Matematika

Geometria – 2

Munkatankönyv

v2.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

Matematika

Geometria - 2

Pitagorasztól a Hasonlóságig

Munkatankönyv

v2.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu

2021

szmg.hu

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

TARTALOMJEGYZÉK

A derékszögű háromszög oldalai 7

I. Ismétlés: háromszögek oldalai illetve oldalak és szögek közötti kapcsolat 7

1) A háromszög-egyenlőtlenség 7

2) Háromszögek egybevágóságának 4 alapesete és az egyértelmű szerkeszthetőség 7

3) Összefüggés a háromszög szögei és oldalai között 7

4) Tétel: Körhöz húzott érintő ⊥ az érintési pontba húzott sugárra. 9

5) Emlékeztető: Thalész tétel 9

6) Emlékeztető: Két kör közös külső és belső érintője 9

II. A Pitagorasz-tétel és megfordítása, illetve következményei 10

1) A tétel és megfordítása 10

III. A Befogó-tétel és a magasságtétel, körhatvány bevezetése területátalakítással 12

IV. A Pitagorasz-tétel alkalmazása 12

1) Gyakorlás 12

2) Alappéldák 14

3) Egyéb gyakorló feladatok 16

4) Egy kis térgeometria 22

Paralelogrammák - Háromszögek - Súlyvonal 25

I. A paralelogrammák ekvivalens definíciói 25

1) Az alapdefiníció és a vele ekvivalens definíciók 25

2) A definíciók ekvivalenciája 25

3) Paralelogramma – tételek és gyakorlások 26

4) Trapéz - elnevezések, tulajdonságok, két fontos ötlet 27

II. Ismétlés: Thalész tétel + a Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei 29

1) Tételek ismétlése 29

2) Gyakorlás 30

3) A Δ-be és a Δ-höz írt körök 33

III. A Δ súlyvonalai és a súlypontja 37

1) Súlyvonal és középvonal 37

2) Tétel: A háromszög súlypontja 37

3) Alappéldák 37

4) Egyéb példák 39

5) Vektorok ismétlése, és a súlypontba mutató vektor 40

Kerületi szögek - Húrnégyszög - Érintőnégyszög 41

I. Ismétlés 41

1) Fogalmak: ív, cikk, szelet. 41

szmg.hu

2) Két kör közös külső és belső érintői ... 41
3) Adott egy kör, egy *d* szakasz és a körön kívül egy P pont. Szerkesszünk a P-ből olyan szelőt, melynek a körbe eső húr-szakasza *d* hosszúságú. ... 41
4) Mértékek a körrel kapcsolatban ... 41
5) Ismétlések ... 42
6) A mértani hely fogalma, lényege a geometriában. ... 42
7) Célunk lesz egy új mértani hely megfogalmazása ... 43
II. A középponti és kerületi szögek tétele ... 44
1) Definíció - Kerületi szög ... 44
2) Def.: Középponti szög ... 44
3) A kerületi szög és középponti szög kapcsolata ... 45
4) A Kerületi szögek tétele ... 46
5) Körbe írt négyszög, illetve adott húrhoz tartozó kerületi szögek ... 46
III. Tétel: A látószögkörívek tétele - mértani hely ... 47
IV. Példák ... 48
1) Alappéldák ... 48
2) Gyakorlópéldák ... 50
V. A húrnégyszögek ... 54
1) Definíció és tétel ... 54
2) Összefoglalva a húrnégyszögek tulajdonságait ... 54
VI. Gyakorlás ... 55
1) Alappéldák ... 55
2) Gyakorlópéldák ... 56
VII. Húrnégyszögeket felhasználó tételek - példák ... 57
1) A Magasságpont tükörképe az oldalakra ... 57
2) A Simson (Wallace) egyenes ... 57
3) Egyenlőoldalú háromszög köré írt kör ... 57
VIII. Az érintőnégyszögek ... 58
1) Definíció és tétel ... 58
2) Az érintőnégyszögek és húrnégyszögek kapcsolata ... 58
A párhuzamos szelők tétele ... 60
I. A párhuzamos szelők tétele illetve a párhuzamos szelőszakaszok tétele ... 60
1) Segéd-tétel – háromszögek, paralelogrammák ... 60
2) Konkrét racionális arány ... 60
3) A párhuzamos szelők tétele, csak racionális arányokkal bizonyítva ... 61
4) A párhuzamos szelők tételének megfordítása ... 61
5) A Párhuzamos szelőszakaszok tétele ... 62
II. Példák ... 63

szmg.hu

1) Alap ... 63
2) Párhuzamos szelők, szelőszakaszok tételének alkalmazása ... 65
3) „Számítható” szakaszok szerkesztése ... 66
III. A szögfelező és egyéb feladatok ... 67
1) A Szögfelező tétel ... 67
2) Példák ... 69

