Matematika

Függvények-Egyenletek – 2.

HF Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

Matematika

Függvények – Egyenletek - 2

HF Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022. szeptember

szmg.hu

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék ... 3
Másodfok – A-B: Ismétlés - Merőleges affinitás; Algebra ... 9
I) Merőleges affinitás ... 9
I.1) Mely tulajdonságaiban különbözik a merőleges aff. a tengelyes tükrözéstől? ... 9
I.2) Merőleges affinitás – szerkesztés ... 9
I.3) Merőleges affinitás – szerkesztés ... 9
II) Az egész kitevőjű hatványok ismétlése ... 9
II.1) Pozitív egész kitevőjű hatványok ... 9
II.2) Az egészkitevőjű hatványok ... 9
II.3) Tételek: negatív kitevőre is működnek ... 10
II.4) Gyakorlás ... 10
III) Algebrai kifejezések – zárójelfelbontás – szorzattá alakítás ... 10
III.1) Zárójelfelbontás. Amit lehet, fejben! ... 10
III.2) Alakítsd szorzattá ... 11
IV) Algebrai törtek ... 11
IV.1) Egyszerűsítsünk – ahol egy változó van, ott szóban mondd meg az értelmezési tartományt ... 11
IV.2) Hozz közös nevezőre, majd ha lehet, alakíts szorzattá és egyszerűsíts ... 12
IV.3) Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél! ... 12
IV.4) Egyszerűsíts – illetve végezd el ... 13
Másodfok – C: Négyzetgyök ... 14
I) A négyzetgyök fogalma és a négyzetgyökvonás azonosságai ... 14
I.1) Definíció ... 14
I.2) Gyakorlása ... 14
I.3) Azonosságok – Szorzás – Hozd egyszerűbb alakra ... 15
I.4) Azonosságok – Osztás - Hozd egyszerűbb alakra ... 15
I.5) Azonosságok – Hatványozás – Végezd el a műveletet ... 15
I.6) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből ... 15
II) Műveletek gyökös kifejezésekkel ... 16
II.1) Kiemelés - emelj ki, amit lehet: ... 16
II.2) Vidd be a gyökjel alá (amit szabad) ... 16
II.3) Vonj össze ... 16
II.4) Négyzetgyökös kifejezések szorzása ... 16
II.5) Végezd el a műveletet, és írd föl a legegyszerűbb alakban a következő számok számértékét! ... 16
II.6) Négyzetgyökös kifejezések osztása ... 17
II.7) Alakítsd szorzattá, ha kell, egyszerűsíts! ... 17
II.8) Négyzetgyökös kifejezések hatványozása ... 17
III) A nevező gyöktelenítése: az egyik legfontosabb művelet a gyökös kifejezéseknél ... 18
III.1) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét - egytagú nevező ... 18
III.2) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét - két- v. többtagú nevező – bővítés a konjugálttal ... 18

szmg.hu

IV) Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel 19
IV.1) Gyökös kifejezések összegének négyzete 19
IV.2) Ismerd föl a teljes négyzetet a gyök alatt! 19
IV.3) Hozd a legegyszerűbb alakra 20
IV.4) Reciprok kifejezések 21
IV.5) Egyéb négyzetgyökös példák. 21
Másodfok - D: az n-edik gyök 23
I) Definíciók, példák, azonosságok 23
I.1) Bevezetés 23
I.2) Definíciók – gyakorlás 23
I.3) Vegyük észre: úgy keressük a gyököt: „leosztjuk a kitevőt” 23
I.4) A gyökvonás azonosságai 23
II) Az n-ik gyök fogalmának gyakorlása 24
II.1) Milyen a-ra igaz? 24
II.2) Emelj ki, amit lehet 24
III) Műveletek gyökös kifejezésekkel 24
III.1) Végezd el a műveletet, hozd a legegyszerűbb alakra 24
III.2) Végezd el a műveletet, hozd a legegyszerűbb alakra; emelj ki, amit lehet 25
III.3) Különböző gyökkitevős kifejezések összehasonlítása 25
IV) Gyökös kifejezések átalakításai 25
IV.1) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következőket, ha lehet, emelj ki! 25
IV.2) Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket. Minden pozitív. 25
IV.3) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket: 26
IV.4) Végezzük el a következő műveleteket – ha kell, vonj össze 26
IV.5) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét a változók megengedett értékei mellett! 26
IV.6) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét! 27
IV.7) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket 27
Másodfok – E: Függvények 29
I) Általában a függvényekről 29
I.1) Definíciók, alaptulajdonságok 29
I.2) A bijektív függvények (Injektív + szürjektív) 29
I.3) Oldd meg - másodfokú egyenletmegoldás – még megoldó képlet nélkül 29
I.4) Függvény-jellemzés + definíciók, a jellemzés szempontjai 29
I.5) Eddig tanult függvénytípusok 30
II) Függvénytranszformációk 31
II.1) A külső-belső fv. gyakorlása 31
II.2) Add meg a következő fv-ek inverzét! 32
II.3) Írd föl az alapfüggvény grafikonjának transzformációját! 32
III) Az elsőfokú törtfüggvények 32
III.1) Általános alakjuk 32
III.2) Töltsd ki a táblázatot és ábrázold és jellemezd 32
IV) A másodfokú fv. grafikonjának, a parabolának a trafói 35

szmg.hu

IV.1) A parabola definíciója, jellemzői ... 35
IV.2) Az alapfüggvény és transzformációi ... 35
V) A gyökfüggvények ... 38
V.1) Az inverz függvény (ld. Másodfok – E/II/2.) ... 38
V.2) A négyzetgyök függvény és transzformációja (ábr. jell.) ... 38
V.3) Egyéb hatványfüggvények inverzei ... 39
V.4) Gyakorlás ... 40
Másodfok – F: Egyenletek - egyenlőtlenségek megoldási módszerei ... 41
I) Egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei ... 41
I.1) Próbáld meg fejből ideírni, mikre kell figyelni egyenletmegoldásoknál! ... 41
I.2) Gyakorlás ... 41
I.3) Egyismeretlenes egyenletek ... 42
I.4) Egyenletrendszerek megoldása ... 43
II) Egyenlőtlenségek megoldási módszere ... 44
II.1) Engedélyezett, tiltott, veszélyes lépések – és az ekvivalencia ... 44
II.2) Lineáris ... 44
II.3) A nem lineárisoknál a legjobb: ... 44
III) A másodfokú függvény trafói – és a grafikus megoldás ... 45
III.1) Ábrázoljuk a másodfokú függvényeket, adjuk meg a transzformációt stb. ... 45
III.2) Grafikus megoldás ... 46
IV) Segédlet a szorzattáalakításokhoz – A Pascal háromszög illetve az azonos kitevők ... 46
IV.1) Alapok ... 46
IV.2) Azonos kitevők: ... 46
IV.3) Gyakorlásuk ... 46
Másodfok – G: Általános megoldás és a másodfokú függvény ... 47
I) A megoldóképlet és a függvény-transzformáció előkészítése ... 47
I.1) A megoldóképlet levezetése, vagyis a paraméteres másodfokú egyenlet megoldása ... 47
I.2) Példák – megoldóképlettel és megoldóképlet nélkül ... 48
I.3) Gyakorlópéldák a másodfokú egyenletekhez ... 48
I.4) Hiányos másodfokú egyenletek – aki megoldóképletet használ, az már gonoszságra is képes ... 49
II) A szorzattá alakíthatóság és a gyöktényezős alak – és szorzattá alakítás. ... 49
II.1) Emlékezzünk a megoldóképlet létrehozására ... 49
II.2) Gyakorlati alkalmazás ... 49
III) Függvényvizsgálat: a függvény állása + szélsőérték ... 51
III.1) Ábrázold, jellemezd! ... 51
III.2) Másodfokú függvény szélsőértéke - általában ... 51
III.3) Az ax^2+bx+c – kifejezésnek maximummal v. maximummal rendelkezik ... 52
III.4) Szélsőérték keresés: csakis transzformációval ... 52
III.5) Szélsőérték feladatok – Olvasd el, értsd meg! ... 52
Másodfok – H: Egyenletek – egyenletrendszerek - egyenlőtlenségek ... 56
I) Másodfokra fokra visszavezethető egyenletek - 1. ... 56
I.1) Magasabb fokú polinom-egyenletek ... 56

szmg.hu

I.2) Egyenletek algebrai törtekből 56
I.3) Irracionális egyenletek – vigyázat, hamis gyök jön be néhanapján 57
I.4) Fontos ötletek: új ismeretlenek bevezetése, teljes négyzet és összefüggések észrevétele 58
I.5) A szimmetrikus egyenletek 58
I.6) Egyéb ötletek 59
II) Másodfokú egyenletrendszerek 1. – **általában behelyettesítéssel** 59
II.1) Bevezető 59
II.2) Oldjuk meg az órán tanult ötletekkel: 59
II.3) Sokféle ötlet kellhet 60
III) Másodfokú egyenlőtlenségek 1. 60
III.1) Polinom-egyenlőtlenségek 60
III.2) Alappéldák 61
III.3) Gyakorlás 62
III.4) Egyenlőtlenségek algebrai törtekből 63
Másodfok – I: Paraméterek – Viète formulák – Paraméteres egyenlőtlenség, szélsőérték 65
I) Paraméter 1. 65
I.1) Alap: a gyökök számát (is) firtató paraméteres egyenletek 65
I.2) Kifejezés értékkészlet-vizsgálata paraméter segítségével: 69
II) Viete-formulák és DISZKRIMINÁNS + Másodfok - paraméter 2. 70
II.1) A Viète-formulák 70
II.2) Gyakorlás 70
II.3) Egy egyenlet gyökei közti kapcsolatok 71
III) Egyenlőtlenség 2: Egyenlőtlenség és szélsőérték paraméterrel 75
III.1) Értelmezési tartomány keresés 75
III.2) Paraméteres 2. fokú egyenlőtlenség $\forall x \in \mathbf{R}$-re igaz 75
III.3) Gyökök egyéb függése a paramétertől: 76
III.4) Paraméter függése a gyökök helyzetétől 78
Másodfok – J: Egyenletrendszerek, szövegesek, egyéb feladatok 80
I) Egyenletrendszerek 2. 80
I.1) Valamelyik egyenletben $\forall$ tag másodfokú, illetve egyéb ötletek 80
I.2) Egyéb ötletek 81
II) Másodfokú szövegesek + másodfok a számelméletben, kombinatorikában, geometriában 82
II.1) Egy ismeretlenes egyenlet 82
II.2) Két v. több ismeretlenesek: 2. fokú egyenletrendszer 83
II.3) Geometriai 85

szmg.hu

szmg.hu

szmg.hu

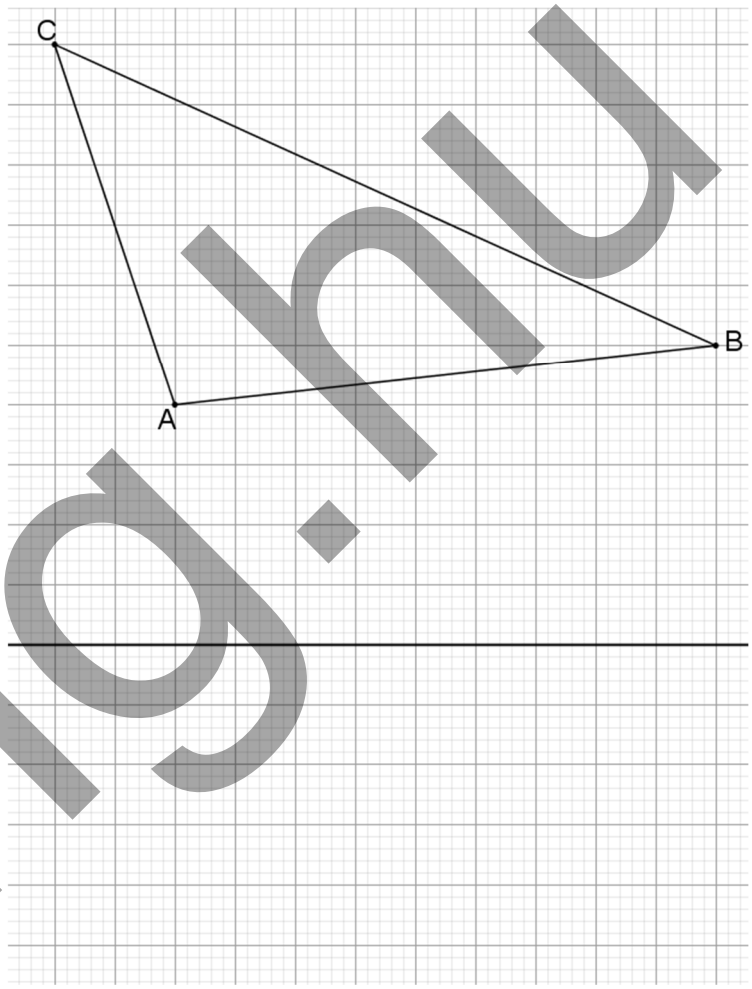
Másodfok – A-B: Ismétlés - Merőleges affinitás; Algebra

I) Merőleges affinitás

I.1) Mely tulajdonságaiban különbözik a merőleges aff. a tengelyes tükrözéstől?

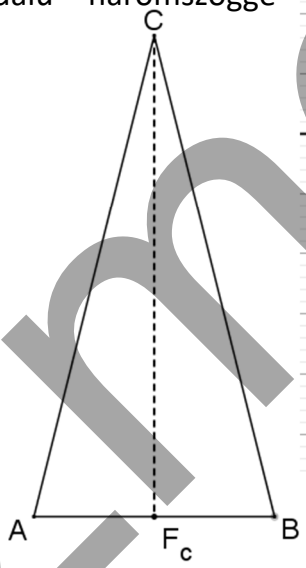
I.2) Merőleges affinitás – szerkesztés

Szerkeszd meg a háromszög $\lambda=-1/2$ arányú merőleges affin képét az egyenesre!



I.3) Merőleges affinitás – szerkesztés

Egy egyenlőszárú háromszög alapja 5 cm, az ahhoz tartozó magassága 10 cm. Milyen arányú merőlegesen affin képét kell venni az alap egyenesére, hogy egyenlőoldalú háromszöggé váljon?



szmg.hu

II) Az egész kitevőjű hatványok ismétlése

II.1) Pozitív egész kitevőjű hatványok

II.2) Az egészkitevőjű hatványok

Írásban számold ki tizedestört alakban: 7^{-1}

II.3) Tételek: negatív kitevőre is működnek

II.4) Gyakorlás

Írd fel a kifejezéseket „kanonikus alakban”, vagyis ne legyen se zárójel, se tört, és csak prím alapok legyenek!

$\left(\frac{7^{-4}}{5^{-6}}\right)^{4} =$ $\left(\frac{x^{3}}{x^{-4}}\right)^{-4} =$

$\left(\frac{32^{4}}{27^{3}}\right)^{5} =$ $\left(-\frac{12^{-3}\cdot 4^{5}}{6^{-4}}\right)^{2} =$

$\left(\left(\frac{54^{-2}}{150}\right)^{2}\right)^{-3} =$ $\left(\left(\frac{50}{98}\right)^{-1}\right)^{3} =$

$$\frac{\left(12^{3}\right)^{-1}\left(32^{4}\cdot 14^{3}\cdot 10^{-4}\right)^{3}}{120^{-5}\cdot\left(81\cdot 125^{-1}\right)^{-3}} =$$

$2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5\cdot 2^6\cdot 2^7\cdot 2^8\cdot 2^9=$

III) Algebrai kifejezések – zárójelfelbontás – szorzattá alakítás

III.1) Zárójelfelbontás. Amit lehet, fejben!

