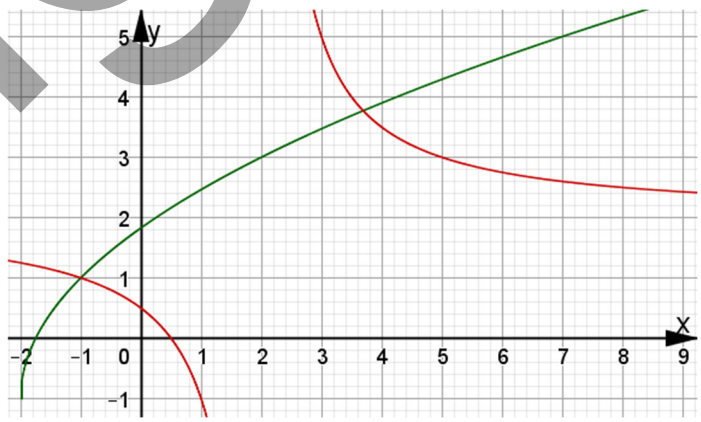
*„Daraboljuk az egyenletet, mint a szalámit, egyre rövidebb lesz.”*

És ha nem vesszük észre, hogy (x+1)-et ki lehet emelni, akkor még először rondább másodfokhoz is jutunk…

I/3) Egyismeretlenes egyenletek

a) Grafikus: 1.: ábrázolás 2.: leolvasás 3.: visszahelyettesítés 4.: biz.: több gyök nincs.

$$\frac{3}{x-2}+2=2\sqrt{x+2}-1$$




b) Alaphalmaz figyelés

$\sqrt{3-x}=\sqrt{x-5}$ $\sqrt{2-x}=\sqrt{x-2}$

szmg.hu

c) Értékkészlet figyelés, értékkészlet összehasonlítás

Kötelező bravúr (**fejből**!): a legegyszerűbb számtani-mértani közép összefüggés

**G≤A. Két nemnegatív szám mértani közepe kisebb-egyenlő a számtani közepüknél. Egyenlőség csak akkor van, ha a két szám megegyezik!**

Két tagra: $a;b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ $\ominus \Leftrightarrow a = b$ Biz: …

Fontos következménye: a>0 $\Rightarrow$ $0 < a \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$; *Egyenlőség* $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a}$ (=)$\Leftrightarrow$a=1

Biz.:

$x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - \{x\}$

$x^2+2=2\cdot\mathrm{sgn}(x-1)$

$(x+6y+1)^2+(x-2y-7)^2=0$

$\sqrt{x-1} = 1 - x$

$((x-4)^2+5)^2=25-(x+3)^2$

szmg.hu

d) Szorzattá-alakítás: szinte ∀ polinom egyenletet erre vezetünk vissza: lineáris tényezők szorzatára!
„2. vagy magasabb fokú egyenleteket legtöbbször egy oldalra rendezünk és igyekszünk őket szorzattá alakítani”

$2x^3+6x=x^2+3$

I/4) Egyenletrendszerek megoldása

a) A 4 féle módszer

Grafikus: Megsejteti a megoldást – nem erőltetjük
egyenlő együtthatók: első és néha magasabb fokúnál is jó lehet
Behelyettesítéses: magasabb foknál is jó
Gauss-féle elimináció: alapvetően 3 v. többismeretlenes, elsőfokúnál.

b) Egyenlő együtthatók

$3x-2y=8$
$\underline{2x+y=10}$

c) Behelyettesítéses módszer

$3x-2y=8$
$\underline{2x+y=10}$

d) Új ismeretlen bevezetése

$$\frac{2}{2x-y-1}-\frac{3}{3x+y-5}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{2x-y-1}-\frac{5}{10-6x-2y}=\frac{25}{12}$$

szmg.hu

## II. Egyenlőtlenségek megoldási módszere

II/1) Mit szabad, mit nem szabad tenni, és az ekvivalencia

$\oplus\ominus$ valós számmal nyugodtan

$\times\ \div$ valós számmal lehet, de negatívnál megfordul a relációjel!

$\times\ \div$ ismeretlent tartalmazó tényezővel nagyon veszélyes – esetekre bontás kell!

reciprok: soha!

***Visszahelyettesítés helyett: állandóan figyelni és jelezni kell az ekvivalenciát!***

II/2) Lineáris: hasonlóképp, mint az egyenletet, de figyelni kell és ki kell tenni az ekvivalencia jelet!

$$-\frac{x+1}{5}-3\geq 2-x$$

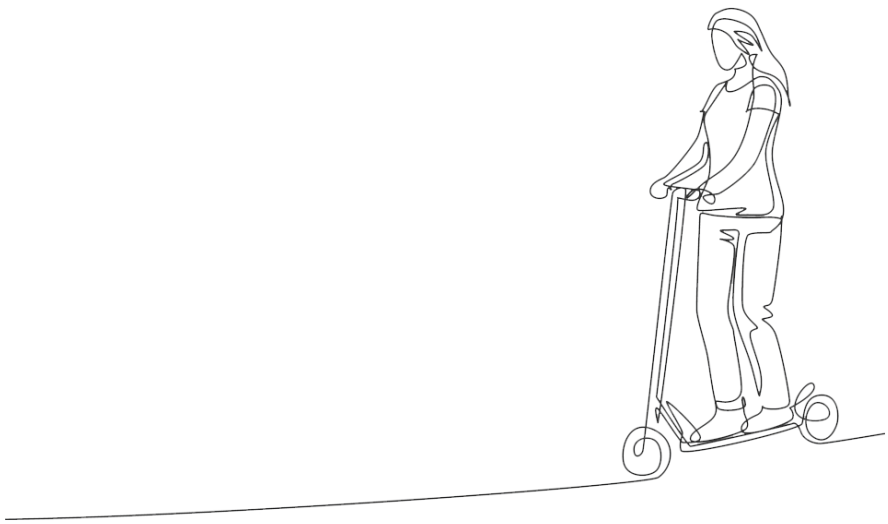
II/3) A nem lineárisoknál a legjobb módszer

Általában **0-RA RENDEZNI**! („**0-ra redukálni**”) – majd „szorzattá alakítani”

– Ha kell: előjelgrafikon!

$\frac{3}{x}\geq\frac{1}{x}-4$ (felszorozni halálos bűn!)

$$\frac{6x+4}{2x-3}\geq 2$$



szmg.hu

Csak az előjelgrafikon előkészítéséig vigyük végig: $\frac{2x^2-3x-10}{x^2-x-6} \le 2$

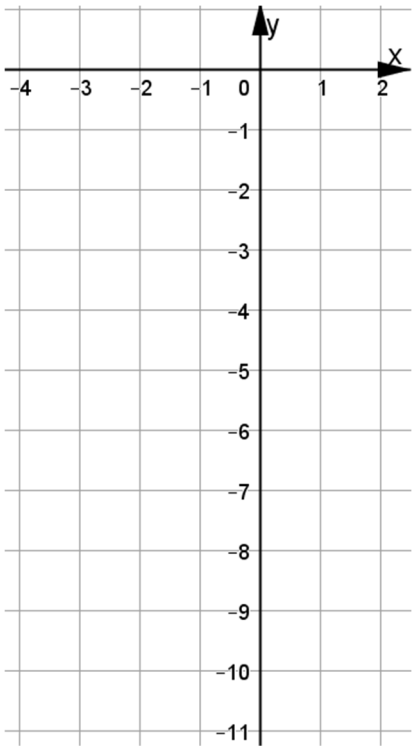
Amikor tényleg esetekre kell bontanunk:

$|x-3| < \frac{x}{2}+3$

## III. A másodfokú függvény trafói – és a grafikus megoldás

III/1) Ábrázoljuk a másodfokú függvényeket, adjuk meg a transzformációt

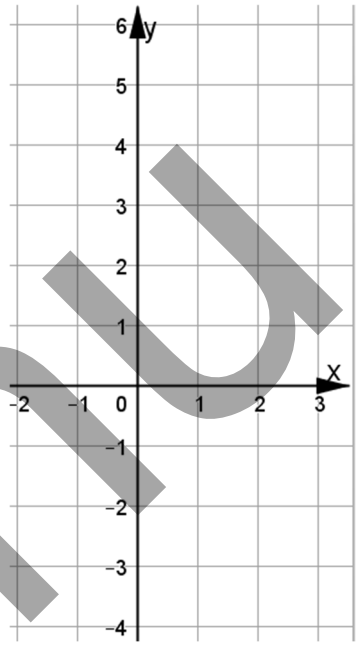
f( ): ]–3;1] → **R**; f(x)=–1–$x^2$




szmg.hu

g( ):[-1;2[ $\rightarrow$ **R**; g(x)= $-2x^2+4x+3$

Itt először a „csúcsponti” egyenlet formára kell hozni a kifejezés:

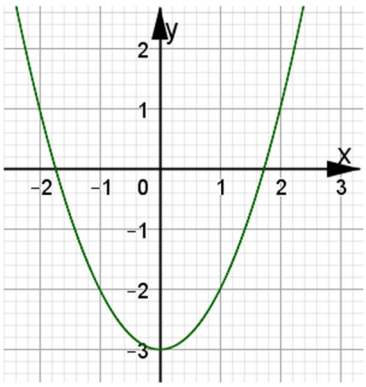



III/2) Grafikus megoldás

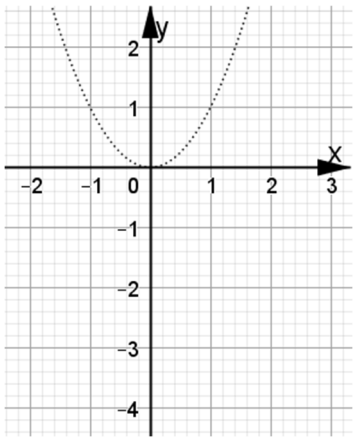
$$\frac{x}{2}+1=x^2-3$$

Bo:

Jo.:




De lehet egy oldalra rendezve is – 0-ra redukálva, és akkor zérushely-leolvasás




szmg.hu

## IV. Segédlet a szorzattáalakításokhoz – A Pascal háromszög illetve az azonos kitevők

### IV/1) Alapok

Pascal háromszög: teljes négyzet, teljes köb stb.