Geometria - I: A hasonlóság ... 72

I. A középpontos hasonlósági trafó ... 72
1) Szemléltetés ... 72
2) Definíció és tulajdonságok ... 73
II. A hasonlósági transzformáció ... 75
1) Definíció + tulajdonságok ... 75
2) Hasonló alakzatok ... 76
III. Gyakorlás ... 78
1) Alap ... 78
2) Hasonlósággal (is) bizonyítható ismeretek ... 84
IV. Tételek Derékszögű Δ-ekben ... 87
1) Az m_c meghúzása után hasonló Δ-ek a derékszögű Δ-ben: ... 87
2) A magasságtétel – csakis derékszögű háromszögben! ... 87
3) Befogó-tétel – csakis derékszögű háromszögben! ... 89
4) Példák ... 89
V. Pont körre vonatkozó hatványa ... 92
1) Külső pontból körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele ... 92
2) Belső pont – Húrtétel ... 92
3) Példák ... 93
4) Tétel – háromszög szögfelezőjének hossza: $f_\gamma^2=a\cdot b-c_1\cdot c_2$. ... 94
5) Pont körre vonatkozó hatványa, körhatvány ... 95
VI. Hasonló alakzatok területének aránya - és térfogatarányok ... 97
1) Tételek ... 97
2) Bevezető példák ... 99
3) Alakzatok darabolása – és háromszög darabolás ... 100
4) Felület – Térfogat ... 101
5) Gyakorlás ... 103

szmg.hu

szmg.hu

A derékszögű háromszög oldalai

I. Ismétlés: háromszögek oldalai illetve oldalak és szögek közötti kapcsolat

1) A háromszög-egyenlőtlenség

Állítás: bármely két háromszögben két oldal összege nagyobb, mint a harmadiké.
Ekvivalens állítások:

- két nem legnagyobb oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal
- $|a-b| < c < a+b$

Háromszög két oldalának hossza a=8,4 és b=3,6 Mekkora lehet a „c” oldal?

2) Háromszögek egybevágóságának 4 alapesete és az egyértelmű szerkeszthetőség

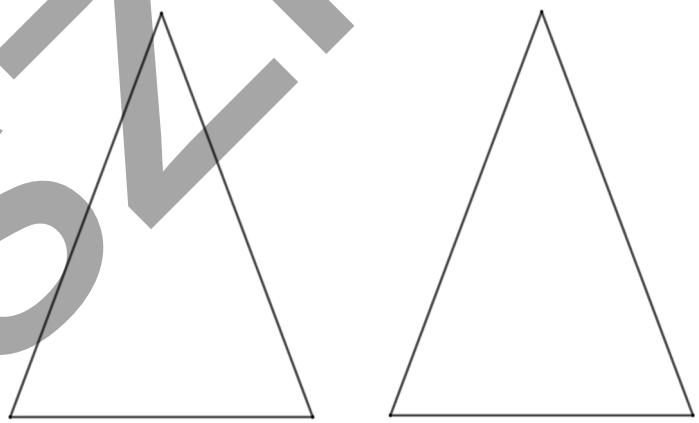
… • két háromszög egybevágó, (○ egyértelműn szerkeszthető) ha

- $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle} \Leftrightarrow$ ($a=a'$; $b=b'$ és $c=c'$).
  - ha adva van 3 oldala.
- $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle} \Leftrightarrow$ ($b=b'$; $c=c'$ és $\alpha=\alpha'$).
  - ha adott két oldal és a közrezárt szög.
- $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle} \Leftrightarrow$ ($b=b'$; $\alpha=\alpha'$ és $\gamma=\gamma'$)
  - ha adott egy oldal és a rajta fekvő két szög.
- $ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle} \Leftrightarrow$ (ha $a \geq b$, $a=a'$; $b=b'$ $\alpha=\alpha'$)
  - ha adott két oldala és a nem kisebbikkel szemben fekvő szög.