$(11x-8)^2=$ $(12x-6)^2=$ $(17x+14)(17x-14)=$

$(4x+5)^2=$ $(13x-12)^2=$ $(13x^3-11)(13x^3+11x)$

$(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)=$

Bontsd fel, vonj össze:

$-(2+x)^2-3(1-x)^2+2(1-x)(1+x)=$

$3(2x+1)(x-3)-(5-x)(5+x)-4(3x+2)^2=$

$(5x-3)(5x+3)-2(4-2x)(3x+5)=$

$(17x^2-11x)(17x^2+11x)=$

$(4a^3+5b^2)^3=$

$(7k^3+2m^2)^3=$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=$

szmg.hu

$(x+3)(x^2-3x+9)=$

$(2x-5)(4x^2+10x+25)=$

III.2) Alakítsd szorzattá

$x^3-20x^2+100x=$

$60x^2-75x-12x^3=$

$125x^3-64y^6=$

$6xy^2+8x^3+12x^2y+y^3=$

$27x^3-8=$

$81x+250x^4=$

$x^6-x^4+x^3-x=$

$16x^3-48x^2+36x=$

$3x^2-6x-189=$

$x^3+x^2+x+1=$

$6x^2-x-2=$

$x^5+32=$

$x^{2k+1}+y^{2k+1}=$

$a^4+2a^3-a^2-2a=$

$2x^7-128x=$

IV) Algebrai törtek

IV.1) Egyszerűsítsünk – ahol egy változó van, ott szóban mondd meg az értelmezési tartományt

$$\frac{8-8a^2}{7a+7}=$$

$$\frac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}=$$

$$\frac{4x^3-2x^2-6x}{48x^2-36x-16x^3}=$$

$$\frac{6x^3-19x^2+39x-36}{2x-3}=$$

szmg.hu

$$\frac{x^2+9-3x}{x^3+27}=$$

$$\frac{x^3+y^3}{x^2-x-y^2-y}=$$

IV.2) Hozz közös nevezőre, majd ha lehet, alakíts szorzattá és egyszerűsíts

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{4}{4-x^2}=$$

$$\frac{2}{4x+4}-\frac{x-1}{3x^2+6x+3}=$$

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+4}+\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x^2-4x+4}=$$

IV.3) Végezzük el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2-y^2}{15x^2+30xy+15y^2}:\frac{4x-4y}{3x+3y}=$$

$$\frac{4x^2-9y^2}{4x^2y^2}:\frac{2kx+3ky}{2kxy}=$$

$$\frac{2a^3-2b^3}{-3b-3a}\cdot\frac{6a^2-6b^2}{8ab-4a^2-4b^2}=$$

$$\frac{5x-6-x^2}{x^2+7x+12}\cdot\frac{2x^2+6x}{x^2-4x+4}=$$

szmg.hu

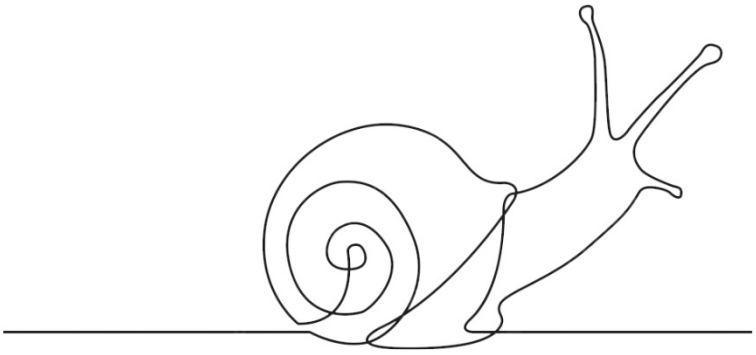
IV.4) Egyszerűsíts – illetve végezd el

$$\left(\frac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\frac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{b-1}{a}-\frac{b}{a^2}\right)=$$

$$\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right)\div\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}=$$

$$\left(a+b+\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right)\div\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=$$

szimg.hu



Másodfok – C: Négyzetgyök

I) A négyzetgyök fogalma és a négyzetgyökvonás azonosságai

I.1) Definíció

Szerkessz $\sqrt{13}$ cm hosszú szakaszt – Pitagorasz tétel segítségével. Mérd le, hány mm!

I.2) Gyakorlása

a) Hozd egyszerűbb alakra – határozd meg az ÉT-t!

$\sqrt{1024} =$ $\sqrt{7^8} =$ $\sqrt{(-23)^2} =$ $\sqrt{(-125)^6} =$

$\sqrt{(-a)^2} =$ $\sqrt{64x^2} =$ $\sqrt{32x^{10}} =$ $\sqrt{(x-3)^2} =$

$\sqrt{(2x-5)^4} =$ $\sqrt{x^2+4x+4} =$

b) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből

Írd le négy tizedesjeggyel közelítőleg a $\sqrt{2}$-t, és három tizedesjeggyel a $\sqrt{3}$-at, és tudd is őket!

c) Műveletnek csakis egyféle eredménye lehet

d) A négyzetgyök argumentuma: értelmezési tartomány. Add meg az értelmezési tartomány!

A= $\sqrt{3-x}$ B= $\sqrt{\dfrac{5-2x}{3x+2}}$

e) Vigyázat: a négyzetgyök argumentuma is, értéke is nemnegatív szám!

$\sqrt{x^6} =$ $\sqrt{18x^2-24x+8} =$

szmg.hu

I.3) Azonosságok – Szorzás – Hozd egyszerűbb alakra

$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}=$ $\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{2^3}=$

$\sqrt{800}=$ $\sqrt{50}\cdot\sqrt{32}=$

I.4) Azonosságok – Osztás - Hozd egyszerűbb alakra

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=$ $\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}=$ $\frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{7^5}}=$ $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}=$

I.5) Azonosságok – Hatványozás – Végezd el a műveletet

$\left(\sqrt{15}\right)^4=$ $\left(\sqrt{11}\right)^3\cdot\sqrt{11}=$

$\left(\sqrt{3^5}\right)^7=$ $\frac{\sqrt{27^5}}{\sqrt{243^3}}=$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)=$

I.6) A gyökvonás kivezet a racionális számok testéből

Mutasd meg, hogy rac·irrac = irrac

* Mutasd meg, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ irracionális!

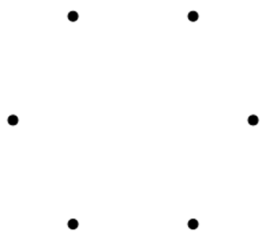
Adj meg 3 olyan irracionális számot, amelyek páronként összeadva irracionálist adnak, de mindhármat összeadva racionálisat kapunk.

Döntsd el hogy igaz v. hamis

két rac összege mindig rac
két irrac összege mindig irrac
két rac szorzata mindig rac
két rac szorzata lehet egész
két irrac szorzata mindig irrac
van két olyan irrac melyek szorzata egész
rac + irrac = mindig irrac
van olyan rac melynek reciproka irrac
van olyan irrac, melynek tizedes tört alakjában egy jegytől kezdve csak 0-ák állnak.

szmg.hu

Adott egy egység oldalú, szabályos hatszög 6 csúcsa. Csak egyenes, egyélű vonalzó használatával szerkessz hosszú szakaszt!



II) Műveletek gyökös kifejezésekkel

II.1) Kiemelés - emelj ki, amit lehet:

$\sqrt{363} =$ $\qquad$ $\sqrt{125x^3 - 25x^2} =$

II.2) Vidd be a gyökjel alá (amit szabad)

$3\sqrt{11} =$ $\qquad$ $3\sqrt{\frac{2}{3}} =$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} =$

$-5\sqrt{\frac{7}{5^3}} =$ $\qquad$ $3\sqrt{\frac{2x}{9} + \frac{4}{3}} =$

II.3) Vonj össze

$4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 2\sqrt{50} =$

$\sqrt{180} - 3\sqrt{45} - \sqrt{80} =$

II.4) Négyzetgyökös kifejezések szorzása

$\sqrt{10}\left(\sqrt{6} - \sqrt{15} + \sqrt{30}\right) =$

$2\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{54} + \sqrt{108}\right) =$

II.5) Végezd el a műveletet, és írd föl a legegyszerűbb alakban a következő számok számértékét!

$\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) =$

$\left(\sqrt{12} - 2\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{12} + \sqrt{6}\right) =$

$\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) =$

$\left(4 - \sqrt{7}\right)^2 =$ $\qquad$ $\left(2\sqrt{5} - 3\right)^2 =$

szmg.hu

$\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{12}-3\sqrt{8}\right)^2 =$

$\left(2\sqrt{6}-3\sqrt{10}\right)^2 =$

$\sqrt{23-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{23+\sqrt{7}} =$

$\left(\sqrt{9+\sqrt{17}}+\sqrt{9-\sqrt{17}}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{3\sqrt{5}+\sqrt{26}}-\sqrt{\sqrt{75}-\sqrt{26}}\right)^2 =$

$\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}-2\right)^2 =$

$\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)^2 =$

II.6) Négyzetgyökös kifejezések osztása

$\frac{3\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} =$

II.7) Alakítsd szorzattá, ha kell, egyszerűsíts!

$\sqrt{8}-\sqrt{6}+\sqrt{10} =$

$a-\sqrt{ab} =$

$\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2} =$

$\sqrt{x-y}+\sqrt{x^2-y^2} =$

$x-3\sqrt{x}-10 =$

$x^2+x-2\sqrt{x^3} =$

$\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{\sqrt{14}-\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{xy}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2y}+2x} =$

$* \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x+y-2\sqrt{xy}} =$

II.8) Négyzetgyökös kifejezések hatványozása

$\left(\sqrt{10}\right)^7 =$

$\left(-\sqrt{15}\right)^5 =$

$\left(\sqrt{3}-2\right)^3 =$

szmg.hu

$$\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^3=$$

$$\left(\sqrt{15+\sqrt{29}}-\sqrt{15-\sqrt{29}}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=$$

III) A nevező gyöktelenítése: az egyik legfontosabb művelet a gyökös kifejezéseknél

III.1) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét - egytagú nevező

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{8}}=$$

$$\frac{3+\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}=$$

$$\frac{c}{\sqrt{ab}}=$$

$$\frac{2+a}{\sqrt{a}}=$$

$$\frac{6+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=$$

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$\frac{6}{\sqrt{3\sqrt{3}}}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{3-x}}=$$

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-4}}=$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=$$

III.2) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét - két- v. többtagú nevező – bővítés a konjugálttal

$$\frac{6}{2-\sqrt{7}}=$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}-4}=$$

$$\frac{121}{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}=$$

$$\frac{20}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}=$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}=$$

$$\frac{x}{x-\sqrt{x}}=$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}=$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}=$$

szmg.hu

* $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2026\sqrt{2025}+2025\sqrt{2026}}=$

* $\sqrt{1+2024\cdot\sqrt{1+2025\cdot\sqrt{1+2026\cdot\sqrt{1+2027\cdot 20290}}}}=$

IV) Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

IV.1) Gyökös kifejezések összegének négyzete

$\left(\sqrt{3}-2\right)^2=$ $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=$

$\left(3\sqrt{2}-2\right)^2=$ $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^2=$

IV.2) Ismerd föl a teljes négyzetet a gyök alatt!

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=$

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}=$

$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$

$\sqrt{7+\sqrt{40}}=$

$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}=$

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$

* $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}=$

szmg.hu

IV.3) Hozd a legegyszerűbb alakra

Ahol szám van, és nem megy: számológéppel kiszámolod, és négyzetre-emeléssel bizonyítod

$\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$

* $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}-\sqrt{2}\sqrt{a-\sqrt{a^2-b}}=$

$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}=$

Mutasd meg, hogy: $\sqrt{35+2\sqrt{34}}-\sqrt{35-2\sqrt{34}}=2$

* Hány olyan x valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett alábbi hozzárendelésű fv. értéke egész szám: f(x)= $\sqrt{x^2+100}-\sqrt{x^2+1}$

szmg.hu

IV.4) Reciprok kifejezések

$$\left(\left(3+\sqrt{8}\right)\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)}}\right)=?$$

$$\frac{6+8\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}=$$

IV.5) Egyéb négyzetgyökös példák.

Melyik a nagyobb: $\sqrt{15}+\sqrt{7}$ v. $\sqrt{17}+\sqrt{5}$

Melyik pozitív egész n értékre igaz: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=9$

Vonj össze, egyszerűsíts: $\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}=$

$$\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)=$$

szmg.hu

$$\left(\frac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\frac{2\sqrt{p}}{p\sqrt{p}+q\sqrt{q}}\cdot\frac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}\right)\div 4\sqrt{pq}=$$

* Mutasd meg, hogyha egy háromszög oldalaira igaz:

$\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}+\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}+\sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right)\left(\frac{c-b}{c+b}\right)}=1$, akkor az derékszögű!

Hasonlítsd össze: $3\sqrt{5\sqrt{5}}$ □ $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

$1\leq a\leq 2$; $\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}+\sqrt{a-4\sqrt{a-4}}=?$

Mutasd meg, hogyha $0 < k \leq a^2 \Longrightarrow$

$$\sqrt{a^2-1}+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-2}+\sqrt{a^2+2}+\sqrt{a^2-3}+\sqrt{a^2+3}+\ldots+\sqrt{a^2-k}+\sqrt{a^2+k}<2ka$$

szmg.hu

Másodfok - D: az n-edik gyök

I) Definíciók, példák, azonosságok

I.1) Bevezetés

$7^3=$ $\sqrt[3]{125}=$ $(-3)^5=$ $\sqrt[5]{-32}=$

Alakítsd szorzattá: $a^3-1=$ $x^6-64=$

$\sqrt[4]{2^4}=$ $\sqrt[3]{a^3}=$ $\sqrt[6]{x^6}=$ $\sqrt[p]{x^{2p}}=$

I.2) Definíciók – gyakorlás

$\sqrt[3]{-729}=$ $\sqrt[4]{81}=$ $\sqrt[3]{5^6}=$ $\sqrt[9]{-10^{36}}=$

$\sqrt[5]{(-10)^{20}}=$! $\sqrt[12]{-10^{24}}=$ $\sqrt[12]{(-10)^{24}}=$ $\sqrt[4]{10^{28}}=$

$\sqrt[3]{-x^3}=$ $\sqrt[3]{-x^{12}}=$ $\sqrt[3]{-x^9}=$ $\sqrt[3]{(-x)^3}=$

$\sqrt[3]{(-2)^6}=$ $\sqrt[3]{(-x)^9}=$ $\sqrt[6]{x^{12}}=$ $\sqrt[4]{x^{12}}=$

$\sqrt[6]{x^{16}}$! $\sqrt[6]{-x^{12}}$! $\sqrt[6]{-x^{18}}$ $\sqrt[6]{(-x)^{24}}$

$\sqrt[6]{(-x)^{12}}=$ $\sqrt[4]{(-x)^{20}}=$ $\sqrt[4]{(-x)^4}=$ $\sqrt[3]{(-x)^{12}}=$

I.3) Vegyük észre: úgy keressük a gyököt: „leosztjuk a kitevőt”

$\sqrt[3]{-\frac{9}{125}}=$ $\sqrt[5]{-0,00001}=$ $\sqrt[13]{0}=$ $\sqrt[5]{2^{5^8}}=$

I.4) A gyökvonás azonosságai

$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=$ $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}=$

$\frac{\sqrt[3]{5^5}}{\sqrt[3]{5^2}}=$ $\frac{\sqrt[5]{a^{13}}}{\sqrt[5]{a^3}}=$

$\left(\sqrt[4]{3}\right)^{12}=$ $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6=$

Írd föl egy gyökjel segítségével:

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}=$ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{27}}=$

$\sqrt{\sqrt[5]{a^{10}}}=$ $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{48}}}}=$

A gyökkitevő „egyszerűsíthető”

$\sqrt[9]{125}=$ $\sqrt[10]{32}=$

$\sqrt[6]{7^3}=$ $\sqrt[8]{3^{12}}=$

$\sqrt[8]{(-3)^{12}}=$ $\sqrt[10]{(-2)^6}=$

$\sqrt[10]{(-2)^{30}}=$ $\sqrt[10]{(-3)^{15}}=$

$\sqrt[10]{(-3)^{14}}=$ $\sqrt[10]{(-3)^{12}}=$

szmg.hu

$\sqrt[10]{(-3)^{10}} =$ $\sqrt[10]{x^{25}} =$

$\sqrt[10]{x^{30}} =$ $\sqrt[10]{x^{20}} =$

Különböző gyökök szorzása

$\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^5} =$ $\sqrt[10]{x^7} \cdot \sqrt[4]{x^3} =$

Vidd be a szorzótényezőt a gyökjel alá

$3 \cdot \sqrt[5]{3^2} =$ $2 \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3}{2^3}} =$

II) Az n-ik gyök fogalmának gyakorlása

II.1) Milyen a-ra igaz?