$(2x-3)^3=$

$(5x-2)^4$-ben mennyi $x^3$ együtthatója?

### IV/2) Azonos kitevők

$a^n-b^n=$

$a^{2k+1}+b^{2k+1}=$

$a^{2k}-b^{2k}=$

### IV/3) Gyakorlásuk:

$x^3+1=$

$x^5-1=$

$x^3-1=$

$x^3+1=$

$x^4-1=$

$x^3-8=$

$2a^5-64=$

$5x^3+135=$ ;

$x^6-64=$ figyelem: „In medio stat virtus”…

$a^4+a^2+1=$

$a^4+4=$

szmg.hu

# Másodfok – G: Általános megoldás és a másodfokú függvény

## I. A megoldóképlet és a fv. transzformáció előkészítése

I/1) A megoldóképlet levezetése, vagyis a paraméteres másodfokú egyenlet megoldása

a≠0.

| $3x^2-14x+8=0$ | $ax^2+bx+c=0$ |
|---|---|
| $3\left[x^2-\frac{14}{3}x+\frac{8}{3}\right]=0$ | $a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=0$ |
| $3\left[\left(x-\frac{7}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]=0$ | $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$ |

$D:=b^2-4ac$

I. D<0 $\Rightarrow$ Mivel $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{2a}>0 \Rightarrow \nexists$ gyök (2 komplex!)

II. D=0 $\Rightarrow$ Az egyenlet: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right]=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$

Ezt hívjuk: 1 db. kétszeres gyöknek.

III. D>0 $\Rightarrow$ $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right]=0$

$$a\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

Ekkor: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, vagyis: $x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$3\left[\left(x-\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]=0 \qquad 3\left(x-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right)=0$$

**Úgy tanuljuk meg, hogy**

**Diszkriminánsa = $b^2-4ac$**

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

A függvénytrafóhoz egyszerűen csak felbontjuk a nagyzárójelet:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \quad\rightarrow\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

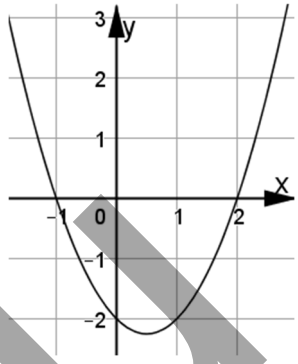
szmg.hu

I/2) Példák – megoldóképlettel és megoldóképlet nélkül

$x^2–x–2=0$

Először mondd el, mennyi az *a*, *b*, *c* és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:

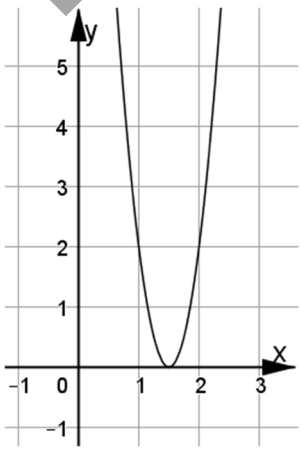



A Diszkrimináns >0 ⇔ két gyök van, vagyis a parabola belemetsz az x tengelybe.

$8x^2–24x+18=0$

Először mondd el, mennyi az *a*, *b*, *c* és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:



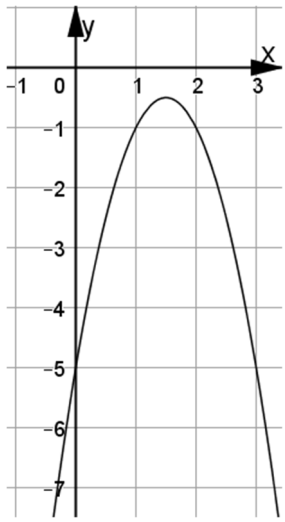

Diszkrimináns = 0 ⇔ A főegyüttható kiemelése után a kifejezés TELJES NÉGYZET!

A parabola csúcspontja az x tengelyen nyugszik.

$–2x^2+6x–5=0$

Először mondd el, mennyi az a, b, c és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:




Mit is jelent az, hogy a Diszkrimináns negatív?

A lefelé nyíló parabola még lefelé van eltolva – tehát nem metsz bele az x tengelybe.

(Nyilván egy felfelé nyíló parabola negatív diszkrimináns esetén felfelé van eltolva.)

szmg.hu

I/3) Gyakorlópéldák a másodfokú egyenletekhez

$$(3x+2)(x-3)+1=\frac{(3-x)^2-1}{3}$$

$$\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2x-4}{x^3+1}$$

$3x^3-8x^2+2x = 0$

$ax^2+bx+c=0$ Milyen paramétereknél van biztosan gyök?

I/4) Hiányos másodfokú egyenletek

Ne megoldóképletezzünk, mert elrontjuk, és egyébként is, anélkül egyszerűbb!

$ax^2+c=0$

Megoldóképlettel:

$5x^2-9=0$

Szorzattáalakítással:

$5x^2-9=0$

Mi az „*a*”, a „*b*” és a „*c*” a megoldóképletben: a= b= c=

$ax^2+bx=0$

Megoldóképlettel:

$3x^2+15x=0$

Szorzattáalakítással:

$3x^2+15x=0$

Mi az „*a*”, a „*b*” és a „*c*” a megoldóképletben: a= b= c=

szmg.hu

## II. A szorzattá alakíthatóság és a gyöktényezős alak – és szorzattá alakítás.

### II/1) Emlékezzünk a megoldóképlet létrehozására

$\exists$ gyök $\Leftrightarrow$ D≥0. Ekkor: $ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow a\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)=0$

Vagyis **a két gyök** segítségével **két elsőfokú tényezőre** bonthatjuk a másodfokú kifejezést:

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$. Ez utóbbi a „gyöktényezős alak”

Gyakorlatilag szorzattá tudtuk alakítani a másodfokú kifejezést a gyökökkel:

**gyökökkel tényezőkre bontás, gyöktényezős alak!**

Ugyanakkor így lehet gyökökből „gyöktényezőként” egyenletet gyártani:

$x_1:=3$; $x_2:=-1/2 \Rightarrow (x \quad)(x \quad)=0$ v. $2(x \quad)(x \quad)=0 \Leftrightarrow (x \quad)(\quad)=0$

Természetesen az „a” konstans szorzó erejéig 2 gyökből lehet másodfokú egyenletet gyártani: $a(x-x_1)(x-x_2)= ax^2+a(-x_1-x_2)x+ax_1x_2$

Nézzünk ilyen „gyöktényezős” felírásokat:

$3(x-2)(x+2/3)=0$

A két gyök rögtön látható: $x_1=$ $x_2=$

Ha pedig felbontjuk a zárójelet: $3x^2-4x-4=0$ – és a bal oldal szorzattá alakítását látjuk:

$(x \quad)(\quad)=0$

$5(x-2/3)(x+1)=0$

A két gyök rögtön látható: $x_1=$ ; $x_2=$

„A gyökök segítségével gyártottunk tényezőket.” – eleve a szorzattá alakított bal oldalt tettük egyenlővé 0-val, így „könnyű” megoldani az egyenletet…

Vagyis így adunk meg másodfokú egyenletet akkor, ha a gyökeit mondjuk meg először:

Pl.: a két gyök legyen –3/2 és 2/5

Ekkor: $\left(x \quad\right)\left(x \quad\right)=0$

Hogy szép legyen, meg kell szorozni _____ -tel:

$\left(x \quad\right)\left(x \quad\right)=0 \Leftrightarrow (\quad)(\quad)=0$

szmg.hu

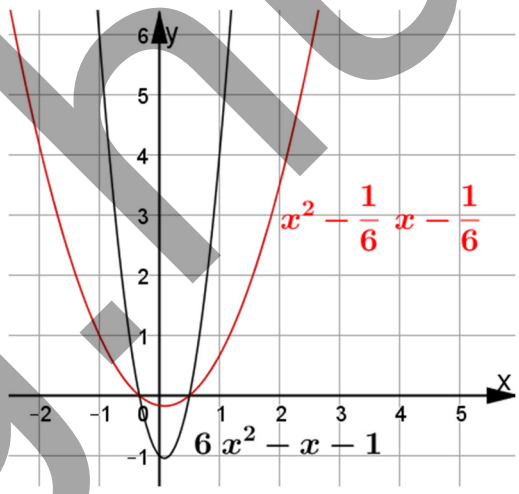
II/2) Gyakorlati alkalmazás

a) Írjuk fel a $K=6x^2-x-1$ kifejezést gyöktényezős alakban a megoldóképlet segítségével!