3) Összefüggés a háromszög szögei és oldalai között

a) Háromszögben egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szögek vannak. ($a=b \Leftrightarrow \alpha=\beta$.), nagyobb oldallal szemközt nagyobb szögek vannak: $a>b \Leftrightarrow \alpha>\beta$.
Biz:

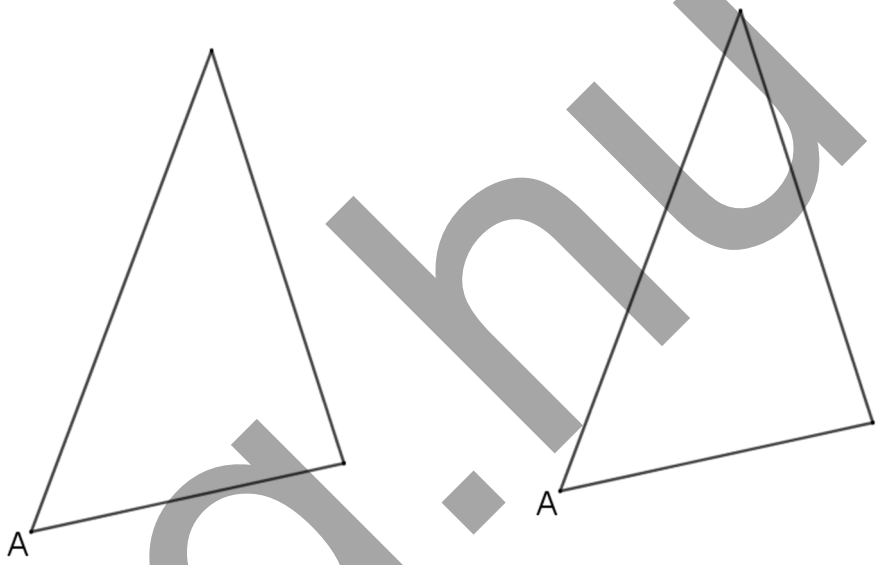
- Áll.: $a=b \Rightarrow \alpha=\beta$ Vagyis Δ-ben egyenlő oldalakkal szemközt egyenlő szög van.
  Biz.:



szmg.hu

„Kipottyant” tétel: Az egyenlőszárú Δ - ben

- Áll.: $a < b \Rightarrow \alpha < \beta$ Vagyis Δ-ben nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van.
  Biz: (A szögek jelölése: α az A csúcsnál, β a B csúcsnál.)
  Nézzük az ABC_{Δ}-et (láthatón hosszabb a *b* oldal).



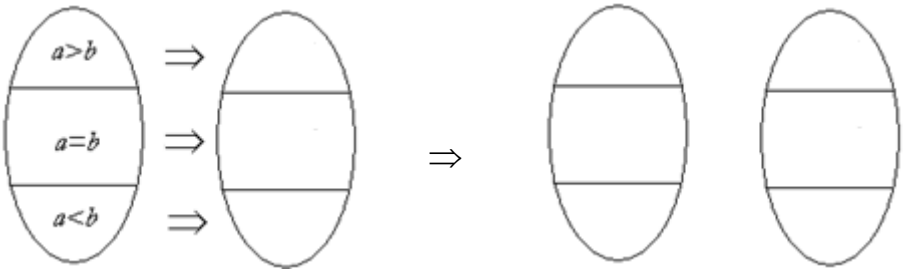
- A FŐTÉTEL bizonyítása: (előbb mi csak oldalból következtettünk szögre!)
  A háromszög *a* és *b* oldalának összefüggését tekintve az a három esemény, hogy $a > b$, $a = b$ és $a < b$ **teljes eseményrendszert** alkot:

  páronként …

  és „összegük” …

  Vagyis valamelyik mindig igaz egy Δ-re és csakis az egyik.