$\sqrt[7]{a^7} = -a$

II.2) Emelj ki, amit lehet

$\sqrt[3]{5^7 \cdot x^4} =$ $\sqrt[5]{\frac{3^7}{x^6}} =$ $\sqrt[4]{k^4} =$

$\sqrt[k]{2^{3k}} =$ $\sqrt[n]{3^{2n+4}} =$ $\sqrt[n]{2^{n+1} \cdot x^{3n+5}} =$

$\sqrt[n]{2^{n+3} a^n c^{3n+2}} =$ $\sqrt[k-3]{a^{2k-1} 4^{k-1}} =$

Vidd be a gyökjel alá a szorzótényezőt

$3\sqrt[4]{3^2} =$ $2^2 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2^4}} =$ $\frac{2}{a^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{2^2}} =$

$a^2 \sqrt[3]{a} =$ $\frac{x}{y^2} \sqrt[4]{\frac{y^7}{x^2}} =$

Melyik a nagyobb: $3 \cdot \sqrt[3]{51}$ v $5 \cdot \sqrt[3]{11}$

Vond össze:

$\sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{48} =$

$\sqrt[5]{a^6} + \sqrt[5]{32a^6} - \sqrt[5]{243a^6} =$

III) Műveletek gyökös kifejezésekkel

III.1) Végezd el a műveletet, hozd a legegyszerűbb alakra

$\sqrt[5]{-4 \cdot 243} \cdot \sqrt[5]{8} =$ $\sqrt[3]{32 \cdot 25} \cdot \sqrt[3]{16 \cdot 625} =$

$\sqrt[5]{\frac{x^{13} y^6}{98}} \cdot \sqrt[5]{\frac{x^7 y^4}{2^4 \cdot 343}} =$ $\sqrt[3]{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{\frac{234}{512}} =$

$\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{x^2 + x + 1} =$ $\sqrt[3]{\sqrt{22} - 7} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{22} + 7} =$

szmg.hu

III.2) Végezd el a műveletet, hozd a legegyszerűbb alakra; emelj ki, amit lehet

$\left(\sqrt[3]{7^2}\right)^4 =$

$\left(\sqrt[4]{27x^{-6}}\right)^3 =$

$\left(\sqrt[5]{625\cdot 8\cdot x^3}\right)^3 =$

$\left(\frac{2x}{3y^2}\sqrt[5]{\frac{729y^{13}}{64x^7}}\right)^4 =$

$\left(\sqrt[5n]{7^2}\right)^{4n} =$

$\left(\sqrt[4k+3]{8^{k+3}}\right)^5 =$

$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=$

$\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{x^3y}+\sqrt[5]{x^2y^2}-\sqrt[5]{xy^3}+\sqrt[5]{y^4}\right)=$

III.3) Különböző gyökkitevős kifejezések összehasonlítása

Melyik a nagyobb: $3\cdot\sqrt[3]{3}$ v $\sqrt{17}$

IV) Gyökös kifejezések átalakításai

IV.1) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következőket, ha lehet, emelj ki!

$\sqrt{\sqrt[3]{2^7}} =$

$\sqrt[3]{2^2\sqrt[3]{2}} =$

$\sqrt[4]{3^3\sqrt[3]{3^2}} =$

$\sqrt[5]{\frac{9}{8}\sqrt[3]{\frac{16}{243}}} =$

$\sqrt[6]{2^5\cdot\sqrt[5]{2^6}} =$

$\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^4}} =$

$\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} =$

$\sqrt{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[8]{a^7}}} =$

IV.2) Írjuk fel kisebb kitevőjű gyök segítségével a következő kifejezéseket. Minden pozitív.

$\sqrt[12]{81\cdot x^8} =$

$\sqrt[20]{64^5x^{40}343^4} =$

$\sqrt[8]{16x^{10}} =$

$\sqrt[2^5]{3^{24}\cdot x^{40}} =$

szmg.hu

IV.3) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket:

$\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt{2}=$

$\sqrt[6]{4^5}\cdot\sqrt[9]{8^5}=$

$\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}\cdot\sqrt[10]{\frac{y^5}{x^5}}=$

$\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}=$

$\sqrt[54]{\frac{x^6}{y^6}}\cdot\sqrt[12]{\frac{y^{14}}{x^{14}}}=$

$\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}\sqrt[8]{\frac{y^7}{x^7}}=$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\sqrt[6]{b}=$

$\sqrt[60]{4^{20}}\cdot\sqrt[50]{32^3}=$

$\sqrt[4]{125}\sqrt[6]{5}\sqrt[9]{25}=$

$\sqrt[2]{2}\sqrt[2^2]{2}\sqrt[2^3]{2}=$

IV.4) Végezzük el a következő műveleteket – ha kell, vonj össze

$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}\right)=$

$\left(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{10^2}\right)=$

$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{9}\right)^3=$

$\sqrt[4]{\sqrt{22}-\sqrt[4]{36}}\sqrt[4]{\sqrt{22}+\sqrt[4]{36}}=$

$\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^3=$

$\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^7}\right)\left(\sqrt{x^3}-\sqrt[6]{x}\right)=$

IV.5) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét a változók megengedett értékei mellett!

$\frac{6}{\sqrt[3]{3}}=$

$\frac{15}{\sqrt[5]{3^2}}=$

$\frac{15}{\sqrt[4]{3\cdot 5^3}}=$

$\frac{3x^2}{\sqrt[3]{9\cdot 5}\cdot\sqrt[5]{3^3x^2}}=$

$\frac{x^2-16}{\sqrt[3]{x-4}}=$

$\frac{x^4-4}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=$

$\frac{x^3-y^3}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}=$

szmg.hu

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7\cdot\sqrt[4]{7}}}=$$

$$\frac{xy^2}{\sqrt[4]{x^2y\cdot\sqrt[6]{xy^2}}}=$$

IV.6) Gyöktelenítsük a tört nevezőjét!

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}=$$

$$\frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x^2}-2}=$$

$$\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=$$

$$\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}=$$

$$\frac{a^2-4}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}=$$

IV.7) Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket

* Számold ki a pontos értékét: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2}}=$

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(a^2-b^2\right)^4}{(a+b)^8}}=$$

szmg.hu

Hozd egyszerűbb alakra $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)=$

K={x∈ **R** | x=$a+b\sqrt{2}$, a∈ **Z**;b∈ **Z**}.

Vagyis K az a halmaz, amelynek elemei ilyen alakúak pl.: $3-5\sqrt{2}$

Tartalmazza-e K a természetes számokat?

Mutasd meg, hogy az összeadás, kivonás, szorzás nem vezet ki ebből a számkörből (bármely két elem összege, különbsége, szorzata is elem)

Mutasd meg, hogy a $\sqrt{17-12\cdot\sqrt{2}}$ is eleme-e K-nak!

Keress olyan H-beli elemet, melynek reciproka is elem!

* Mutasd meg, hogy a $3-2\sqrt{2}$ bárminek osztója, vagyis bármelyik $a+b\sqrt{2}$ alakú számot elosztva vele $a+b\sqrt{2}$ alakú számot kapunk!

* Mutasd meg, hogyha a és b ∈ **Q**, akkor az osztás sem vezet ki ebből a körből!

szmg.hu

Másodfok – E: Függvények

I) Általában a függvényekről

I.1) Definíciók, alaptulajdonságok

I.2) A bijektív függvények (Injektív + szürjektív)

Adj meg egy olyan alaphalmazt, amelyen a következő függvények injektívek (kölcs. egyért.)!

f( ): R→R; y=|x|

g( ): R→R; y=int(x) / egészrész

h( ): R→R; y=frac(x) / törtrész

i( ): R→R; $y=(x-3)^2$

j( ): R→R; y=sgn(x)

I.3) Oldd meg - másodfokú egyenletmegoldás – még megoldó képlet nélkül

$6x^2 - 76x + 230=0$

$5x^2 = 7x - 3$

$6x^3 - 6x^2 + x=0$

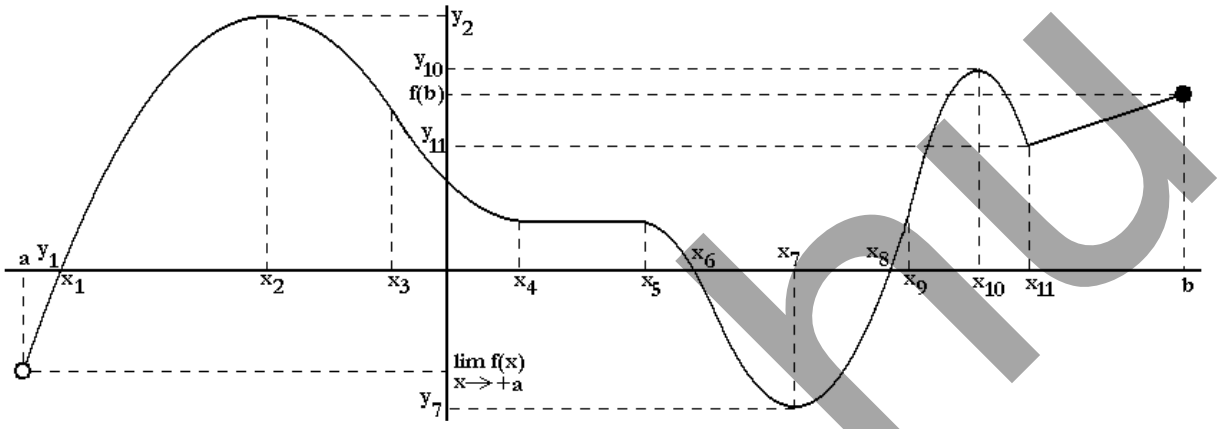
I.4) Függvény-jellemzés + definíciók, a jellemzés szempontjai

Add meg a következő hozzárendelésű fv. értelmezési tartományát: $y=\sqrt[4]{\frac{x^2-4}{x+3}}$

szmg.hu

Add meg a következő hozzárendelésű fv. fixpontját/fixpontjait: $y = \frac{x+4}{x+1}$

Keresd ki a megfelelő intervallumokat, pontokat, és tudd, hogy mit jelent a tulajdonság!



Min. hely: Min. érték: Max. hely: Max. érték:

Intervallum, ahol a fv. szig. mon. nő.:

Intervallum, ahol a fv. mon. csökken:

Keresd meg az ábrán a P(fixpont;fixpont)-ot.

Lok. max. hely: Lok.max. érték:

I.5) Eddig tanult függvénytípusok

a) Elsőfokú

Ábrázold és jellemezd: f( ):[–3;5]; y= –2x+1

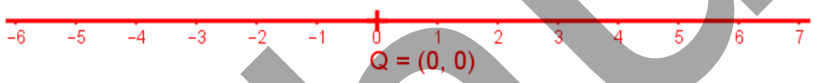
szmg.hu

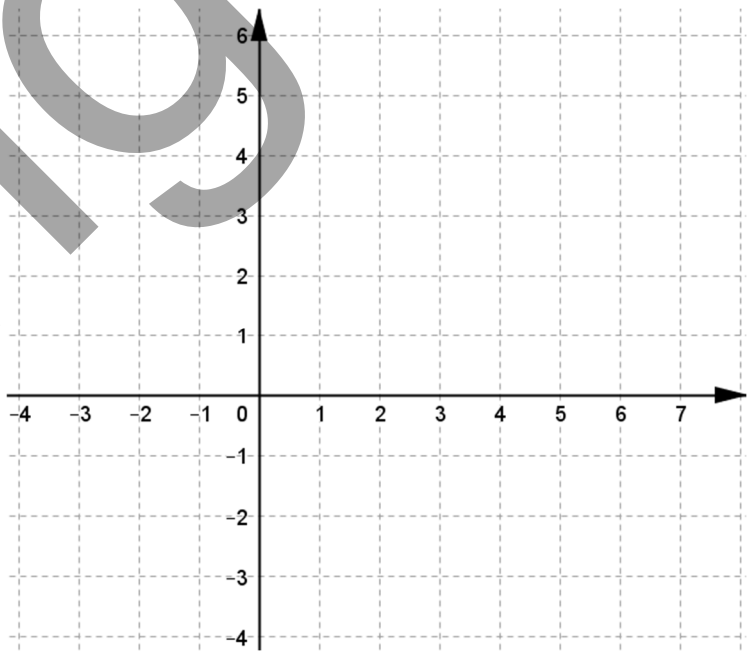
b) Az intervallumonként lineáris v. lineárissá tehető fv-ek

Mennyivel egyenlő:

[2,4]= {–2,7}= $\left\{-\frac{27}{5}\right\}=$ $\left\{-\frac{23}{7}\right\}=$

Ábrázold és jellemezd: f( ):R →R; $y=2\left|\frac{1}{2}-x\right|-\left|-\frac{3x}{2}-2\right|$





II) Függvénytranszformációk

II.1) A külső-belső fv. gyakorlása

f( ): x^2 *g*( ): [x] *h*( ): x–5 *j*( ): 2*x*

f∘g∘h= j∘g∘h= h∘g∘f∘j= f∘g∘j∘h=

Hogy áll elő:

2x–10: $[x-5]^2$: $4x^2-5$:

szmg.hu

II.2) Add meg a következő fv-ek inverzét!

$f(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ y=3x+5$ $\qquad$ $g(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ y=\dfrac{2x-1}{x+3}$

II.3) Írd föl az alapfüggvény grafikonjának transzformációját!