Vigyázat: ezek egy olyan egyenlet gyökeit keresték, ahol a főegyüttható=1

Vagyis ezek az $\left(x \qquad\right)\left(x \qquad\right)=0$ egyenlet megoldásai.

De még ez nem ugyanaz, mint az eredeti: mert a megoldóképlet „kiemel belőle” 6-ot. Függvényként másképp is viselkedik – csak a zérushelyek ugyanazok, de az eredeti 6-tal van szorozva…




Vagyis az egyenlet:

$$\left(x \qquad\right)\left(x \qquad\right)=0$$

elegánsabban: ( )( )=0.

Ez már egyben szorzattá alakítás is!

Írd föl a következő kifejezést gyöktényezős alakban

$K=15x^2-4x-35$

Vigyázat: ezek egy olyan egyenlet gyökeit keresték, ahol a főegyüttható=1

Vagyis: K=

b) Egyenlet gyökökből

Adj meg olyan egész együtthatós, másodfokú egyenletet, mely gyökei az $x_1=\frac{2}{3}; x_2=\frac{4}{5}$

szmg.hu

c) Algebrai törtek egyszerűsítése

Egyszerűsítsük: $\dfrac{6a^2+25a+14}{8a^2+18a-35}$

d) Alakítsd szorzattá: $2x^2+xy-6y^2$

Mo.: Az y-t paraméterként kezeljük. Ekkor a megoldóképletbe „berakva”

* Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet: $2x^2+xy-6y^2=36$

e) Adj meg egy olyan másodfokú f( ) fv-t, melynek a két zérushelye –5 és $\frac{3}{2}$ , és f(–3)=1

szmg.hu

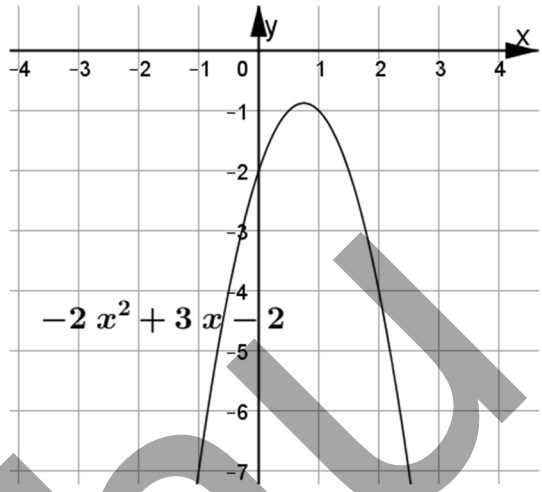
## III. Függvényvizsgálat: a függvény állása + szélsőérték

III/1) Adjuk meg az alábbi függvény szélsőértékhelyét és azon a helye a szélsőértékét!

h( ): **R**→**R**; h(x)=–2x$^2$+3x–2

$D_h$=

Átalakítás a transzformációhoz:




Transzformáció:

ZH:

Menet:

$R_h$=

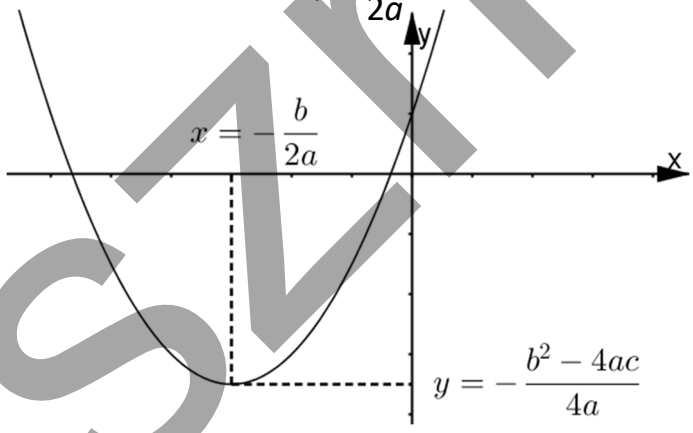
III/2) Másodfokú függvény szélsőértéke - általában

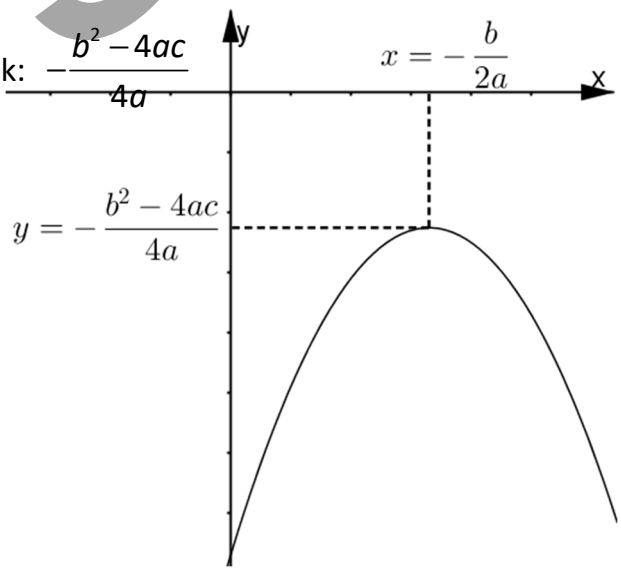
NEM KELL CSAK A b) PONTBAN TALÁLHATÓ ÁLLÍTÁS.

a) Paraméteresen

f(x)= $ax^2+bx+c \Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

⇒szélsőértékhely: $-\frac{b}{2a}$ szélsőérték: $-\frac{b^2-4ac}{4a}$




b) Állítás: **Ha létezik gyök**, akkor a két gyök számtani közepe a szélsőértékhely.

Biz: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\left(-\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)+\left(-\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)}{2}=-\frac{b}{2a}$. Ez pedig az előbb látva: jó.

szmg.hu

Nyilván a parabola csúcspontja a két gyök között van (*ez a mondat nem bizonyítás*)…

VESZÉLY, VESZÉLY, VESZÉLY: Szélsőérték keresésnél jobb a fv. elemzés!
Ha nincs gyök, szélsőérték akkor is van.
Nem ildomos nemlétező gyökökből megtalálni a szélsőértéket.

f( ): **R**→**R**; h(x)=–5x$^2$+21x–23

Ennek maximuma van.

Keressük meg: $\dfrac{\dfrac{-21-\sqrt{21^2-4(-5)(-23)}}{2\cdot(-5)}+\dfrac{-21+\sqrt{21^2-4(-5)(-23)}}{2\cdot(-5)}}{2}$ = 2,1

Igenám, de a **négyzetgyök alatt negatív** szám áll…

$$-5x^2+21x-23=-5\cdot\left(x^2-\frac{21}{5}x+\frac{23}{5}\right)=-5\cdot\left(\left(x-\frac{21}{10}\right)^2-\frac{441}{100}+\frac{460}{100}\right)=-5\left(x-\frac{21}{9}\right)^2-\frac{19}{20}$$

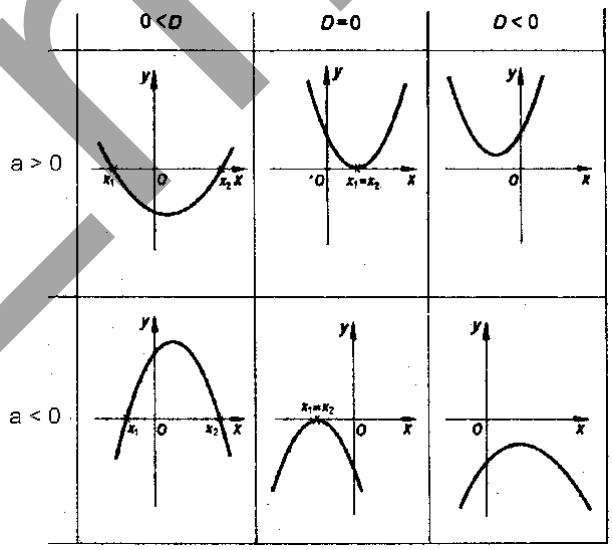
Ráadásul a behelyettesítéssel (szélsőérték!) sok elszámolás lehetséges!!!