  Ugyanígy az α és β közti összefüggés is teljes eseményrendszer. Ezért a következések egyben



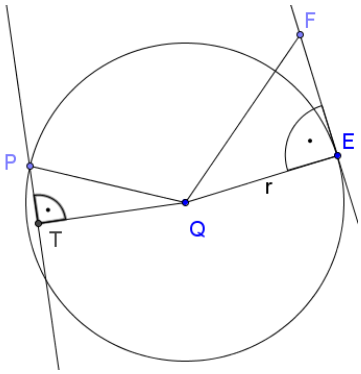
Amit bizonyítani kellett. (Q.E.D.)

szmg.hu

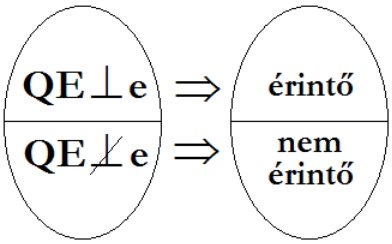
b) Egy egyenlőszárú háromszög egyik szöge 72°. Mekkora lehet a másik kettő?

4) Tétel: Körhöz húzott érintő ⊥ az érintési pontba húzott sugárra.

Biz.:

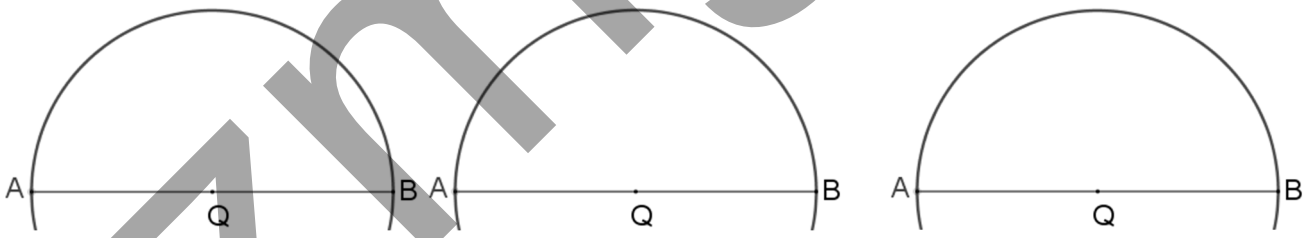


Felhasznált tétel:

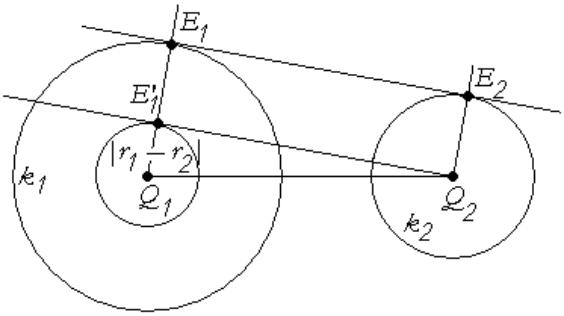


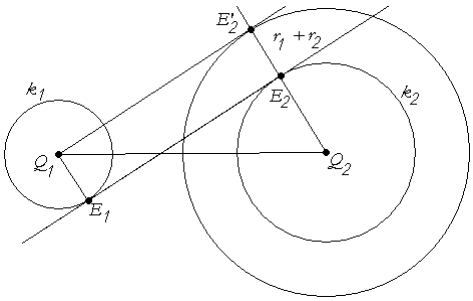
5) Emlékeztető: Thalész tétel

Tétel: az AB szakaszra, mint átmérőre emelt kör *A* és *B*-n kívüli pontjaiból a szakaszt derékszög alatt látom, és a síkban csak ezek a pontok ilyen tulajdonságúak.
A bizonyítás menete: beláttuk, hogy ha rajta van a körön, akkor derékszög.
A másik irány: ha belül van a körön, akkor tompa, ha kívül akkor hegyesszög.



6) Emlékeztető: Két kör közös külső és belső érintője





szmg.hu

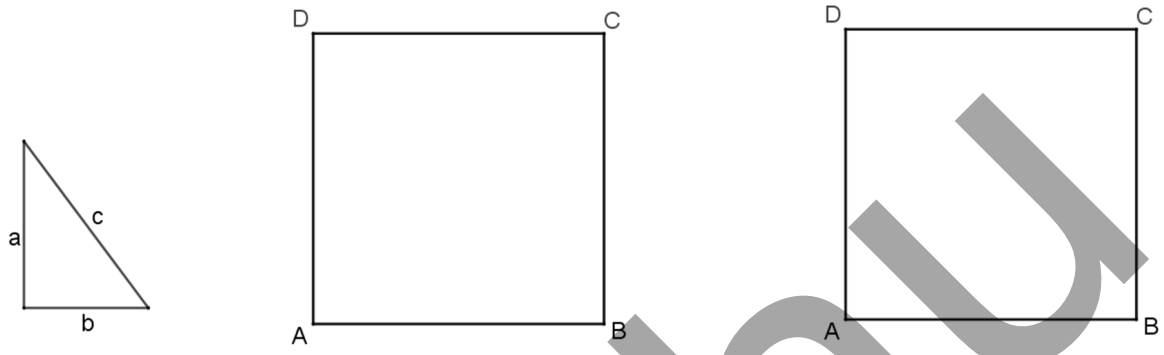
II. A Pitagorasz-tétel és megfordítása, illetve következményei