$f(\ ): 3[x]+2$ Trafó (az egészrészből):

$g(\ ): 2x^2-4$ Trafó (az x^2-ből):

$h(\ ): -\dfrac{2}{5}x^2+3$ Trafó(az x^2-ből):

Írd föl az alapfüggvény grafikonjának transzformációját!

$f(\ ): (x-2)^2$ Trafó (az x^2-ből):

$g(\ ): (3x^2)+4$ Trafó (az x^2-ből):

$h(\ ):3[x-3,5]+2$ Trafó (az egészrésből):

$k(\ ): -4(x-3)^2+5$ Trafó (az x^2-ből):

$m(\ ): 2\{x/2+3\}-1$ Trafó (a törtrészből):

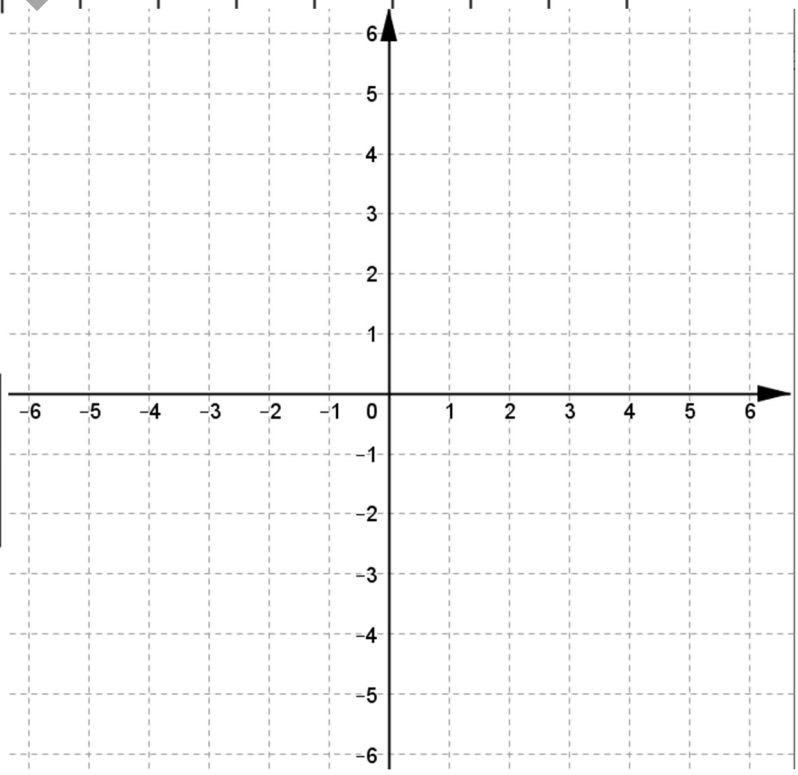
III) Az elsőfokú törtfüggvények

III.1) Általános alakjuk

III.2) Töltsd ki a táblázatot és ábrázold és jellemezd

a) $f(\ ):\mathbf{R}/\{0\} \to \mathbf{R};\ y=1/x$

x	-4	-2	-1	-0,5	-1/3	-1/4	1/4	1/3	0,5	1	2	3	4
y													



$D_f=$

ZH:

Aszimptoták:

]-∞;0[	[0]	]0;∞[

$R_f=$

szmg.hu

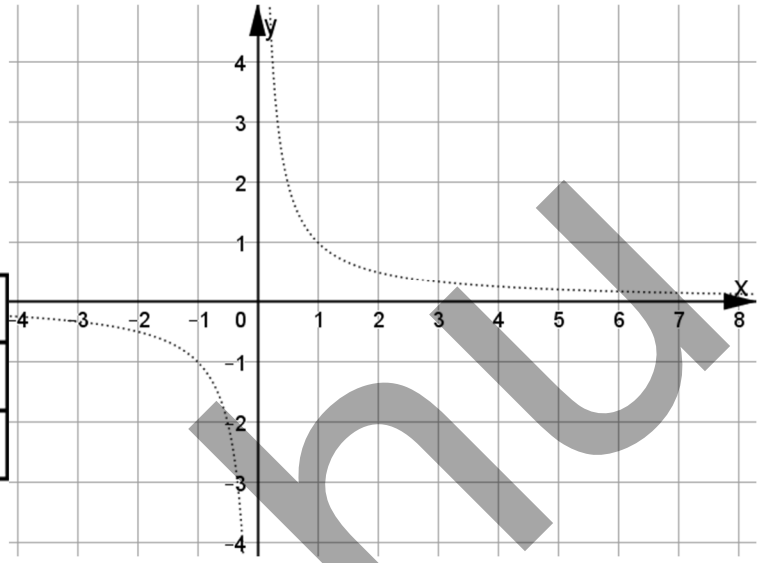
b) Ábrázold, jellemezd

g( ):**R**→**R**; $y = \frac{2}{x-3}$ (alapfüggvény ábrázolva)

D_g=

ZH:

Trafó



Alak:

R_g=

Aszimptoták:

c) Hogy találom meg a két aszimptotát?

Hozd a hozzárendelést az $y = a + \frac{\frac{b}{c}}{x+d}$ alakra, és add meg a két aszimptotát!

$y = \frac{3}{2x-4}$

$y = \frac{x-5}{x-4}$

$y = \frac{2x+1}{x+3}$

$y = \frac{2x-4}{3x-2}$

szmg.hu

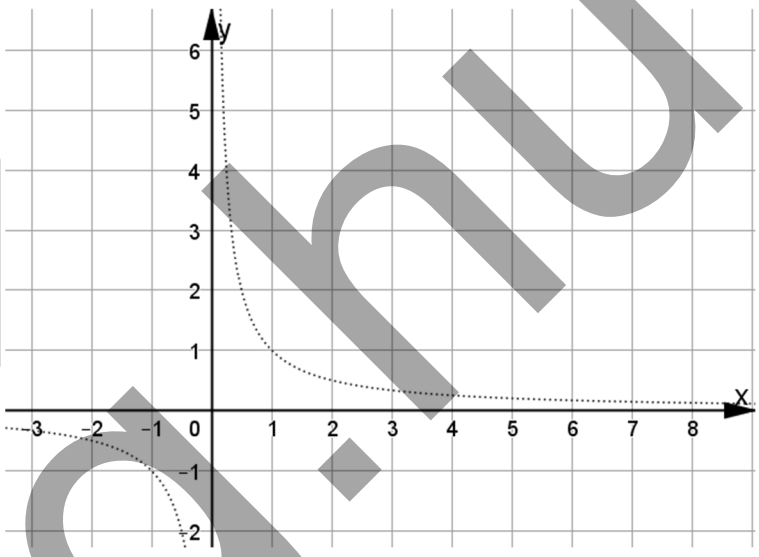
d) Ábrázold, jellemezd

g( ):**R**→**R**; $y = \dfrac{3x-2}{2x-3}$ (alapfüggvény ábrázolva)

D_g=

ZH:

Trafó



Alak:

R_g=

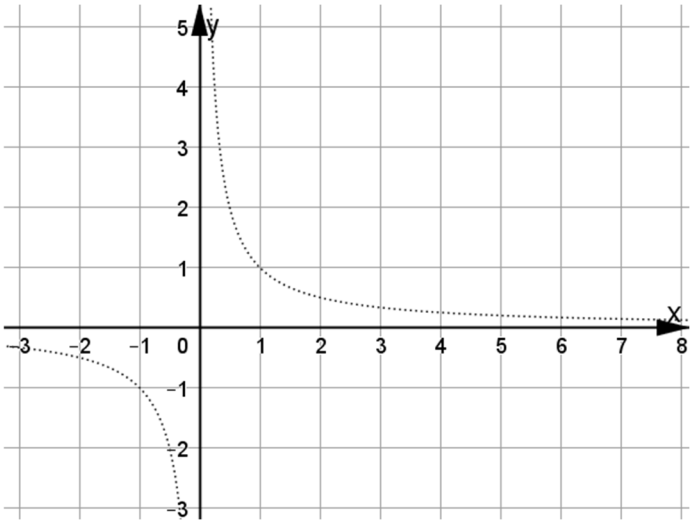
Aszimptoták:

h( ):**R**→**R**; $y = \dfrac{x-5}{2x-6}$ (alapfüggvény ábrázolva)

D_g=

ZH:

Trafó



Alak:

R_g=

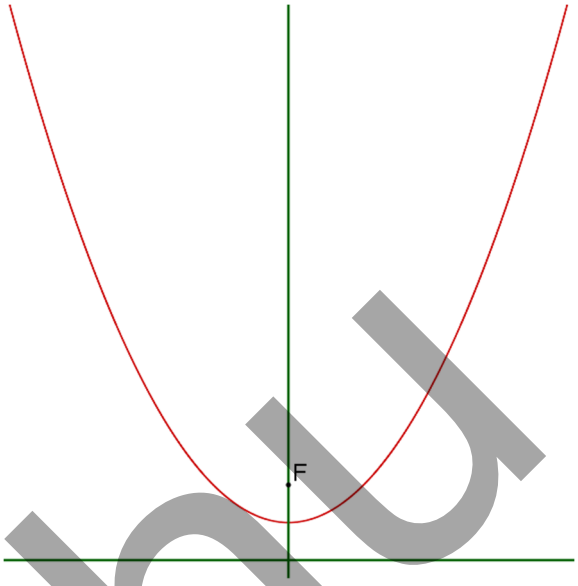
Aszimptoták:

szmg.hu

IV) A másodfokú fv. grafikonjának, a parabolának a trafói

IV.1) A parabola definíciója, jellemzői

Add meg a parabola fontos adatait, írd rá az ábrára, egy pontjához húzd be a vezérsugarakat!

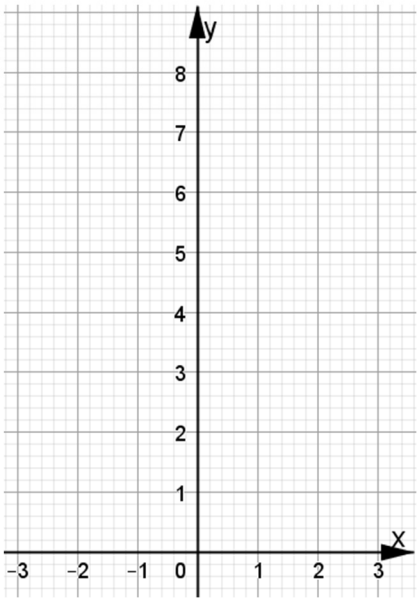


IV.2) Az alapfüggvény és transzformációi

a) Töltsd ki a táblázatot, rajzold fel az alapfüggvényt!

x	-3	-2	-1,8	-1,5	-1,2	-1,1	-1	-0,9	-0,7	-0,5	-0,2	-0,1	0
y													

x	0	0,3	0,6	0,8	1	1,3	1,6	1,9	2	3
y										



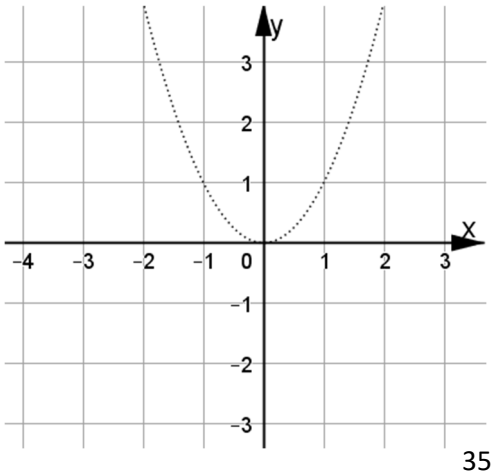
b) Add meg a trafót, csúcspontot, ábrázold! (alapfv. ábrázolva)

f( ): **R**→**R**; $y = -\frac{x^2}{3} + 1$

Trafó:

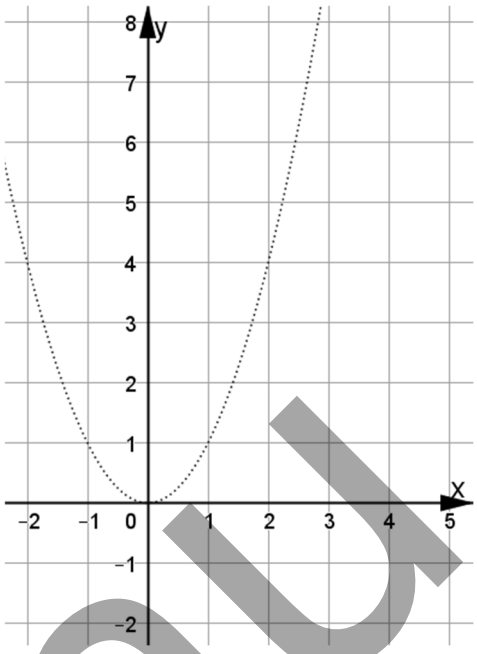
A csúcspont C(;)

Alak:



szmg.hu

g( ): **R**→**R**; $y=\left(\sqrt{2}\cdot x-\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2-1$



Trafó:

A csúcspont C(;)

Alak:

Oldd meg:

$3x^2-4x+1=0$ $3x^2-2x+1=0$ $3x^2-5x-1=0$

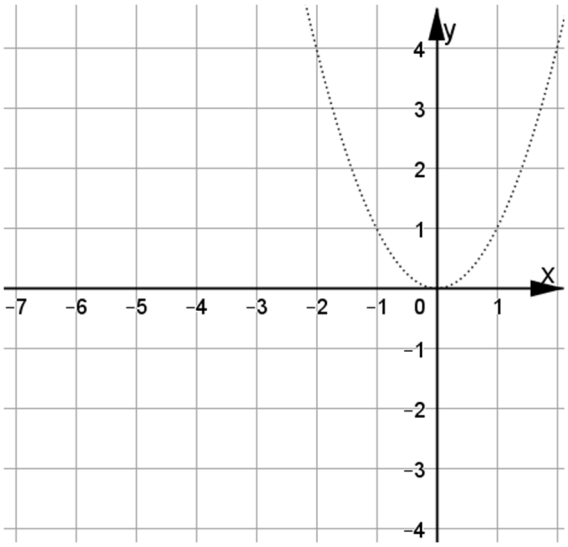
c) Másodfokú polinomfüggvény csúcsponti egyenletre történő hozása

f( ):[−6;−2]→**R**; $y=\frac{x^2}{2}+3x+1$

D_f=

Nem periodikus

ZH:



Trafó:

Menet:

R_f=

Alak:

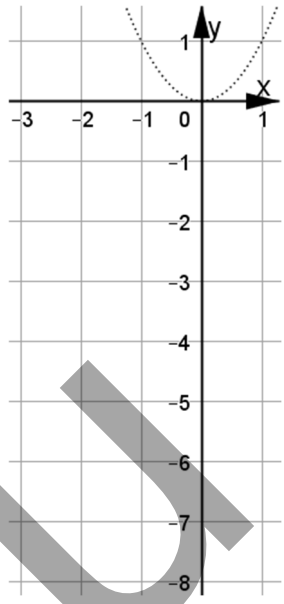
szmg.hu

$g(\ ):[-2;1] \to \mathbf{R}$; $y = -2x^2 - 3x - 2$

$D_f =$

Nem periodikus

ZH:

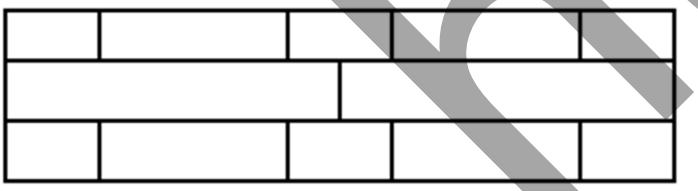


Trafó:

Menet:

$R_f =$

Alak:



d) Függvény szélsőértékének függése az együtthatóktól, , mint paramétertől

$f(\ ):\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $y = ax^2 - 10x - 2$ Mennyi legyen az „a”, hogy a szélsőértékét az x=2 helyen vegye fel?