III/3) Az $ax^2+bx+c$ – kifejezésnek maximuma v. minimuma van a főegyüttható előjele szerint

„*a*” >0 ⇒ felfele nyíló parabola, minimum

„*a*” < 0 ⇒ lefele nyíló parabola, maximum.

A főegyüttható előjele és a diszkrimináns előjele szerinti 6 állás



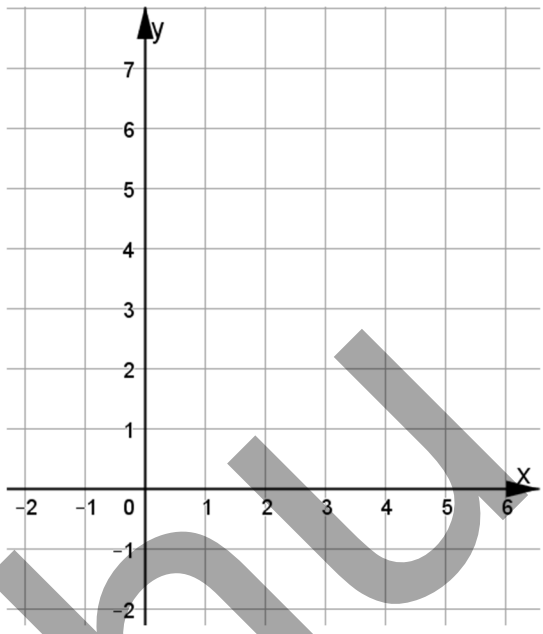

a≠0.

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=0\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

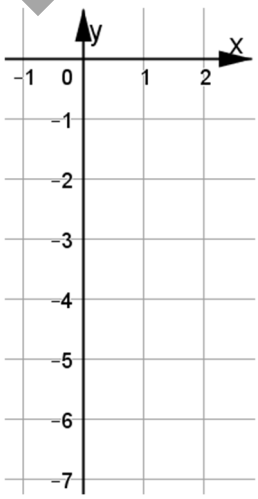
szmg.hu

III/4) Szélsőérték keresés: csakis transzformációval

f( ): [–1;5]→**R**; f(x)= $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{7}{2}$




h( ): [0;2]→**R**; h(x)=$-3x^2+5x-4$




III/5) Szélsőérték feladatok

CÉL: A KERESETT ÉRTÉKET FÜGGVÉNYÉRTÉKKÉNT KIFEJEZNI.

EGY „OKOSAN KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓ” FV-BEN KIFEJEZEM A KERESETT ÉRTÉKET, AMINEK A MINIMUMÁT V. MAXIMUMÁT KERESEM.

A KERESETT ÉRTÉKET NÉHA TÖBB VÁLTOZÓ FEJEZI KI. EKKOR – HA LEHET – ELŐSZÖR EGY KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓVAL KIFEJEZEM A TÖBBIT, S VÉGÜL EZEKET FELHASZNÁLVA FEJEZEM KI AZT AZ ÉRTÉKET, AMINEK A SZÉLSŐÉRTÉKÉT KERESEM.

A FELRAJZOLANDÓ FÜGGVÉNY ABSZCISSZÁJA AZ „OKOSAN KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓ”, AZ ORDINÁTÁJA PEDIG AZ AZ ÉRTÉK, MELYNEK A SZÉLSŐÉRTÉKÉT KERESEM.

*Az életben általában a szélsőérték-keresés fontosabb, mint pl. a zérushely. Nem az a lényeg, hogy semmit se fogyasszon az autónk – mert akkor nem ülünk bele – hanem az, hogy mennyivel menjünk, hogy a legkevesebbet fogyassza.*

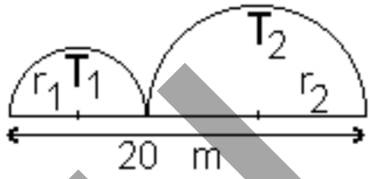
szmg.hu

a) Szélsőérték – alappélda

Alagutak: hogy érdemes két alagutat fúrni, hogy a legkevesebb térfogat anyagot kelljen megforgatni úgy, hogy a szélesség 20 m legyen.

Mo.:

Egy változó függvényében akarjuk kifejezni a többit (itt $r_1$ fv-ben $r_2$-t), majd így egy változóval felírni a területet adó fv-t.




A változóm:

Ennek függvényében kifejezem a másikat:

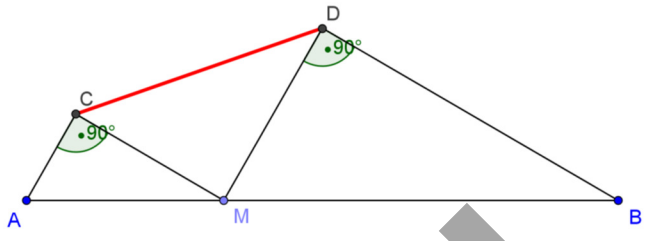
Felírjuk a terület fv-t:

Ennek a fv-nek keressük a szélsőértékét.

Fogalmazd meg ugyanezt egyenlő oldalú háromszögekkel és oldd meg!

szmg.hu

b) Saját: Egy AB szakaszon (10 cm) mozog egy M pont. Az ábra szerint két félszabályos háromszöget rajzolok. Mekkora a CD szakasz minimuma?



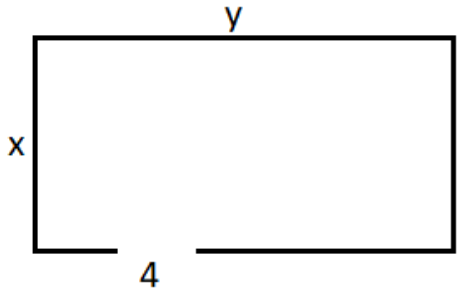

c) 36 pontot hogy kell úgy két gráfba szétosztani, hogy ha a két gráf teljes, akkor az élek száma a minimális legyen?

Mo.: Először azt nézem meg, hogyha az egyik k elemű, akkor a 36-k db-ot hogy kell szétosztani… Utána már a k függvényében fel tudom írni a függvényt.

szmg.hu

d) Malacka vásárolt 100 m kerítést, és egy 4 m széles kaput. Téglalap alakú kertet akar körülkeríteni vele, a legnagyobbat. Mitévő legyen?

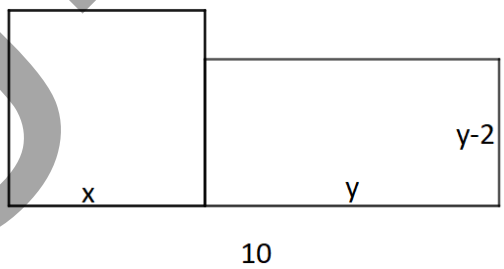
Mo.: Először is: ábra.




e) Egy 10 egység hosszú szakaszra felmérek egy négyzetet, és mellé egy téglalapot úgy, hogy a szakaszra nem illeszkedő oldala 2 cm-rel hosszabb, mint a szakaszra illeszkedő. Mikor lesz a két terület összege minimális.

Mo.:

Ábra:




Egy változó függvényében akarjuk kifejezni a többit (itt x fv-ben y-t), majd így egy változóval felírni a területet adó fv-t.

x a változó.

Kifejezzük y-t:

Felírjuk a terület fv-t:

Ennek a fv-nek keressük a szélsőértékét.

szmg.hu

# Másodfok – H: Egyenletek – egyenletrendszerek - egyenlőtlenségek

## I. Másodfokra fokra visszavezethető egyenletek - 1.

### I/1) Magasabb fokú polinom-egyenletek

$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

$27(x-5)^6 - 215(5-x)^3 - 8 = 0$

Általánosítás: $ax^{2n}+bx^n+c=0$ ahol $a \neq 0$

$y := x^n$

Ekkor az egyenlet: $ay^2+by+c=0$

### I/2) Egyenletek algebrai törtekből

$$\frac{x+1}{2x^2-x} = \frac{8x+5}{6x-3} + 2$$

szmg.hu

$$\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}+\frac{36+x}{x^3-1}=-\frac{x+6}{1-x}$$

I/3) Irracionális egyenletek – vigyázat a hamis gyökökkel!

$\sqrt{x}+1=2x$

$\sqrt{3x-8}=4$

$\sqrt{x+5}+1=x$

szmg.hu

$$\frac{\sqrt{x}+3}{2\cdot\sqrt{x}-1}=\frac{2\cdot\sqrt{x}+1}{3}$$

$$\sqrt{9-x}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{7x+1}$$

I/4) Fontos ötletek: új ismeretlenek bevezetése, teljes négyzet és összefüggések észrevétele

$$\sqrt{2x^2-9x+20}=2x^2-9x+8$$

$(2x^2+4x-10)(x^2+2x-7)=6$

$$\sqrt{x^2+x-3}+9=2x^2+2x$$

szmg.hu

I/5) Szimmetrikus egyenletek

$x^4+2x^3-13x^2+2x+1=0$

Az alapötlet

$4x^4-8x^3-5x^2+8x+4=0$

I/6) Egyéb ötletek

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$

$2x^2-6|x|-3=0$

szmg.hu

Csak az ötletet vizsgáljuk!