1) A tétel és megfordítása

a) Pitagorasz-tétele: Derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet területe egyenlő a két befogóra emelt négyzet területének összegével.

b) Biz.: Legyen a háromszög három oldala: *a*;*b*;*c*.

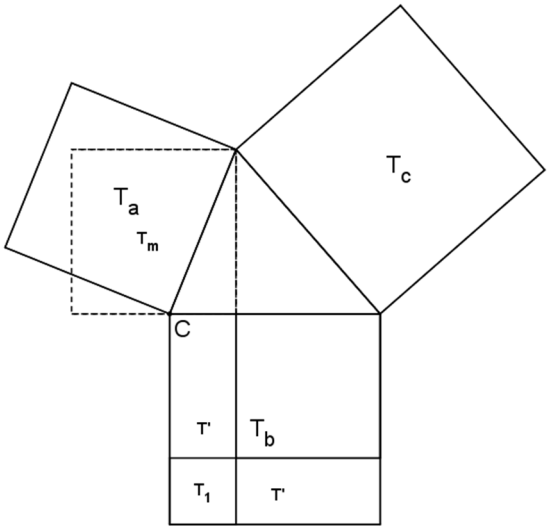
Vegyünk föl két egybevágó, …… oldalhosszúságú négyzetet.



A tétel fontos matematikai következménye:
Eddig csak összemérhető szakaszokat tudtunk szerkeszteni, vagyis racionális arányokat tudtunk kifejezni. Ezentúl a racionális számok másodfokú (négyzetgyököt tartalmazó) bővítését is modellezni tudjuk szakaszokkal, illetve fordítva, pontok távolsága vált jellemezhetővé számmal.

c) Hegyes és tompaszögű háromszögek

(i) „Hegyesszöggel szemközti oldal” - legyen γ hegyesszög.
Megmutatjuk, hogy $T_c < T_a + T_b$

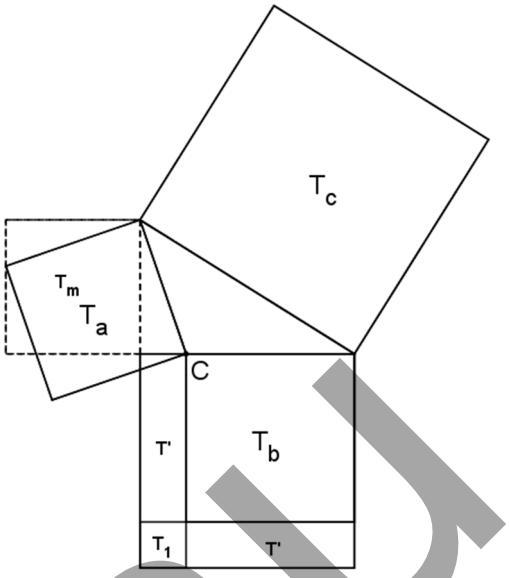


Megszületett a Cosinus-tétel első része.

Vagyis: Δ-ben egy hegyesszöggel szemközti oldalra emelt négyzet területe kisebb, mint a másik két oldalra emelt négyzetek területének összege!

szmg.hu

(ii) „Tompaszöggel szemközti oldal” - legyen γ tompaszög.
Megmutatjuk, hogy $T_c > T_a + T_b$