$g(\ ):\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $y = x^2 + px + q$ Mennyi legyen p és q, hogy a függvény minimumhelye a –3 helyen legyen, minimum értéke pedig +8?

szmg.hu

V) A gyökfüggvények

V.1) Az inverz függvény (ld. Másodfok – E/II/2.)

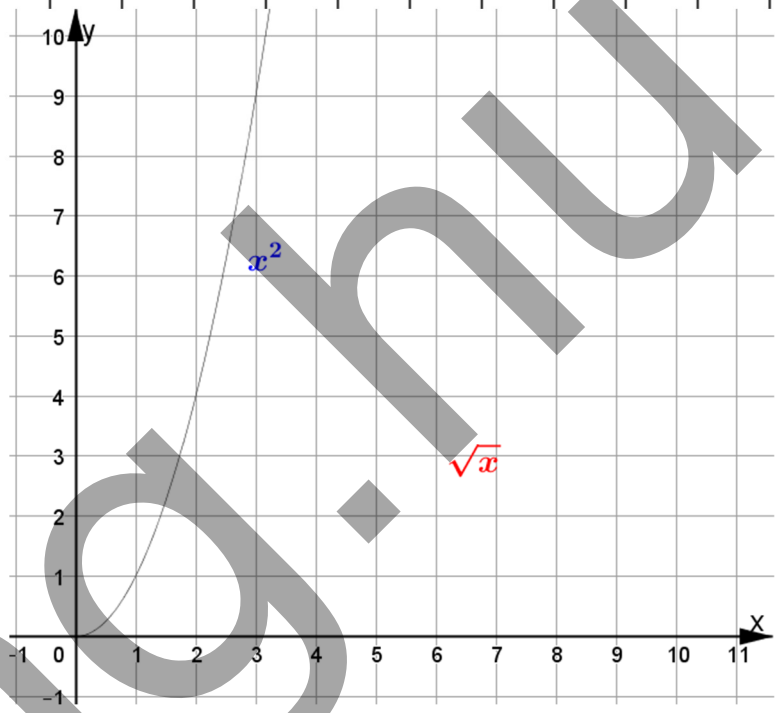
V.2) A négyzetgyök függvény és transzformációja (ábr. jell.)

a) Az alapfüggvény

sqrt( ):**R**→ **R**; $y = \sqrt{x}$

Töltsd ki fejből a táblázatot, ábrázold és jellemezd az alapfüggvényt:

x	0	0,04	0,09	0,25	0,36	0,81	1	1,44	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4	9
y																



D=

ZH=

Menet:

R=

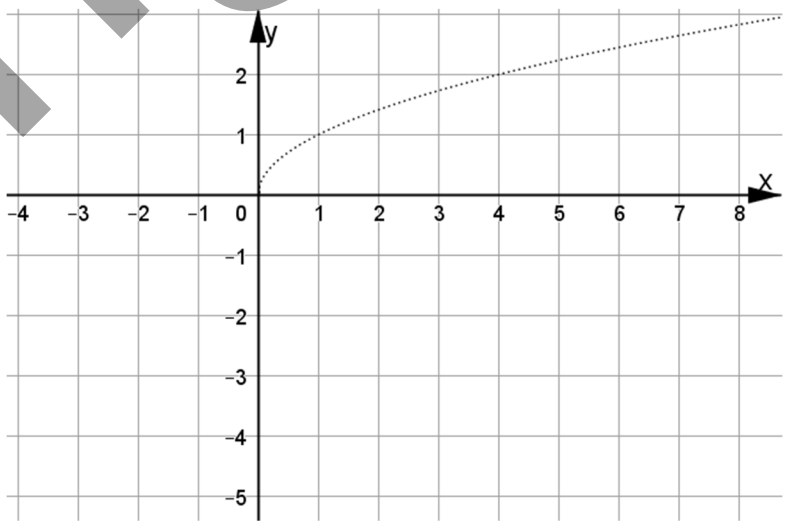
Alakja:

injektivitás:

b) Trafózott függvény

f( ):**R**→ **R**; $y = 2\sqrt{x+3} - 4$

D_f:



ZH:

Transzformáció:

Alak

C(;)

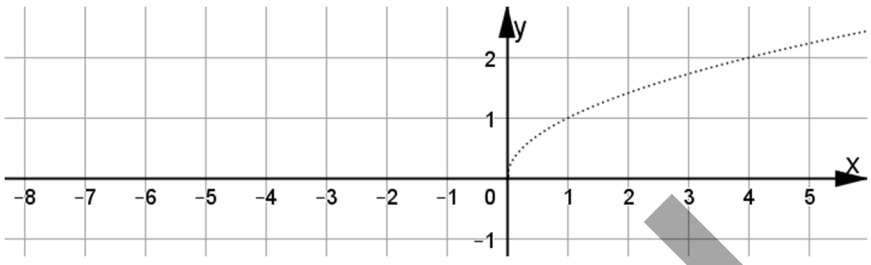
szmg.hu

c) Érdemes először akár betenni a symbolab.com-ba… (úgy, hogy 0-val legyen egyenlő, és akkor ábrázolja is, és meg is oldja a zérushelykeresést)

f( ):**R**→ **R**; $y = -\frac{1}{2}\sqrt{-2x+4}+2$

D_f:

ZH:



Transzformáció:

Alak

C(;)

V.3) Egyéb hatványfüggvények inverzei

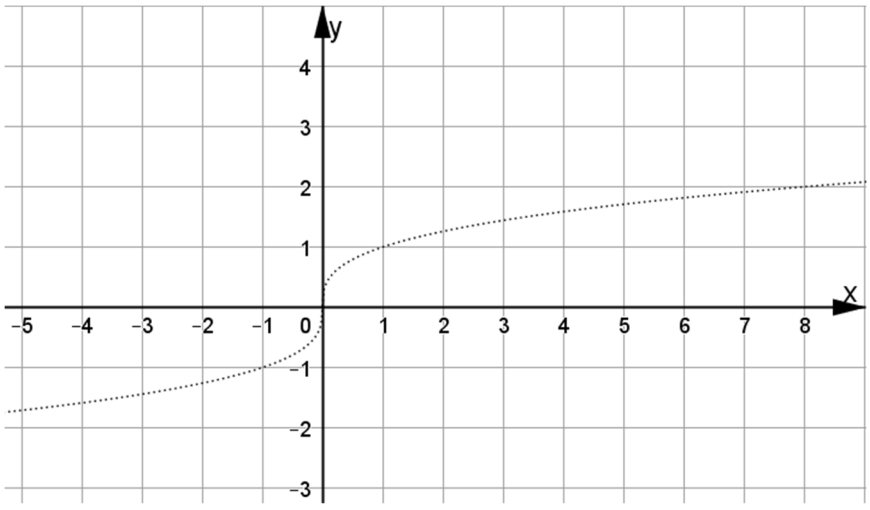
a) Köbgyök – negyedik gyök. Ábrázold a fv-eket, add meg a trafót és a kért adatokat!

g( ):R→R; $g(x) = -2 \cdot \sqrt[3]{x-3}+1$

D_g:

ZH:

Transzformáció:



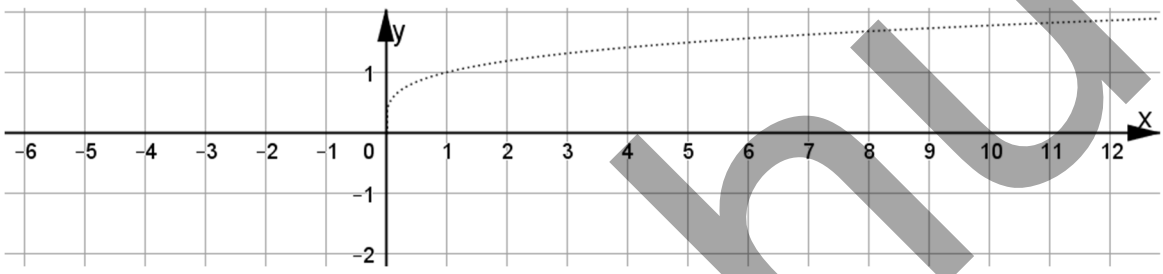
szmg.hu

h( ):R→R; $h(x)=\frac{2}{3}\sqrt[4]{x+5}-1$

D_h:

ZH:

Transzformáció:



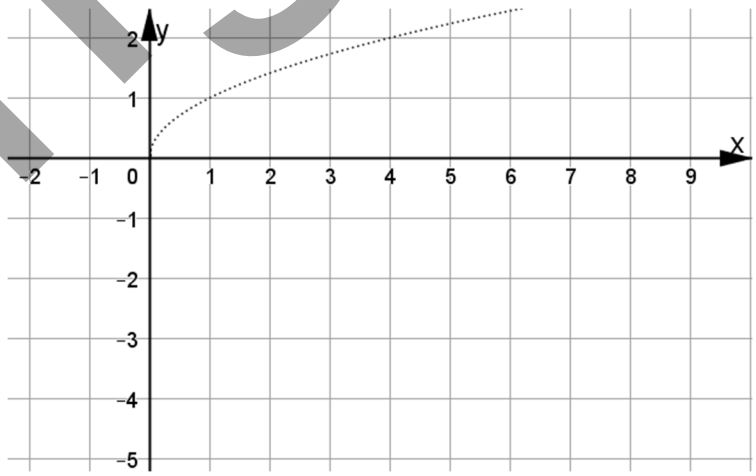
V.4) Gyakorlás

Ábrázold és jellemezd (D, ZH, transzformáció, menet, R stb.):

g( ):**R**→**R**; $g(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{2x+3}+2$

Df:

ZH:



Transzformáció:

Alak

C(;)

szmg.hu

Másodfok – F: Egyenletek - egyenlőtlenségek megoldási módszerei

I) Egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei

I.1) Próbáld meg fejből ideírni, mikre kell figyelni egyenletmegoldásoknál!

I.2) Gyakorlás

$$\frac{x}{x-4}=\frac{4}{x-4}$$

$$2x+\frac{x^2-4}{x-2}=1$$

$$\frac{2x-7}{2x^2-4x+2}+\frac{x+1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{3-3x}=\frac{2}{x-1}$$

$(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$

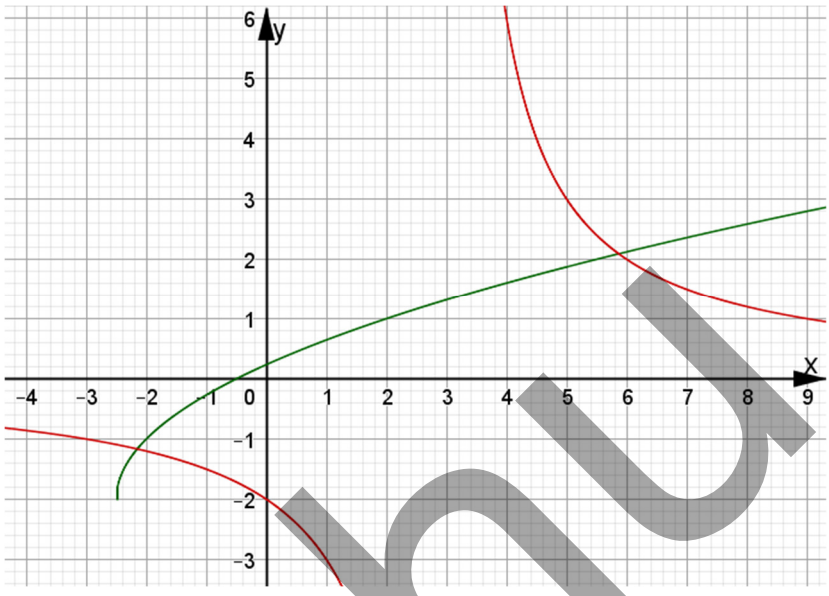
$$x-1=\sqrt{22-6x}$$

szmg.hu

I.3) Egyismeretlenes egyenletek

a) Grafikus: 1.: leolvasás 2.visszahelyettesítés 3. biz: több gyök nincs.

$$\sqrt{2x+5}-2=\frac{6}{x-3}$$



b) Alaphalmaz figyelés – oldd meg:

$$\sqrt{x-5}=\sqrt{5-x}+x^2$$

c) Értékkészlet figyelés, értékkészlet összehasonlítás – oldd meg: $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=8-|x-1|$

Jobbak: gyárts még az előzőhöz hasonló feladatot!

Oldd meg – Értékkészlet!

$$2x^2-12x+18+\sqrt{x-3}=0$$

szmg.hu

Oldd meg – Értékkészlet (egészrész, törtrész)

$[\{x-4\}+3]^2 = 9-\{x-5\}$ $\qquad$ $(x-3y+1)^2+\sqrt{2x-7y+3}=0$

d) Szorzattá-alakítás: szinte ∀ polinom egyenletet erre vezetünk vissza: lineáris tényezők szorzatára!

$x^3+x^2=4x+4$

I.4) Egyenletrendszerek megoldása

a) A 4 féle módszer

b) Egyenlő együtthatók módszerével

$3x+5y=-29$
$\underline{2x-18=-2y}$

c) Behelyettesítéses módszerrel

$5x+5=-2y$
$\underline{2x+4y=6}$

d) Új ismeretlen bevezetése

$$\frac{1}{x-y+3}+\frac{2}{3x-y+2}=0{,}9$$

$$\frac{2}{x-y+3}+\frac{3}{-3x+y-2}=0{,}4$$

szmg.hu

II) Egyenlőtlenségek megoldási módszere

II.1) Engedélyezett, tiltott, veszélyes lépések – és az ekvivalencia
Ha negatív számmal szorzunk, mire kell figyelni?

Miért kell kitenni az ekvivalencia jelet egyenlőtlenségek megoldásánál?

II.2) Lineáris

$$-\frac{2x-3}{5} \geq 1-\frac{2-2x}{3}$$

II.3) A nem lineárisoknál a legjobb:
Általában 0-RA RENDEZNI! („0-ra redukálni”) – majd „szorzattá alakítani” – Ha kell: előjelgrafikon!

$$\frac{1}{x} \geq -2$$

$$\frac{4x-1}{2x+1} < 3$$

$$\frac{-2x^2+4x+12}{x^2-x-6} \leq -2$$

szmg.hu

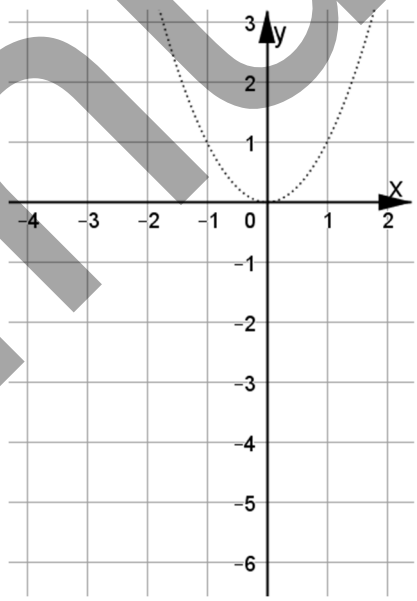
Itt már esetekre kell bontani az abszolútérték argumentuma szerint!