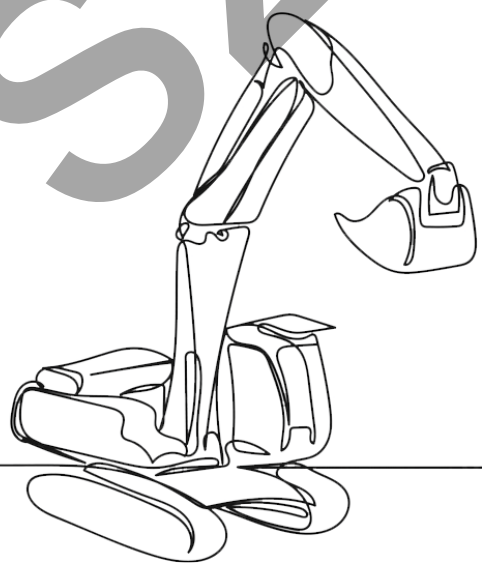
$(x^2-4x)^2+2x^2-9=8x-1$

$$\frac{3}{x^2+3x-3}-2x^2-6x-1=0$$

## II. Másodfokú egyenletrendszerek 1. – **általában behelyettesítéssel**

### II/1) Bevezető

$$\left.\begin{aligned} x+2y+4&=0 \\ xy+x&=-4 \end{aligned}\right\}$$



szmg.hu

II/2) Az állatorvosi ló

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=5 \\ xy&=2 \end{aligned}\right\}$$

1. Mo.: Behelyettesítés

2. Mo.: A második egyenletet négyzetre emelem:

3. mo.: Nagyon fontos ötlet:

Vegyük észre, a konstanson kívül minden tag azonos fokú!

4. Mo.: Az eredeti első és a második egyenlet 2-szeresének összegéből és különbségéből a következő egyenletrendszert kapjuk:

szmg.hu

II/3) Ötletelni kell…

$x^2-y^2-10x+10y=0$

$\underline{xy-6x+3y=18}$

1. Mo.: Vegyük észre, hogy mindkét egyenlet 0 rendezés után szorzattá alakítható:

2. Mo.: Ha nem vesszük észre a 2. egyenlet szorzattá alakíthatóságát:

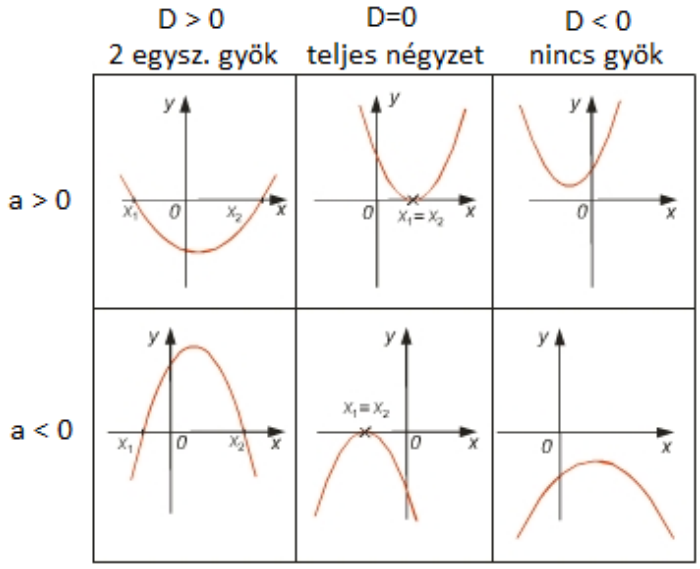
## III. Másodfokú egyenlőtlenségek 1.

ISMERETLENT TARTALMAZÓ TÉNYEZŐVEL SZINTE SOHA NEM SZOROZZUK MEG AZ EGYENLŐTLENSÉGET. RECIPROKOT PEDIG SOHA NEM VESZÜNK.

III/1) Polinom-egyenlőtlenségek: ÁBRA; MI DERÜL KI A DISZKRIMINÁNSBÓL?

Például: $-3x^2+5x-2\leq 0$

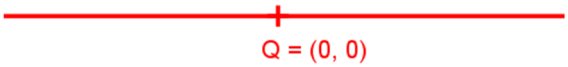
A diszkrimináns lehetséges értékei alapján „jósoljunk”:



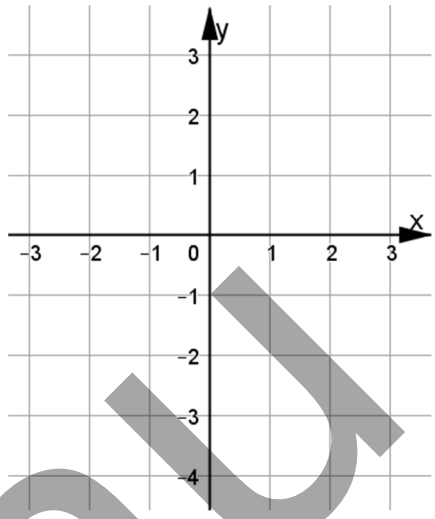

szmg.hu

III/2) Alappéldák

$x^2>4$

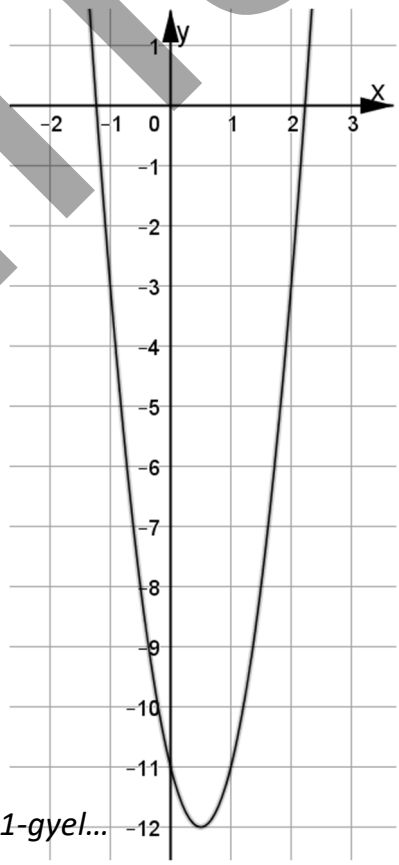



De érdemes vizsgálni a másodfokú fv. grafikonját is:




$4x^2-4x-11\leq 0$

Fogalmazzuk meg előre, hogy mit várunk:




$-2x^2-3x+2 \leq 0$

*Most véletlenül felejtsük el, hogy érdemes lenne megszorozni –1-gyel…*

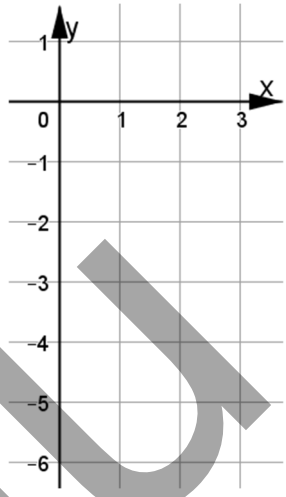
Fogalmazzuk meg előre, hogy mit várunk!

szmg.hu

III/3) Gyakorlás

$-8x^2+8\sqrt{3}\,x-6\geq 0$. Most véletlenül felejtsük el, hogy érdemes lenne megszorozni –1-gyel…

Fogalmazzuk meg előre, hogy mit várunk:

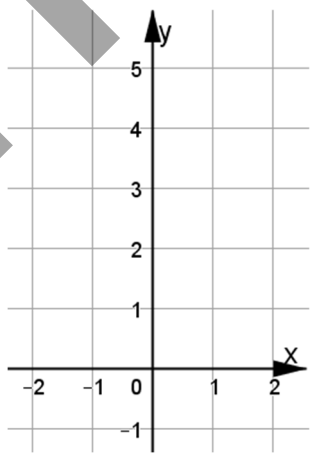



$-4x^2-4\leq 6x$

Mo.: Rendezzünk balra, és osszunk –2-vel:

$-4x^2-4\leq 6x \iff 2x^2+3x+2 \geq 0$

Fogalmazzuk meg előre, hogy mit várunk:




$-20x^2+40x\geq 50$

szmg.hu

III/4) Egyenlőtlenségek algebrai törtekből: CÉL: SZORZATTÁALAKÍTÁS!

a) A megoldás menete:

- Egy oldalra rendezni, és egy törtet gyártani belőle (szorzattá alakítás)
- Mivel egy „szorzatról van szó” (számláló és nevező) ezért már nem kell tovább alakítani (lsd. következők!)
- Kiszámolom a számláló és a nevező gyökeit (JÓ, HA NEM LÉTEZNEK LÁSD KÉSŐBB)
- Felrajzolom az előjelfüggvényt (ha kell, előtte a két másodfokút!) DE FIGYELEK, HOGY A NÉGYZETGYÖKÖS KIFEJEZÉSEK, EGYÁLTALÁN A GYÖKÖK HOGYAN HELYEZKEDNEK EL EGYMÁSHOZ KÉPEST: **MELYIK A NAGYOBB, MELYIK A KISEBB**!