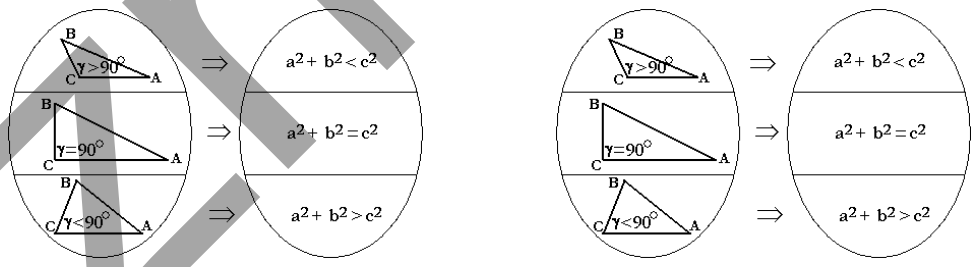


Teljes lett a Cosinus-tétel.
Vagyis: Δ-ben tompaszöget bezáró két oldalra emelt négyzetek területének összege kisebb, mint a tompaszöggel szemközti oldalra emelt négyzet területe.

(iii) Gyakorlása
Milyenek a következő oldalú háromszögek, melyek oldalai hossza
5;7;8 5;7;9 5;12;13

Ötlet: „Mindig a két ……. oldalt kell nézni: ha azok négyzetösszege…

d) A Pitagorasz-tétel oda-vissza
Mivel a három *esemény* teljes *eseményrendszert* alkot (páronként diszjunkt és összegük a biztos esemény), ezért mindenhol ekvivalencia van.



Vagyis egy háromszög pontosan akkor derékszögű, γ-ban, ha $T_a + T_b = T_c$.

e) Pitagoraszi számhármasok:
3;4;5 $\Rightarrow$ 6;8;10 stb.
5;12;13 $\Rightarrow$ 10;24; 26 stb.
7;24;25 $\Rightarrow$ 14;48; 50 stb.
8; 15; 17;
9; 40; 41 stb.
(m;n)=1 és egyik páros!: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

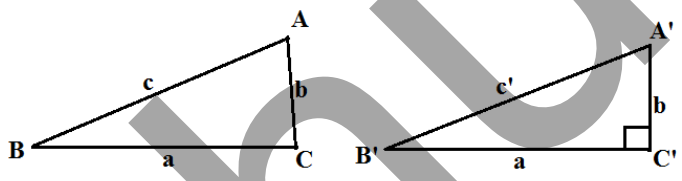
szmg.hu

f) A tanórákon tanított megfordítása a tételnek

Állítás: ha egy háromszög két oldalára emelt négyzetek területének összege egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet területével, akkor a háromszög derékszögű.

Biz.:

Legyen adott egy ABC háromszög, amelynek oldalaira teljesül, hogy két oldalára emelt négyzetek területének összege egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet területével.
A mellékelt ábra jelölései szerint: $a^2+b^2=c^2$.
Be kell bizonyítani, hogy az ABC háromszög derékszögű.
Vegyünk fel egy *a* és *b* befogójú derékszögű háromszöget.



g) Pitagorasz tételének egyéb bizonyítása – rengeteg féle van

Egy számszerű – nem területes bizonyítás:
Derékszögű háromszögben igaz a következő tétel: $a+b-2\rho=c$
Minden háromszögre igaz: $T=\rho\cdot s$.
Ebből már levezethető a Pitagorasz-tétel számszerű összefüggése:

III. A Befogó-tétel és a magasságtétel, körhatvány bevezetése területátalakítással
Szakkör szintjén

IV. A Pitagorasz-tétel alkalmazása

1) Gyakorlás

a) Derékszögű Δ-ből adott két oldal, kell a harmadik

a=3 b=6 c= a=$\sqrt{7}$ b=1 c= c=5 a=1 b=

szmg.hu

b) Döntsd el, milyen a háromszög (hegyes, derék v. tompaszögű) ha oldalai adottak

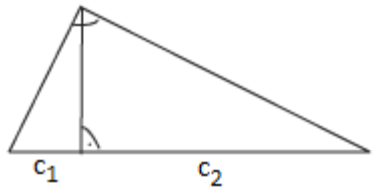
8;11;7 8;3;6 13; 12; 4

Vegyük észre: a két ……. oldal a döntő!

c) Magasságtétel – csakis derékszögű háromszögekre igaz

Derékszögű háromszögben az átfogó magasságának a talppontja az átfogót két olyan részre bontja, melyeknek a magasság a mértani közepe