$|3-2x| > \frac{3}{2}x+2$

III) A másodfokú függvény trafói – és a grafikus megoldás

III.1) Ábrázoljuk a másodfokú függvényeket, adjuk meg a transzformációt stb.

f( ): [–4;1] → **R**; $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+2$



D_f:

Transzformáció:

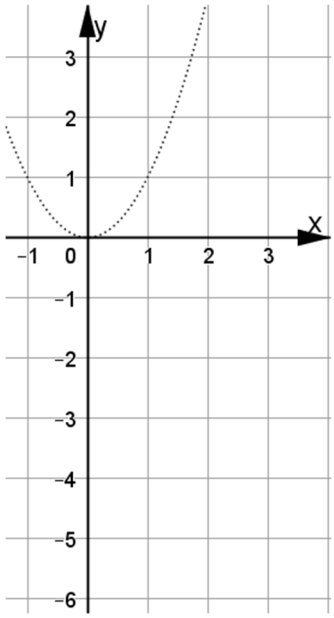
ZH:

Menet:

R_f:

g( ):[0;3] → **R**; $g(x)=-2x^2+4x+1$

D_f:



Transzformáció:

ZH:

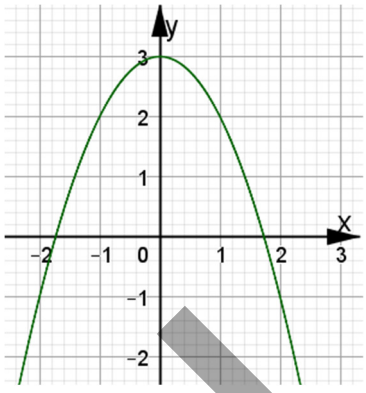
Menet:

R_f:

szmg.hu

III.2) Grafikus megoldás

$$\frac{x}{2}+1=-x^2+3$$



IV) Segédlet a szorzattáalakításokhoz – A Pascal háromszög illetve az azonos kitevők

IV.1) Alapok

$(2x-5)^4=$

IV.2) Azonos kitevők:

$x^n-y^n=$

$x^{2k+1}+y^{2k+1}=$

$x^{2k}-y^{2k}=$

IV.3) Gyakorlásuk

$x^3-27=$ $\qquad$ $x^3-125=$

$8x^3+216=$ $\qquad$ $5x^4-80=$

$2x^6-128=$ $\qquad$ $a^4+4=$

$n=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1$	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n=5$	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

Mutasd meg, hogy a Pascal háromszög bármelyik prímedik sorának az 1-en kívüli tagjai oszthatók a sorszámmal. (5. sor n=5, ugyanis a 0. sorral kezdődik.)

Elkezdem, pofonegyszerű:

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{\qquad}$$

szmg.hu

Másodfok – G: Általános megoldás és a másodfokú függvény

I) A megoldóképlet és a függvény-transzformáció előkészítése

I.1) A megoldóképlet levezetése, vagyis a paraméteres másodfokú egyenlet megoldása

Állítsd be úgy a paramétereket, hogy az f( ):**R**→**R**; $y=-2x^2+bx+c$ hozzárendelésű fv-nek a max helye: 5, max értéke 10 legyen.

Az $ax^2+bx+c=0$ paraméteres egyenletet alakítsd eddig: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$a=\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$. Számold ki (számológép nélkül ☺) következő kif. pontos értékét: $a^2-4\cdot\sqrt{7}\cdot a$

(Aki nem gyöktelenít azt megeszik a disznók. Kb. így szól a közmondás.)

Add meg a fv. zérushelyét és a trafót és csúcspontot!

$h(x)=3x^2+x-5$ $\qquad$ $g(x)=2x^2+4x+3$

szmg.hu

I.2) Példák – megoldóképlettel és megoldóképlet nélkül

Először mondd el, mennyi az *a*, *b*, *c* és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:

$-2x^2 + 5x - 3=0$

Először mondd el, mennyi az *a*, *b*, *c* és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:

$\frac{2}{3}x^2 + x - 6 = 0$

Először mondd el, mennyi az *a*, *b*, *c* és hangosan, hogy mennyi a D!

Megoldóképlettel: Megoldóképlet nélkül:

$-3x^2 + 2x - 5 = 0$

I.3) Gyakorlópéldák a másodfokú egyenletekhez

$$\frac{3x}{4x^2-1} + 2 = -\frac{3}{1-2x}$$

$$\frac{(2x+3)^2-7}{2} + \frac{x^2-1}{3} = x(x+3)$$

$$\frac{2}{x^2+x+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{2x-8}{x^3-1}$$

szmg.hu

I.4) Hiányos másodfokú egyenletek – aki megoldóképletet használ, az már gonoszságra is képes

Vigyázz, ha a másodfokú egyenlet – ami kijön – nem hiányos, akkor te vagy hiányos…

$2(x-3)(3x+2)-3(x+1)(x-2)+11x=0$ $\qquad$ $x(2x-7)(x+3)+(7x^2-x)(2x+5)=46x^2-26x$

II) A szorzattá alakíthatóság és a gyöktényezős alak – és szorzattá alakítás.

II.1) Emlékezzünk a megoldóképlet létrehozására

Hozd gyöktényezős alakra (vigyázat, lehet benne „gyökös” kifejezés is!):

$6x^2+x-15=0$ $\qquad$ $-2x^2+6x-3$

II.2) Gyakorlati alkalmazás

a) Írd fel gyöktényezős alakban: $K=6x^2-13x+6$

b) Írj föl olyan *egész együtthatós* másodfokú egyenletet, melynek a gyökpárja:

$x_1=\frac{4}{3}; x_2=5$ $\qquad$ $x_1=-\frac{5}{6}; x_2=\frac{2}{3}$

Írj föl olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet, amely egyik gyöke:

$x_1=-3+2\sqrt{5}$ Segítség: (a+b)(a–b)…

szmg.hu

c) Algebrai törtek egyszerűsítése - egyszerűsítsd

$$A=\frac{20x^2-9x-18}{15x^2+2x-24}$$

d) Alakítsd szorzattá

$24x^2–46xy+15y^2=$

Aki dudás akar lenni: Oldd meg az egész számok halmazán: $3x^2+2xy – y^2=15$

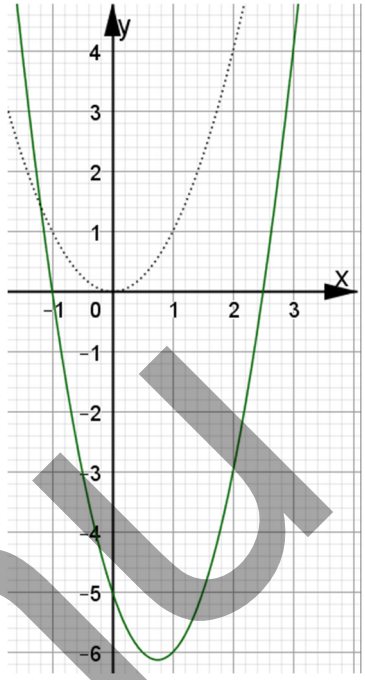
Aki dudás akar lenni: Oldd meg az egész számok halmazán: $6x^2–xy–2y^2–7x+7y–13=0$

e) Adj meg egy olyan másodfokú f( ) fv-t, melynek a két zérushelye $-\frac{1}{2}$ és 2, és f(–1)=1

szmg.hu

III) Függvényvizsgálat: a függvény állása + szélsőérték

III.1) Ábrázold, jellemezd!



f( ): [–2;3] → **R**; $y=2x^2-3x-5$

D_f:

Transzformáció:

ZH:

Menet:

R_f:

III.2) Másodfokú függvény szélsőértéke - általában

a) Paraméteresen

Adj meg olyan 2. fokú fv-t, melynek zérushelyei: –9 és 0, max. ért: –2

b) Ha létezik gyök

Két másodfokú függvénynek – f( ) és g( ) – a főegyütthatója 1, és ugyanazon az x=–2 helyen van a szélsőértékük. Az f( ) nagyobbik zérushelye 3-mal nagyobb a g( ) nagyobbik zérushelyénél. A g( ) másik zérushelye a –8. Add meg a két függvény hozzárendelési szabályát!

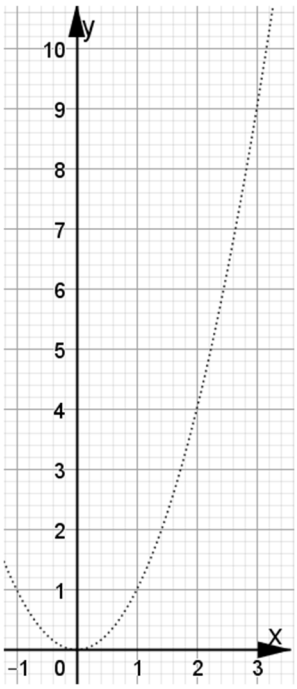
szmg.hu

III.3) Az ax^2+bx+c – kifejezésnek maximummal v. maximummal rendelkezik

Melyik paramétertől és hogyan függ, hogy egy másodfokú függvénynek v. kifejezésnek milyen szélsőértéke van?

III.4) Szélsőérték keresés: csakis transzformációval

f( ): $[0;3] \to \mathbf{R}$; $f(x)=x^2+(2-x)^2$



III.5) Szélsőérték feladatok – Olvasd el, értsd meg!

CÉL: A KERESETT ÉRTÉKET FÜGGVÉNYÉRTÉKKÉNT KIFEJEZNI.

EGY „OKOSAN KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓ” FV-BEN KIFEJEZEM A KERESETT ÉRTÉKET, AMINEK A MINIMUMÁT V. MAXIMUMÁT KERESEM.

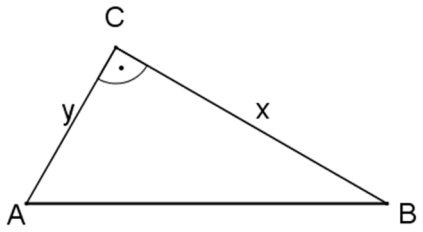
A KERESETT ÉRTÉKET NÉHA TÖBB VÁLTOZÓ FEJEZI KI. EKKOR – HA LEHET – ELŐSZÖR EGY KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓVAL KIFEJEZEM A TÖBBIT, S VÉGÜL EZEKET FELHASZNÁLVA FEJEZEM KI AZT AZ ÉRTÉKET, AMINEK A SZÉLSŐÉRTÉKÉT KERESEM.

A FELRAJZOLANDÓ FÜGGVÉNY ABSZCISSZÁJA AZ „OKOSAN KIVÁLASZTOTT VÁLTOZÓ”, AZ ORDINÁTÁJA PEDIG AZ AZ ÉRTÉK, MELYNEK A SZÉLSŐÉRTÉKÉT KERESEM.

szmg.hu

a) Azon derékszögű Δ-ek közül, amelyeknél a két befogó összege 12.

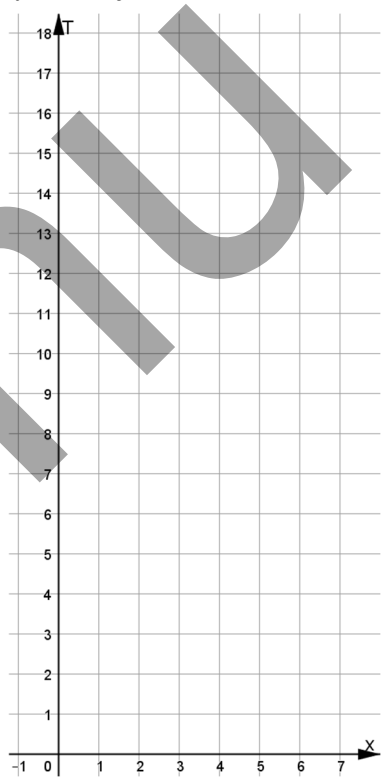
1. rész: Melyek a legnagyobb területűek?
Mo.:
Fejezd ki x-ből y-t: y=



Írd föl a területet csak x segítségével:
T=

Add meg a készülő t( ) területfüggvény értelmezési tartományát, majd definiáld (írd fel a függvényt):

t( ): →**R**; T=



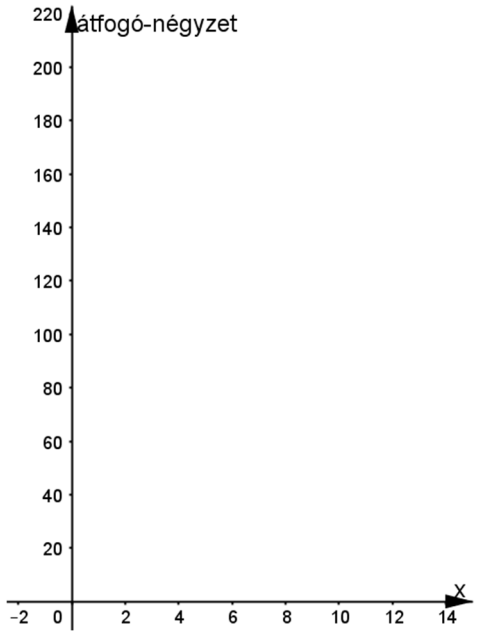
Keresd meg a szélsőértéket: hol és mennyi!

2. rész: Melyek a legrövidebb átfogójúak?
Mo.:
Fejezd ki x-ből y-t:

Az átfogó pontosan akkor a legnagyobb, ha a négyzete a legnagyobb.
Így – Pitagorasz tételell – írd föl az átfogó négyzetét az x-ből.

Add meg a készülő átfogó( ) függvény
értelmezési tartományát,
majd definiáld (írd fel a függvényt):

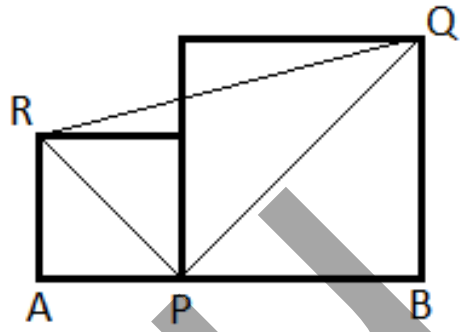
f( ): →**R**; án=



Keresd meg a szélsőértéket: hol és mennyi!

szmg.hu

Nem köt.: Az AB=a, Erre két négyzetet rajzolunk az ábra szerint. P futó pont. Kell a PQR$\triangle$ területének maximuma. Hol van ekkor P?



b) --

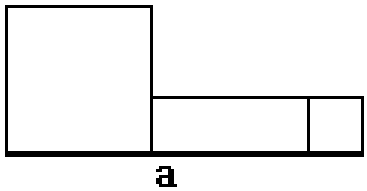
c) 24 pontot hogy kell két gráfba szétosztani, hogy ha a két gráf teljes, akkor az élek száma a minimális legyen? (Ez jóval egyszerűbb, mint az órai! Az egyikben x db van, a másikban… Majd felírod mindkettőben az élek számát, azt összeadod: ezt a függvényt kell jellemezni…)

szmg.hu

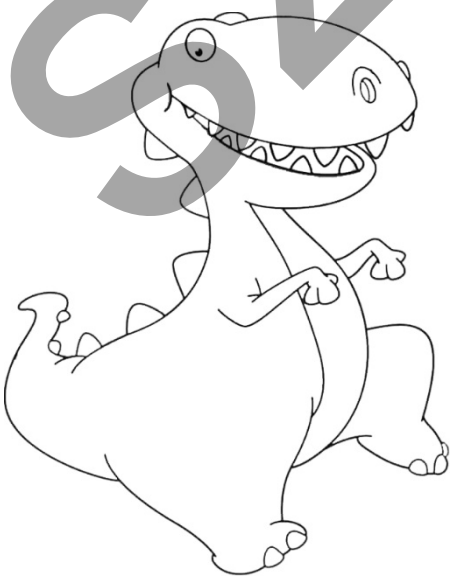
d) --

e) Egy a hosszúságú szakaszra 2 négyzetet rajzolok és egy téglalapot a következőképpen:

a két négyzet a két szélén van, és közte a téglalap úgy, hogy a két oldala a két négyzet oldalával egyezik meg. Mikor lesz minimális a terület?