  FIGYELEM: AZ ELŐJELFÜGGVÉNY „GYORSÍTHATÓ” HA FIGYELED A PARABOLA ÁLLÁSÁT ÉS TUDOD, HOGY MILYEN ELŐJELŰ LESZ A KÉT GYÖK KÖZÖTT ÉS AZOKON KÍVÜL!
- Az előjelfüggvény leolvasása után: intervallumok uniója stb.

b) Gyakorlásuk

$$\frac{3x-7}{-x^2+2x-2} \geq 2$$

Mo.: Véletlenül elfelejtünk –1-gyel szorozni…

$$\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$$

szmg.hu

Sajnos a D nem teljes négyzet:

$$\frac{x^2+3x-7}{-x^2+x+6} \geq -2$$

Add meg a következő kifejezés értelmezési tartományát: K= $\sqrt{\frac{3x+10}{2x^2+3x-2}+2}$

szmg.hu

# Másodfok – I: Paraméterek – Viète formulák – Paraméteres egyenlőtlenség, szélsőérték

## I. Paraméter 1.

FIGYELEM: PARAMÉTERES EGYENLETEKNÉL FŐ CÉL: A PARAMÉTER FÜGGVÉNYÉBEN – AMELY PARAMÉTER BE KELL HOGY FUSSA A VALÓS SZÁMOK HALMAZÁT – KIFEJEZEM A GYÖKÖKET: JELEZVE SZÁMUKAT ÉS ÉRTÉKÜKET!

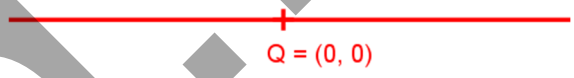
I/1) Alap: a gyökök számát (is) firtató paraméteres egyenletek

Mennyi a *p*, hogy 0; 1; 2 különböző valós gyök legyen, *illetve* oldjuk meg p paraméter függvényében az egyenleteket!

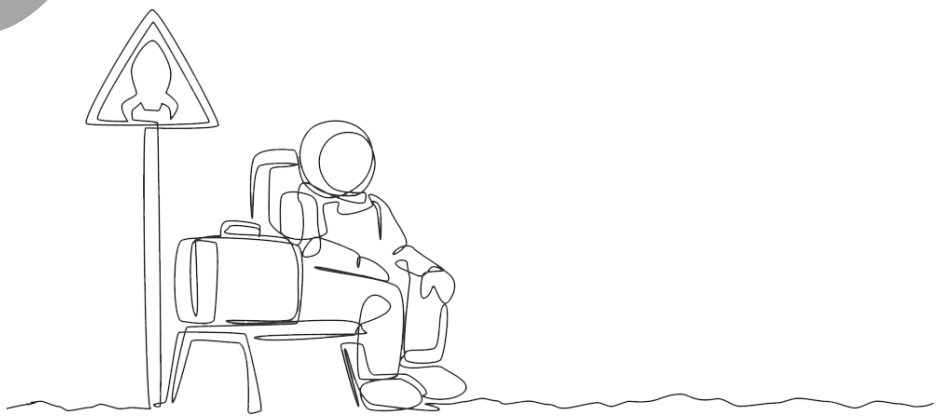
a) Oldd meg a paraméteres egyenletet, illetve p függvényében milyen gyökök vannak? (Nincs, Egy kétszeres, Két egyszeres.)

$$\frac{3px^2+4px}{p}=p \quad p\text{=paraméter}$$

Cél: *p* függvényében kifejezem a Diszkriminánst, majd a Diszkrimináns sgn-a (előjel) függvényében állapítom meg, hogy mikor hány különböző valós gyök van.



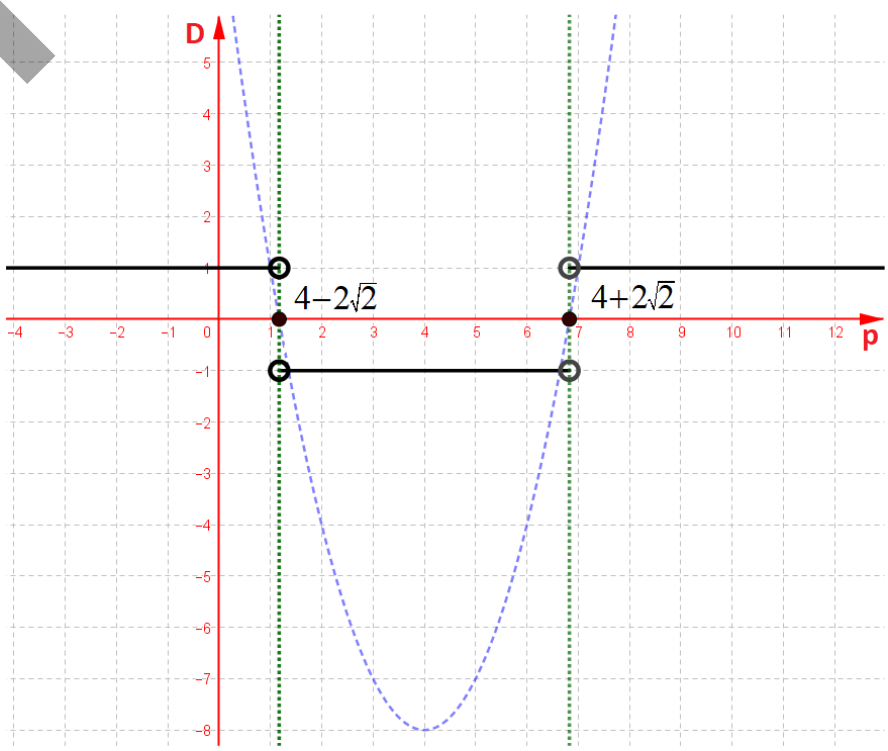

szmg.hu



b) Oldd meg a paraméteres egyenletet, illetve p függvényében milyen gyökök vannak? (Nincs, Egy kétszeres, Két egyszeres.)

$2px^2+p^2x+p^2-p=0$ $p$=param

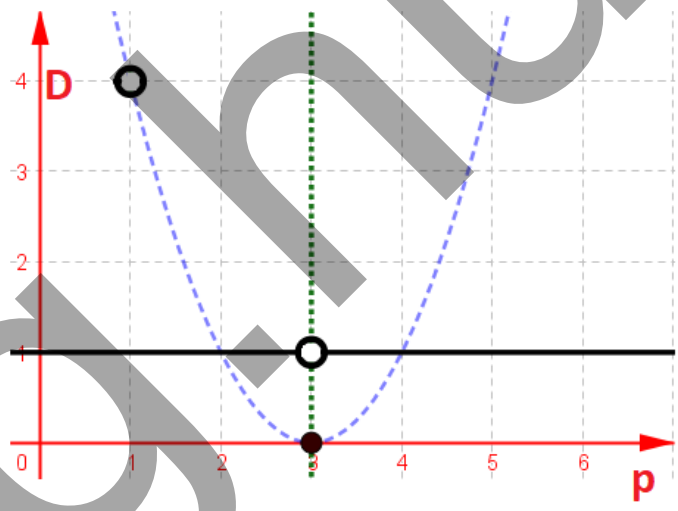
Vegyük észre, ez nem mindig 2. fokú:




szmg.hu

c) Oldd meg a paraméteres egyenletet, illetve p függvényében milyen gyökök vannak? (Nincs, Egy kétszeres, Két egyszeres.)

$2(p-1)x^2-2px+3p=3(p-1)x$ $p$=param. VIGYÁZAT!



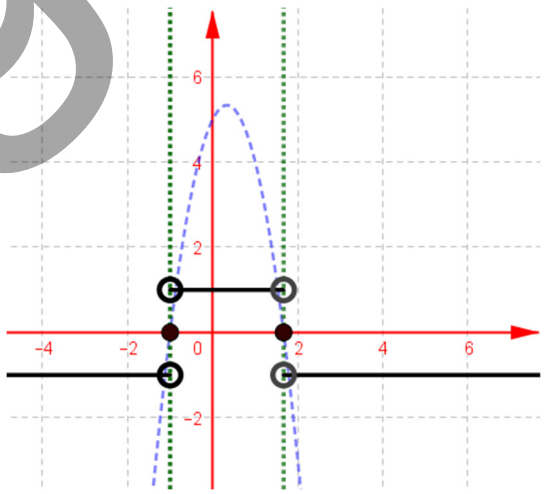

Az, hogy nem mindig másodfokú a kifejezés, az kiderül akkor, ha odafigyelünk a megoldóképletre: ahol a nevezőbe kerül egy p-t tartalmazó tényező!