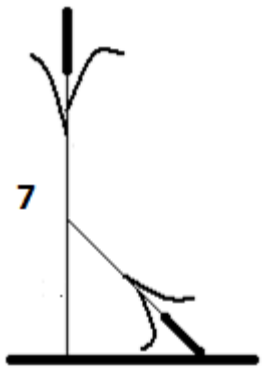
Bizonyítás:



$\sqrt{6}$ szerkesztése magasságtétellel egységből:

Téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztése…

d) Egy 7 m-es bambusznád eltörik, és egyenlőszárú háromszöget alkot a föld síkjával. Milyen magasságban törik el?



szmg.hu

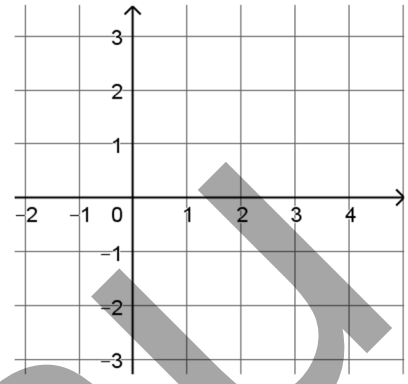
2) Alappéldák

a) Távolságok a koordináta-síkon

$A(4;-2)$ $B(-1;2)$

Kell a két – minden koordinátájukban különböző – pont távolsága.

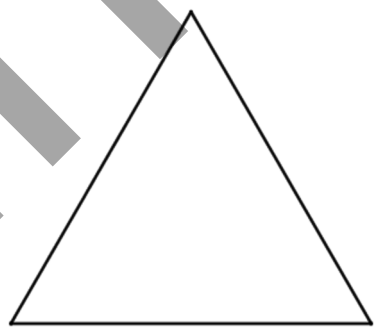
Mo.:



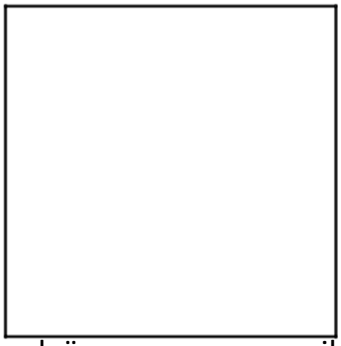
Általában: d(A;B)=

b) Speciális Δ-ek

(i) A szabályos háromszög magassága és a félszabályos Δ-ek



(ii) Az egyenlő szárú derékszögű Δ-ek



c) Paralelogramma

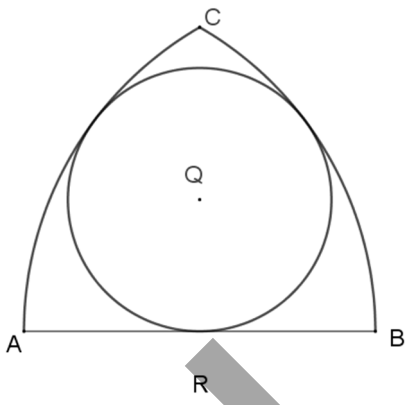
Tétel: paralelogrammában az oldalakra emelt négyzetek területének összege megegyezik az átlókra emelt négyzetek területének összegével: $2a^2+2b^2=e^2+f^2$.

Biz.:

szmg.hu

d) Rózsaablak

Szerkesszük meg az ábrán látható rózsaablakot, ha adott AB. Vegyük észre: itt a szerkesztéshez először számolnunk kell.



e) Egységből $\sqrt{5}$ hosszúság szerkesztése

(i) 1. módszer:

Peresze így $\sqrt{31}$ bajosabban: $(16^2–15^2)$. Hogy lehet rájönni?

A páratlanok előállnak két négyzetszám különbségeként:

$(a+1)^2–a^2=2a+1$

Vagyis: pl: $17=2\cdot8+1 \Rightarrow 17=9^2–8^2$.

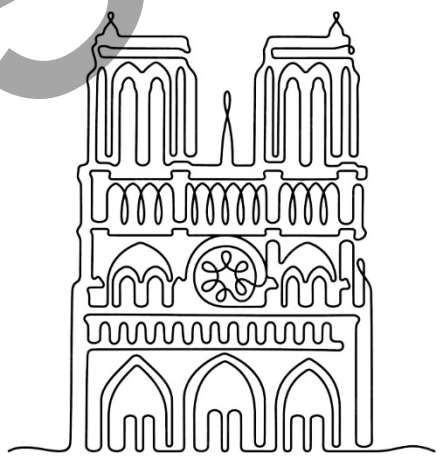
Párosak? Ha nem osztható 4-gyel: akkor a felét előállítjuk, mert az pt, majd: egyenlőszárú derékszögű Δ befogója legyen, és az átfogó már jó.