Egy 300 hosszúságú zsinórral olyan területet határolok körül, mely egy téglalapból és az egyik oldalához csatlakozó félkörből áll. Mennyi legyen az x, hogy a körülhatárolt rész a legnagyobb területű legyen?



szmg.hu

Másodfok – H: Egyenletek – egyenletrendszerek - egyenlőtlenségek

I) Másodfokra fokra visszavezethető egyenletek - 1.

I.1) Magasabb fokú polinom-egyenletek

$25x^4+74x^2-3=0$

$36(x-3)^4-13(x-3)^2+1=0$

I.2) Egyenletek algebrai törtekből

$$\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{x+1}{3x+1}=\frac{4}{9x^2-1}$$

$$\frac{1}{2(1-x)}+\frac{7}{4x^2+4x+4}=\frac{3x-1}{x^3-1}$$

$$\frac{3y-6}{y-3}+\frac{2y}{y^2+y}=\frac{4y}{y^2-2y-3}$$

szmg.hu

I.3) Irracionális egyenletek – vigyázat, hamis gyök jön be néhanapján

$\sqrt{18-3x}=\sqrt{5x-6}$

$\sqrt{5x+5}+3=2x$

$\sqrt{x^2-5x+11}=1-2x$

$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+10}$

$\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\cdot\sqrt{x}-1}=\dfrac{3\cdot\sqrt{x}+5}{3}$

$\sqrt{9-6x+x^2}=10-\sqrt{4-4x+x^2}$

szmg.hu

I.4) Fontos ötletek: új ismeretlenek bevezetése, teljes négyzet és összefüggések észrevétele

$\sqrt{2x^2-7x+30}=2x^2-7x+10$

$(2x^2-4x+3)(x^2-2x+2)=45$

$5x+\sqrt{3x^2-5x+7}=3x^2+1$

$x^2-6x+1=x+1-2\sqrt{x}$

I.5) A szimmetrikus egyenletek

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+5\right)=7\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$

szmg.hu

I.6) Egyéb ötletek

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2x-1$$

$$x^2+4=3\sqrt{x^2+2}$$

$$\frac{5}{x^2-2x+2}-2x^2+4x=-5$$

II) Másodfokú egyenletrendszerek 1. – **általában behelyettesítéssel**

II.1) Bevezető

$2x+y-3=0$

$\underline{xy-2y=6}$

$x^5-9x=8x^3$

II.2) Oldjuk meg az órán tanult ötletekkel:

$x^2+y^2=25$

$\underline{xy=-30}$

szmg.hu

II.3) Sokféle ötlet kellhet

$2x^2 + 3y^2 = 11$
$\underline{y - x = 3}$

$3x^2 + 2xy - y^2 = -33$
$\underline{x - 2y = 12}$

$x^2 + y^2 - 3x + 5y = 0$
$\underline{x^2 + y^2 + 3x - 3y = 0}$

$x^2 + y^2 + x + y = 18$
$\underline{x^2 - y^2 + x - y = 6}$

III) Másodfokú egyenlőtlenségek 1.

III.1) Polinom-egyenlőtlenségek

Állapítsd meg, hogy milyen a szélsőértékhely (min, max), és van-e gyök!

$f(x)=3x^2 + 3x + 1$

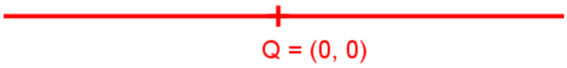
$g(x)=-\frac{2}{3}x^2 - x$

Adj meg egy olyan p paramétert, hogy maximum hely legyen, és legyen gyök
$h(x) = px^2+5x+2$

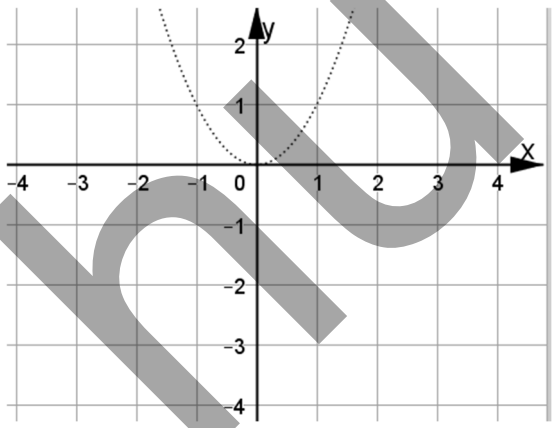
szmg.hu

III.2) Alappéldák

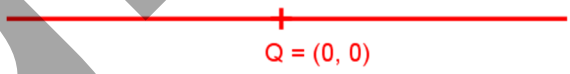
$-x^2 \geq -5$

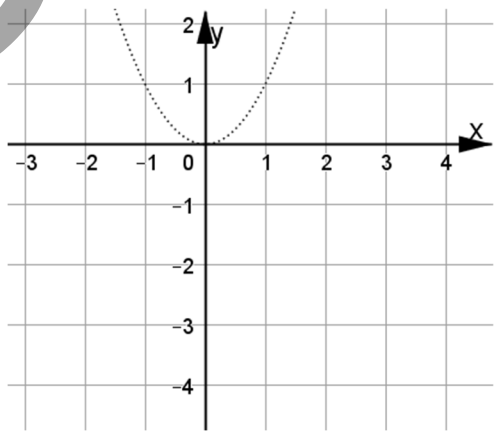


Rajzold is föl jobbrarendezés után, és ide is rajzold be az előjelgrafikont!



$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2 \geq 0$ (ábrázold is!)



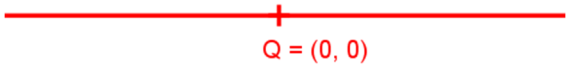


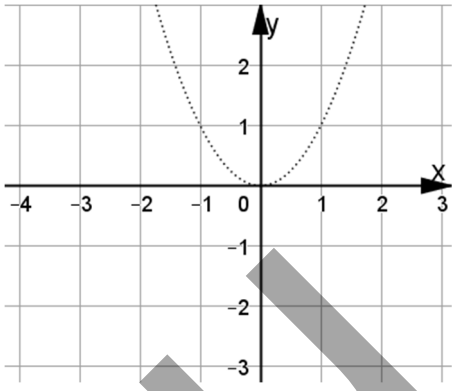
Oldd meg:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 = 0 \\ (x+y)^4 + x = 2 \end{array}\right\}$$

szmg.hu

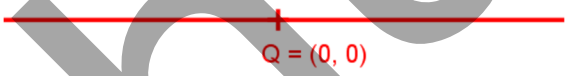
$-\frac{5}{2}x^2 - 2x + 1 \leq 0$ (ábrázold is!)

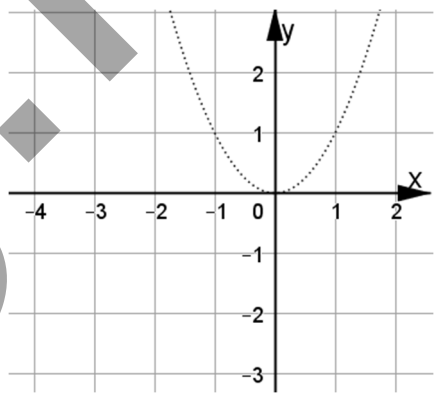




III.3) Gyakorlás

$-2x^2 - \sqrt{5}x \geq -1$





$30x^2 - 70x > -50$

$-3x^2 - 14 < 0$

$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$

szmg.hu

III.4) Egyenlőtlenségek algebrai törtekből

a) A megoldás menete

- Egy oldalra rendezni (0-ra redukálni), és egy törtet gyártani belőle (szorzattá alakítás)
- Számlálót-nevezőt szorzattá alakítani (gyöktényezős alak mindig működik)
- Előjelfüggvény

b) Gyakorlás

$$\frac{-x^2+5x+10}{x-4} \leq 2$$

Bizonyos tanulóknak köt.: Egy ABC félszabályos (30°; 60°; 90°) Δ AB átfogójának mely P pontjára lesz az $AP^2+BP^2+CP^2$ minimális? (Ha úgy (paraméter nélkül) jobban szereted, akkor legyen az átfogó 10 cm.)

$$3-\frac{x-3}{x-2} > \frac{x-3}{x-1}$$

szmg.hu

Add meg a következő kifejezés értelmezési tartományát: $K=\sqrt{\frac{8x^2-7x+5}{3x^2-5x+2}-2}$

Ha gyakorolni akarsz: $\frac{2x-1}{x}\leq\frac{3x}{2x-1}$

Aki dudás akar lenni: mennyi legyen a p paraméter, hogy a következő egyenlőtlenségnek bármely valós x megoldása legyen?

$p(x-3)^2+p^2-1<0$

szmg.hu

Másodfok – I: Paraméterek – Viète formulák – Paraméteres egyenlőtlenség, szélsőérték

I) Paraméter 1.

I.1) Alap: a gyökök számát (is) firtató paraméteres egyenletek

a) A p paramétertől függően milyen gyökök vannak? (2 egyszeres, 1 kétszeres, nincs)

$3x^2+4x-p=0$ $4x^2+(p-1)x+1=0$

Oldd meg $2px^2-6px-x+3=0$ p=param. Vigyázz, lehet, hogy nem is mindig másodfokú!

Oldd meg: $2px+15x = 3x^2 + 10p$ p=param.

szmg.hu

b) A p paraméter függvényében milyen gyökök vannak, hány gyök van – sőt, hányad fokú az egyenlet…

$(1-p)\,x^2-2px+1=0$

c) A Gyökök számát vizsgáld (2 db. egyszeres, 1 db. kétszeres, 1 egyszeres, nincs):

$px^2+5x+4p=0$

Oldd meg: $x^2-5px+x+6p^2-p-2=0$

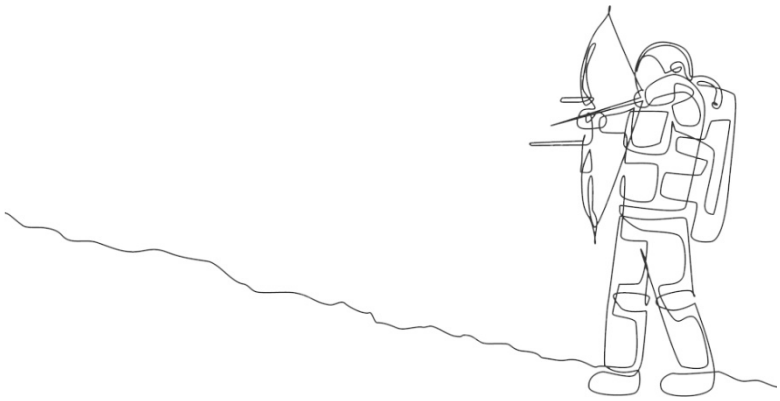
szmg.hu

d) Adott az f( ):**R**→R; $f(x)= 6x^2+3x-2px-p$ fv. a) Milyen p érték esetén lesz a függvény egyik zérushelye x=2? b) Van-e olyan p, melyre egy kétszeres gyök van? c) Van-e olyan p érték, hogy a függvény miniumuhelye a –1 ?

e) Vizsgáljuk a következő paraméteres egyenletet a megoldhatóság és a megoldások szempontjából:

$(p^2+4p-5)x^2 - 2(p+1)x+4=0$

szmg.hu



Oldd meg: $2x^2 - 1 + p(x + 6p + 1) = (x + 2p)^2$ p=param

Gyakorló: Vizsgáljuk a következő paraméteres egyenletet a megoldhatóság és a megoldások szempontjából:
$px^2 + px + p = x^2+3x+1$ p=param

szmg.hu

I.2) Kifejezés értékkészlet-vizsgálata paraméter segítségével:

Írd le az erre vonatkozó ötletet!

Határozzuk meg az kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x \in \mathbf{R}$.

$K=\frac{2x}{x^2+1}$

KÉTFÉLEKÉPPEN állapítsuk meg a következő K kifejezés értékkészletét: $K=x^2+3x+3$. Először egyszerűen, mintha függvény lenne, utána pedig úgy, ahogy az előbb tettük!

szmg.hu

II) Viete-formulák és DISZKRIMINÁNS + Másodfok - paraméter 2.

II.1) A Viète-formulák

Írd le, hogy milyen összefüggést is határoznak meg a Viète-formulák, és írd le az összefüggéseket másodfokú egyenlet általános alakjából: $ax^2+bx+c=0$

Oldd meg: $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c+3}=0$

Írd le a következő egyenletek gyökeinek összegét (x_1+x_2) és szorzatát ($x_1 \cdot x_2$) azok kiszámolása nélkül!

$3x^2-5x-3=0$ $\qquad$ $-3x^2+4x-2=0$

Most nézd meg, mit műveltél: biztos, hogy van mindkettőnél gyök?

II.2) Gyakorlás

Adj meg egészegyütthatós, másodfokú egyenletet, ahol a gyökök:

$3/4$ és $-2/3$ $\qquad$ $-5-\sqrt{3}$ *és* $-5+\sqrt{3}$

Adj meg olyan másodfokú egyenletet, ahol a két gyök összege 21, és az egyik a másiknak 2-szerese.

szmg.hu

II.3) Egy egyenlet gyökei közti kapcsolatok

a) Összefüggés a két gyök között

Adj meg egy olyan másodfokú egyenletet, mely gyökeinek összege 25, és az egyik 19-cel nagyobb a másiknál.

Adott a $4x^2-5x+c=0$ egyenlet. Mennyi legyen *c*, ha a két gyök aránya: –6.

* $(6k^2-k-1)x^2+(3-k)x-2=0$ Mennyi legyen a *k*, ha az egyik gyök a másik kétszerese?