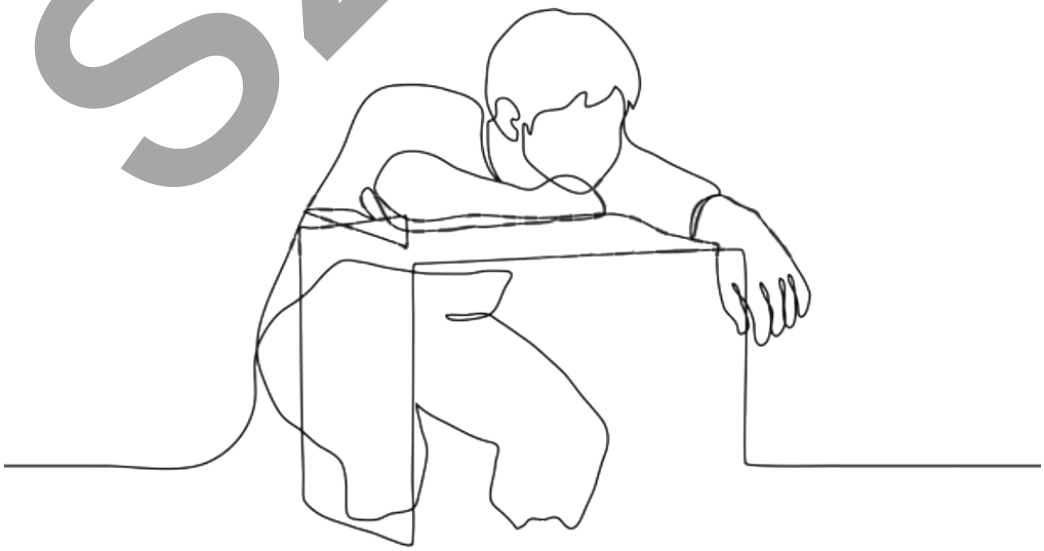
d) Adott az f( ):R→R; $f(x)=2x^2-bx+18$ fv. a) Milyen b érték esetén lesz a függvény egyik zérushelye x=3? b) Milyen b értékek esetén nincs a fv-nek zérushelye? c) Van-e olyan b érték, hogy a függvény miniumuhelye az 1?

szmg.hu

e) Állatorvosi ló: vizsgáljuk a következő paraméteres egyenletet a megoldhatóság és a megoldások szempontjából:

$px^2+px+p=x^2+3x+1$ p=param



szmg.hu

I/2) Kifejezés értékkészlet-vizsgálata paraméter segítségével:

Határozzuk meg az $\frac{x+1}{x^2+1}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x \in \mathbf{R}$.

**„Egy K kifejezés értékkészlete mindazon *p* valós számok halmaza, amelyekre a *K kifejezés* = *p* egyenletnek ∃ megoldása."**

Vagyis:

$\frac{x+1}{x^2+1}$=p egyenletet vizsgáljuk, hogy mely p-re van megoldás.

K=$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$ (Ezt lehet függvényként is!...)

## II. Viete-formulák és DISZKRIMINÁNS +Másodfok - paraméter 2.

A VIÉTE-FORMULÁK HASZNÁLATA DISZKRIMINÁNS! VIZSGÁLATTAL KEZDŐDIK.
A VIÉTE-FORMULÁT SEJTETŐ FELADATOKNÁL SOK ESETBEN EGYENLETRENDSZERT ÍRUNK
**DISZKRIMINÁNS!**

II/1) Kétféle levezetés

a) ha D≥0, vagyis ∃ mo (és a 0) ⇒

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \quad a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow \; a(x^2+(-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2)=0$

**⇒Ha a D≥0 akkor a két gyök összege: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ és szorzatuk: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$**

Látható a szoros köze a gyöktényezőkhöz!

**A Viète-formulák egy polinom gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket határozzák meg.** (Jelen esetben másodfokra nézzük.)

szmg.hu

b) ha D≥0, vagyis ∃ mo (és a≠0) ⇒

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right) + \left(-\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(-\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

c) Konkrétan példán

$3(x-2)(x+5)=0 \Leftrightarrow 3x^2+9x-30=0$

Tehát a két gyök összege: $-\frac{9}{3} = -3$

a két gyök szorzata: $\frac{-30}{3} = -10$

d) ☠ VESZÉLY ☠ VESZÉLY ☠ VESZÉLY ☠ VESZÉLY☠

Írd fel a következő egyenlet gyökeinek összegét és szorzatát, anélkül, hogy kiszámolnád a gyököt!: $3x^2-6x+4=0$

e) Add meg a következő másodfokú egyenlet gyökeinek összegét, illetve szorzatát!

$2x^2+5x-7=0$

II/2) Gyakorlás

a) Mikor van két különböző előjelű gyöke egy másodfokú egyenletnek?

Mo.: $ax^2+bx+c=0$

szmg.hu

b) Írj föl olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $x_1=-3/2$ $x_2=4$

Gyöktényezősen szorzatként:

Viéte – polinom formában (érdemes: a:=1)

II/3) Egy egyenlet gyökei közti kapcsolatok

a) Összefüggés a két gyök között

Adott a $3x^2-8x+c=0$ c=param. egyenlet. Kell $c\rightarrow x_1=3x_2$ ☠ VESZÉLY ☠

1. Mo.: Viète formulák: Cél: egyenletrendszer. **HA D≥0 !**

2. Mo.: Gyökök megkeresésével:

b) Adott az egyik gyök

$x^2-7x+p^2-5p+6=0$, $x_1=1$ Mennyi a paraméter? (kétféleképp is lehet)

szmg.hu

c) Összefüggés a két gyök között

$2x^2-11x+m=0$ m=param. és $2x_1-x_2=2$ Kell m.

d) Gyökök előjele

Adott a $4cx^2-8cx+c^2=0$ egyenlet. Mennyi legyen a *c*, hogy a) két különböző előjelű gyök legyen; b) két egyenlő gyök legyen?

e) Gyökök négyzetösszege

$8x^2-20x+11=0$ Mennyi $x_1^2+x_2^2$?

$3x^2-18x+33=0$ Számoljuk ki $x_1^2+x_2^2$ összeget!

$(t-1)x^2-3tx=-4t-3$ Mennyi a t, ha a gyökök négyzetösszege = 14

szmg.hu

f) Egyéb kifejezések gyökökből

Adott a $2x^2–4x–20=0$ egyenlet. A két gyök $x_1$ és $x_2$.
Számold ki:

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=?$ $x_1^4+x_2^4=?$

$2x^2–3x–5= 0$ Mennyi $x_1^3+x_2^3$?

g) Két egyenlet gyökei közti összefüggés

5-ösöm lesz: 85/11: A $p$ és $q$ olyan való számok, hogy az $x^2+px+q=0$ és az $x^2–p^2x+pq=0$ egyenlet gyökei is valósak, mégpedig az utóbbi egyenlet gyökei eggyel nagyobbak az előbbi egyenlet gyökeinél. Számítsuk ki $p$ és $q$ értékét!

szmg.hu

## III. Egyenlőtlenség 2: Egyenlőtlenség és szélsőérték paraméterrel

### III/1) Értelmezési tartomány keresés

Az *a* mely értékeinél van értelme az alábbi kifejezésnek? $\frac{1}{\sqrt{6a^2+a-2}}$

### III/2) Paraméteres 2. fokú egyenlőtlenség $\forall$ $x \in$ **R**-re igaz

Mennyi a *k* paraméter értéke, hogy a következő egyenlőtlenség $\forall$ $x \in$ **R**-re igaz legyen.

$x^2-2kx+k(2k+1)\geq 2$ *k*=param.

Mennyi a *k* paraméter értéke, hogy a következő egyenlőtlenség $\forall$ $x \in$ **R**-re igaz legyen.

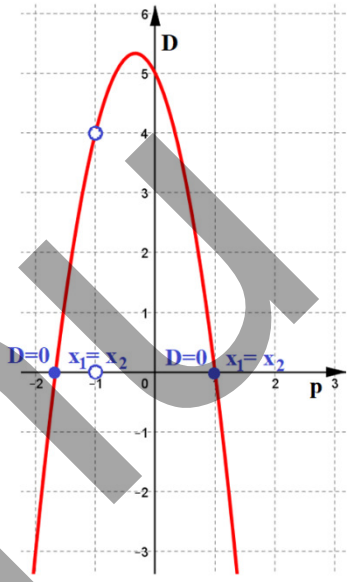
$kx^2-2x+\frac{1-k}{k}<0$ *k*=param.

szmg.hu

III/3) Gyökök egyéb függése a paramétertől:

a) Számuk: Diszkriminánsra egyenlőtlenség!

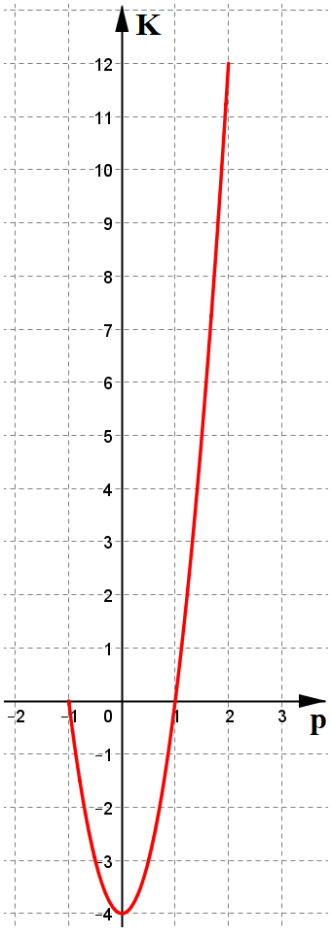
Adott a $(p+1)x^2-(3p+1)x+3p-1=0$ $p$=param egyenlet. A $p$-től függően hány és milyen gyökök vannak?




b) Gyökök négyzetösszegének stb. szélsőértékének vizsgálata paraméterrel!

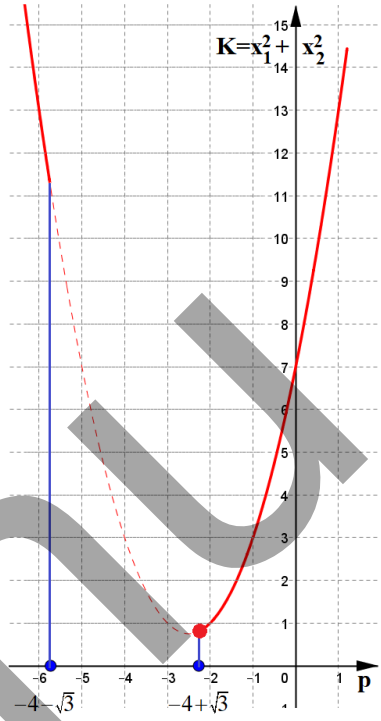
Adott a következő paraméteres egyenlet: $x^2-2(p+1)x+2p^2+p-1=0$

A **K**$=2x_1x_2-(x_1+x_2)$ a $p$ paraméter mely értékeire lesz minimális és maximális, és mik ezek a szélsőértékek?




szmg.hu

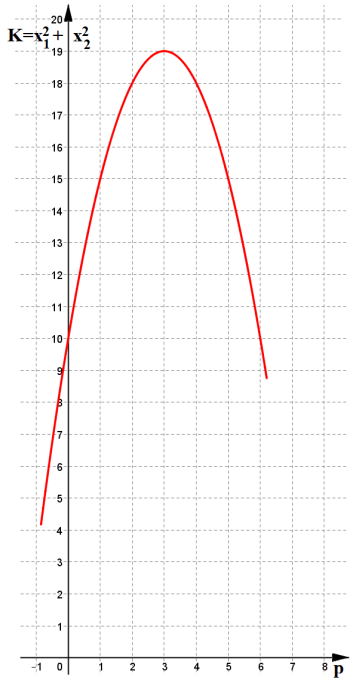
Adott a köv. param. egyenlet.: $x^2+px+x=(3/2)p+3$
Mely p-re veszi föl két gyök négyzetösszegének a minimumát és az mennyi.




Adott a következő paraméteres egyenlet: $x^2+px-2x=3+5p-p^2$.

Mely p-re veszi föl a két gyök a négyzetösszegének a maximumát és az mennyi.

Mo.:




szmg.hu

III/4) Paraméter függése gyökök helyzetétől

Határozzuk meg az $x^2+bx+4=0$ egyenletben úgy a b paramétert, hogy:

a) Mindkét gyök 1-nél kisebb legyen

b) Az egyik gyök 3-nál nagyobb, a másik 3-nál kisebb legyen

c) Minkét gyök a ]1;3[ nyílt intervallumban legyen

szmg.hu

# Másodfok – J: Egyenletrendszerek, szövegesek, egyéb feladatok

## I. Egyenletrendszerek 2.

I/1) Valamelyik egyenletben ∀ tag másodfokú:

a) $$\left.\begin{aligned} 6x^2+xy-2y^2&=0 \\ 2x^2-y^2+2x+3y&=6 \end{aligned}\right\}$$

b) $x^2-3xy+y^2=-1$
$\underline{3x^2-xy+3y^2=13}$

c) $$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}&=\frac{34}{15} \\ x^2+y^2&=34 \end{aligned}\right\}$$

szmg.hu

I/2) Egyéb ötletek

a) Téglatest oldallapjai: $T_1=72$; $T_2=96$; $T_3=108$ V=? és a,b,c=?

b) $x^3+y^3=35$

$\underline{x^2y+xy^2=30}$

c) $$\left.\begin{aligned} &x+y+\sqrt{x+y-2}=14 \\ &\frac{x^2y^2}{5}-xy=10 \end{aligned}\right\}$$

szmg.hu

d) $$\left.\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{x+3}}+\frac{10}{\sqrt{y-1}}&=5{,}25\\ \frac{8}{\sqrt{x+3}}+\frac{10}{\sqrt{y-1}}&=6\end{aligned}\right\}$$

## II. Másodfokú szövegesek + másodfok a számelméletben, kombinatorikában, geometriában

### II/1) Egy ismeretlenes egyenlet

a) Számrendszer

$1520_x : 12_x = 123_x$

b) Keveréses feladat

Két db. 12-12 literes edény van. Az első tele van alkohollal (100%-os) a másik üres. Az alkoholból valamennyit átöntünk az üresbe, majd vízzel teljesen feltöltjük. Ebből a keverékből teletöltjük (vissza) az első edényt. Utána az első edény 1/4–ét átöntjük a másodikba. Ekkor az első edényben 7 liter alkohol marad. Mennyi alkoholt öntöttünk ki az első edényből először?

szmg.hu

c) Gráf

Egy osztály reggel találkozik, és mindenki mindenkivel kezet fog. Egy kétszer akkora létszámú osztály is találkozik, és ott a kézfogások száma 782-vel több lett. Hányan vannak?

II/2) Két v. több ismeretlenesek: 2. fokú egyenletrendszer

a) Együttes munkavégzés

Két ember együtt dolgozva 24 nap alatt végzene el egy munkát, azonban egymást felváltva, egymás után dolgoztak, mindketten a munka felét végezték el. Így 50 napig tartott a munka. Külön-külön az egyik és a másik hány nap alatt készült volna el a munkával?

b) 10-es számrendszer

Valamely 3 jegyű szám első jegyének duplája a második, a harmadik a másodiknál 2-vel kevesebb. A szám és a számjegyek összegének szorzata 8748. Mi ez a szám?

szmg.hu

II/3) Utazás

Az egymástól 200 km távolságra levő A és B városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy vonat. Az a vonat, amely A-ból indult, a találkozásuk után 3 órával ér B-be, a másik pedig a találkozás után 1 óra 20 perccel ér A-ba- Mekkora a vonatok sebessége?

II/4) Geometriai

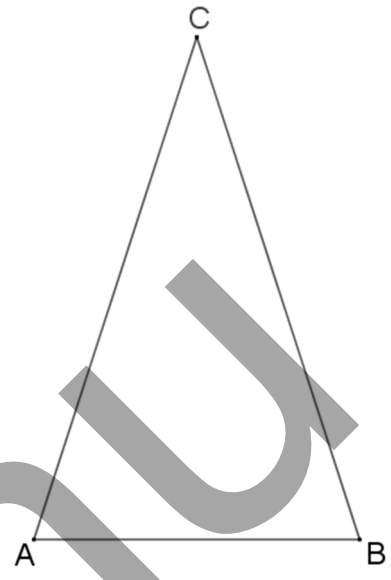
a) Terület

Egy négyzet alakú kert kerítését lebontjuk, 80 m-rel megtoldjuk és új négyzet alakú kertet kerítünk körbe. A terület a kilencszerese lett. Mekkora volt az oldala?

szmg.hu

b) Az aranymetszés háromszöge

Egy 36°, 36°, 72° - os egyenlőszárú háromszög szára 5 cm-rel nagyobb az alapnál. Mekkorák az oldalai?




c) Átlók száma

Ha egy sokszög csúcsainak számát megfelezném, akkor 315-tel kevesebb átlója lenne. Hány csúcsa van a sokszögnek?

szmg.hu

d) Derékszögű háromszög
Egy derékszögű háromszög egyik befogójánál 3 egységgel, a másiknál 10 egységgel kisebb a beírt kör sugara. Mekkorák az oldalak?

e) Körök közös érintője
Két kör középpontjának a távolsága 12 egység. A nagyobb kör sugara duplája a kisebbének. Ha nem a duplája, hanem a háromszorosa lenne, akkor a közös érintőszakasz 1 egységgel rövidebb lenne. Mekkorák a sugarak?

f) Kombinatorika
Egy lóversenyre ha eggyel többen jelentkeznek, akkor az első három helyezett 630-cal többféleképp jöhetett volna ki, mint eredetileg. Hány ló indult eredetileg?

szimg.hu

*Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©*