Nem köt.: Adott az $x^2+px+q=0$ egyenlet, és $n\in\mathbf{Z}$. Milyen összefüggésnek kell p és q közt fönnállni, ha az egyenlet egyik gyöke n-szerese a másiknak? (Vagyis pl. fejezd ki n segítségével az egyikből a másikat!)

szmg.hu

b) Adott az egyik gyök

$px^2–3x–10=0$ egyenletben az egyik gyök 2. Mennyi a paraméter?

c) Összefüggés a két gyök között

Akit 5-ös akar lenni: $4x^2 + bx – 21=0$ $x_1–x_2=5$ $b=?$

d) Gyökök előjele

Mely p-re lesz maximum 1 db. valós gyök: $(p–1)x^2–5px+6p+3=0$

szmg.hu

Adott a $3x^2–2x+c=0$ egyenlet. Mennyi legyen c, ha a két gyökre igaz a következő:
a) egyenlők b) különbözők és pozitívok c) az egyik negatív, másik pozitív d) az egyik 0 e) egyik sem valós (nincs valós gyök)

e) Gyökök négyzetösszege

$2x^2 – 3(p–2)x + (3–p^2) = 0$ Mennyi t, ha ha: $x_1^2+x_2^2=22$

f) Egyéb kifejezések gyökökből

Mutasd meg, hogyha az ax2+bx+c=0 egyenletben b=c és van valós gyöke, akkor azok reciprokának összege: –1

szmg.hu

$2x^2+x-6=0$ Mennyivel egyenlő (gyökök kiszámolása nélkül):

$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = ?$ $\qquad$ $x_1^3 + x_3^3 = ?$

g) Két egyenlet gyökei közti összefüggés

Határozzuk meg k-t úgy, hogy az $x^2-7x+2k=0$ egyenlet egyik gyöke az $x^2-5x-k=0$ egyenlet egyik gyökének kétszerese legyen!

Írjunk fel egy olyan másodfokú egyenletet, mely gyökei az $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) egyenlet gyökeinek:

a) ellentettjei

b) n-szeresei ($n\in\mathbf{N}$, $n>1$)

c) reciprokai

Add meg azt a 2. fokú egyenletet, melynek gyökei 3-szorosai, mint a következőé:

$x^2 - 4x - c = 0$

szmg.hu

III) Egyenlőtlenség 2: Egyenlőtlenség és szélsőérték paraméterrel

III.1) Értelmezési tartomány keresés

Határozd meg a következő kifejezés értelmezési tartományát:

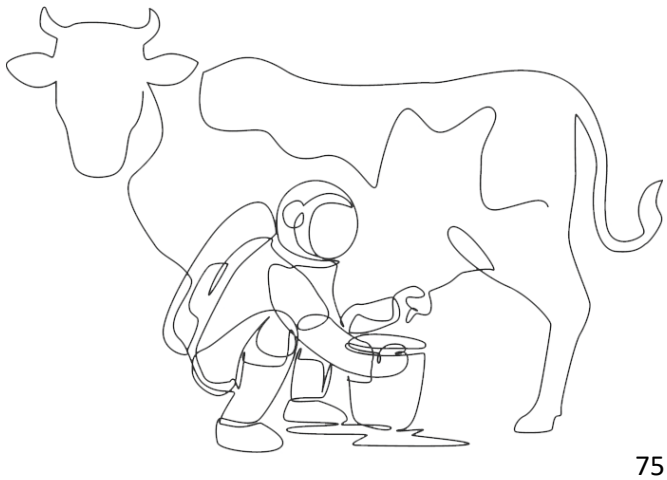
$$\sqrt{\frac{4x^2+x-9}{2x^2+x-6}-2}$$

III.2) Paraméteres 2. fokú egyenlőtlenség ∀x ∈ **R**-re igaz

Mennyi az *m* paraméter értéke, hogy a következő egyenlőtlenség ∀ $x \in$ **R**-re igaz legyen

$(m+2)\cdot x^2-(2m-1)x + 2m+3 \leq 4$ m=param.

szmg.hu



Mennyi a k paraméter értéke, hogy a következő egyenlőtlenség $\forall\ x \in \mathbf{R}$-re igaz legyen.

$$kx^2 + \frac{k^2 + k - 3}{k} < 6x$$

III.3) Gyökök egyéb függése a paramétertől:

a) Számuk: Diszkriminánsra egyenlőtlenség!

A p valós paraméter mely értékeinél lesz a
$2x^2 - (2-p)x + 4 + p = 0$ egyenletnek
i) két különböző gyöke; ii) két egyenlő abszolútértékű gyöke iii) két egyenlő gyöke?

szmg.hu

b) Gyökök négyzetösszegének stb. szélsőértékének vizsgálata paraméterrel!

$x^2-2px+2p^2-5=0$ p= param

A p paraméter mely értékeire lesz a következő K kifejezés maximális: $K = (x_1-x_2)^2$

Nem köt.: $cx^2+2cx+x = -3c - 1$ c=paraméter. Mely *c*-re és mik az $L = (x_1-x_2)^2$ kifejezés szélsőértékei?

szmg.hu

Adott a következő paraméteres. egyenlet: $x^2+px-2x = 3+5p-p^2$
Mely p-re veszi föl két gyök négyzetösszegének a maximumát és az mennyi.

III.4) Paraméter függése a gyökök helyzetétől

a) Határozzuk meg az $x^2+2px+1=0$ egyenletben úgy a p paramétert, hogy:

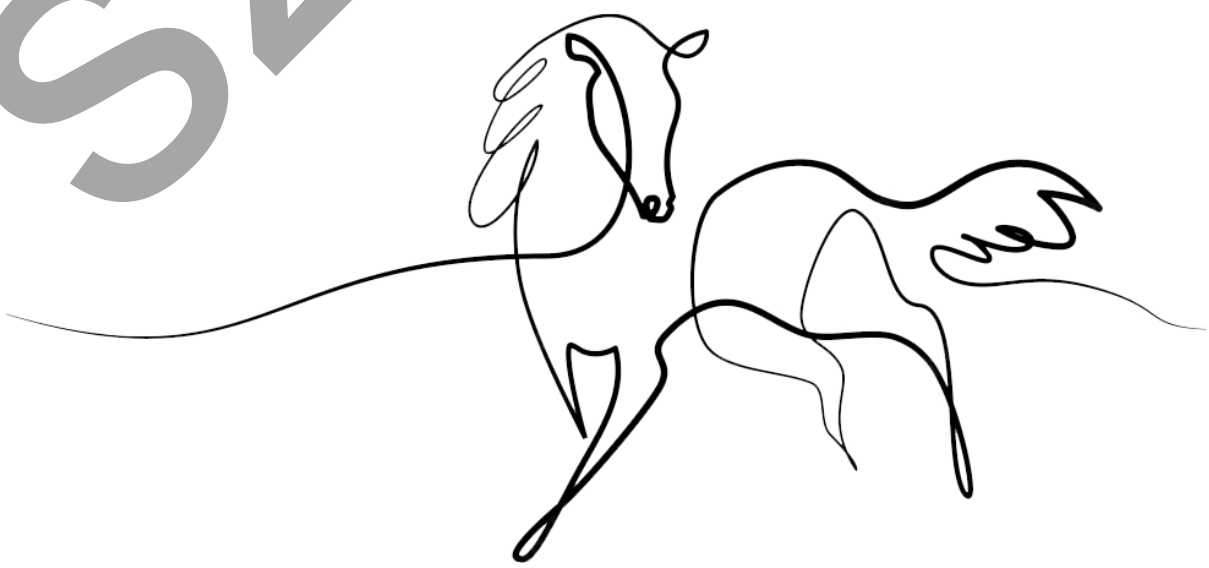
Mindkét gyök –1/2-nél kisebb legyen

Az egyik gyök 1/2-nél nagyobb, a másik 1/2-nél kisebb legyen

szmg.hu

** Az $x^2+(4-p)x+p-2=0$ egyenlet gyökei mely p paraméter értékre esnek az [1;5] intervallumba?

szmg.hu



Másodfok – J: Egyenletrendszerek, szövegesek, egyéb feladatok

I) Egyenletrendszerek 2.

I.1) Valamelyik egyenletben ∀ tag másodfokú, illetve egyéb ötletek

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 &= 17xy \\ \underline{x + y} &\underline{= 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 7 \\ \underline{xy^2} &\underline{= 12} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 + 4xy &= 18 \\ y^2 - xy &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2xy - y^2 &= 2 \\ xy + y^2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{34}{15} \\ x^2 - y^2 &= 16 \end{aligned}\right\}$$

szmg.hu

I.2) Egyéb ötletek

a) ad a)

$$\begin{aligned} xy + yz &= 9 \\ yz + xz &= 5 \\ \underline{xy + xz} &\underline{= -16} \end{aligned}$$

Két téglalap hasonlóságának aránya $\frac{2}{3}$. Területük összege 312 egységnégyzet, kerületük összege 100 egység. Mekkorák az oldalaik?

b) ad b)

$$\begin{aligned} x - y &= 8 \\ \underline{x^3 - y^3} &\underline{= 152} \end{aligned}$$

ad c)

$$\frac{x^2y^2}{12} - 15 = 2xy$$

$$2x + 2y + \sqrt{x + y + 8} = 5$$

szmg.hu

d) ad d)

$$\left.\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{x+2}}+\frac{5}{\sqrt{y-1}}&=4{,}5\\ \frac{9}{\sqrt{4x+8}}-\frac{4}{\sqrt{y-1}}&=-0{,}5\end{aligned}\right\}$$

II) Másodfokú szövegesek + másodfok a számelméletben, kombinatorikában, geometriában

II.1) Egy ismeretlenes egyenlet

a) Számrendszer

Mely számrendszerben igaz a következő művelet: $507_x=25_x\cdot 21_x-27_x$

b) Keveréses feladatok, százalék

Két sóoldat közül az első 0,8 kg a második 0,6 kg sót tartalmaz. Ugyanakkor az első oldat 30%-kal töményebb. Ha két oldatot összeöntjük, akkor 8 kg oldatot kapunk. Hány kiló egy-egy oldat, és milyen töménységű?

szmg.hu

A kenyér árát először csökkentették, majd később két és félszer annyi százalékkal megemelték az árát, mint ahány százalékkal korábban csökkentették (agyrém). Így az eredeti áránál 12,5%-kal lett drágább a kenyér. Hány százalékkal csökkentettek eredetileg?

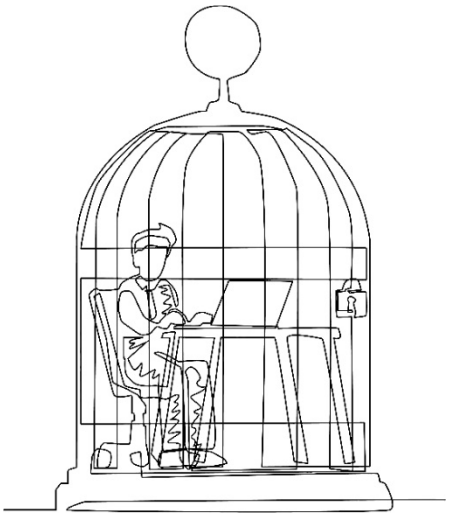
c) Gráf

Két (egyszerű) teljes gráf összes élének száma 73. Ha a két gráf pontjait egyesítenénk és akkor néznénk a teljes gráfot, akkor az élek száma 80-nal több lenne. Hány csúcsuk van?

II.2) Két v. több ismeretlenesek: 2. fokú egyenletrendszer

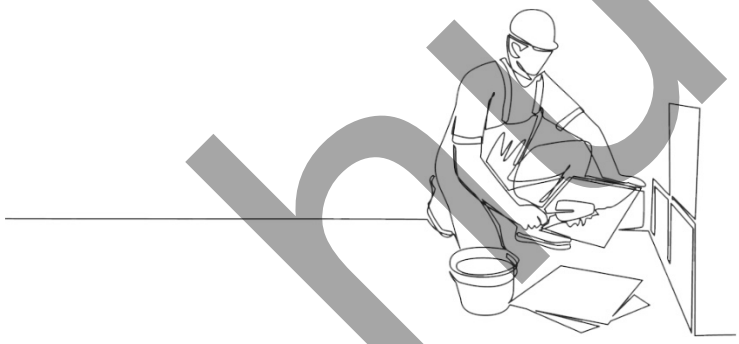
a) Együttes munkavégzés

Két volt politikus dobozokat gyárt. Együtt elkezdik a munkát, de az ügyesebbnek hat óra múlva kimenője van, így a lassabbnak még két óra kellett a dobozok legyártásához. Az ügyesebb 15 órával kevesebb idő alatt végezte volna el az egészet egyedül, mint a másik. Hány óra kell az egyiknek és a másiknak, ha csak egyedül dolgozik?



szmg.hu

A „Fényes Szelek” 20 000 m^2 leburkolásával 18 nappal korábban lett kész, mert elfogyott a pálinka, és így naponta 225 m^2-tel többet burkoltak. Hány nap alatt lettek készen, és a tervezett napi teljesítményt hány százalékkal teljesítették túl?



b) 10-es számrendszer

Valamely 3 jegyű szám utolsó jegyének duplája a középső, és ennél a középsőnél kettővel kisebb az első jegy. A szám és a számjegyek összegének szorzata 6019. Mi ez a szám?

c) Utazás

Két gyalogos egyszerre indul egy faluból a másikba. Az első, 2 km/h-val gyorsabb, éppen egy órával hamarabb ér célba. Ha mindketten 2 km/h-val csökkentenék az átlagsebességüket, akkor a gyorsabb 2 órával hamarabb érkezne. Milyen messze van a két falu, és mennyit tesznek meg óránként a gyalogosok?

szmg.hu

Egy autós elindult a célja felé, de egy baleset miatt 22,5 percet állt. Azért, hogy a tervezett időben érkezzék, a maradék 90 km-t az átlagsebességét 20 km/h-val meg kellett emelnie. Mekkora átlagsebességet tervezett eredetileg?

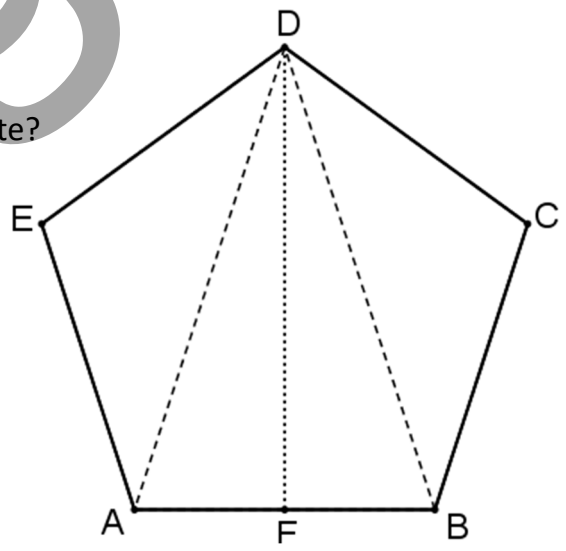
II.3) Geometriai

a) Terület

Egy derékszögű háromszög területe 30 cm^2. Az az egyik befogót 2 cm-rel növelem, a másikat duplázom, akkor 84cm^2 lesz az új terület. Hány centisek voltak a befogók?

b) Az aranymetszés háromszöge

Egy szabályos ötszög oldala 10 cm.
Milyen háromszög az $ABD_{\triangle}$ és mekkora a területe?



c) Átlók száma

Két konvex sokszög összes átlóinak száma 110, a belső szögeinek összege együtt 3420°. Hány oldalúak a sokszögek?

szmg.hu

d) Derékszögű háromszög

Egy derékszögű háromszög átfogója 50 m. A köré írt kör sugara beírt kör sugarának négyszeresénél is még 1 m-rel nagyobb. Mekkorák az odalak?

e) Körök közös érintője

Két kör középpontja 13 cm-re van egymástól. Sugaraik összege 9 cm, a közös külső érintőszakasz hossza pedig 12 cm. Mekkorák a sugarak?

f) Kombinatorika

Egy osztálynál 435-tel több egy három fős küldöttség választásának a lehetősége, mint egy eggyel kevesebb tagú osztálynál. Hányan vannak?

szmg.hu