Ha 4-gyel osztható: akkor vesszük a felét: pl: $\sqrt{28}$ helyett $2\sqrt{7}$.

Összességében: $2^{2k}\cdot q$ esetén $2^k\cdot\sqrt{q}$; $2^{2k+1}\cdot q$ esetén: $2^k\sqrt{q}\cdot\sqrt{2}$.

(ii) 2. módszer

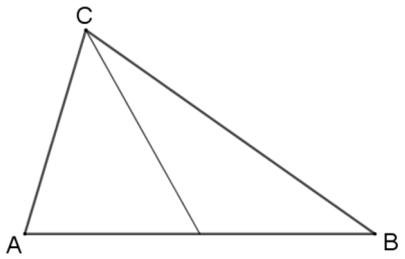
(iii) 3. módszer



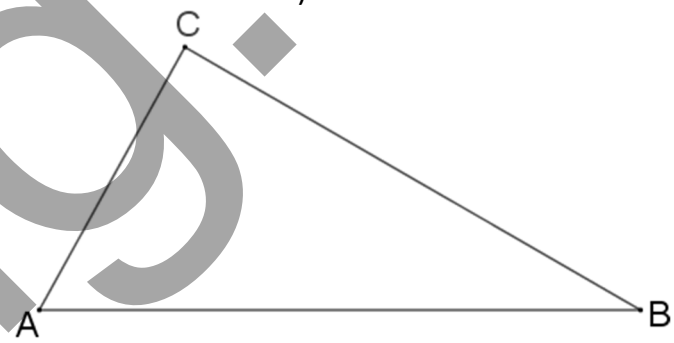
szmg.hu

f) Téglalappal azonos területű négyzet szerkesztése

g) Alapötlet: háromszög súlyvonala hosszának számítása a Δ oldalaiból



h) Háromszög három oldalából a magasságok számítása (figyelem, lehet, hogy tompaszögű, tehát… ha nem a leghosszabb oldalhoz tartozót kell számolni…)
Legyen: Δ: a=7 b=4 c=8



A Héron-képlet – vagyis háromszög területe az oldalaiból: $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

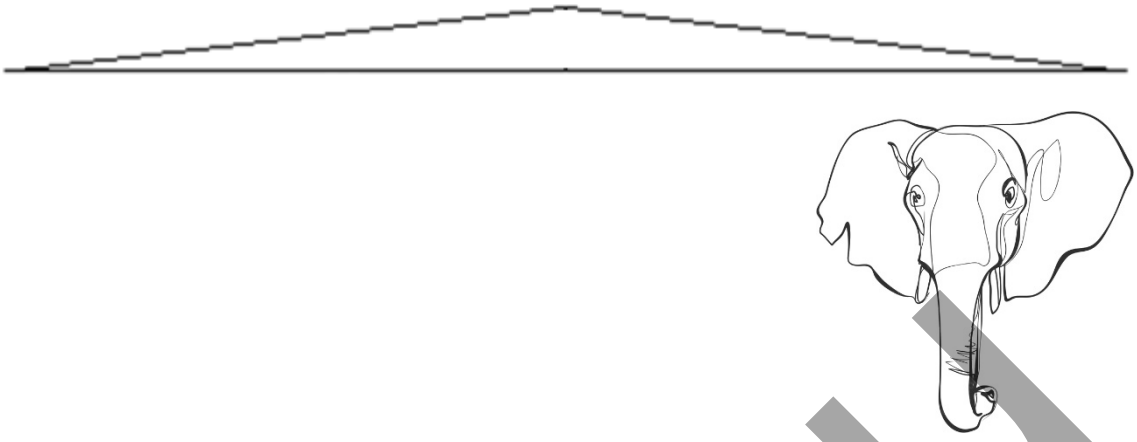
3) Egyéb gyakorló feladatok

a) Egy egyenlőoldalú Δ magasságának és oldalának az összege 12 cm. Mekkora az oldala?

b) Egy paralelogramma két oldala 8 és 5 egység. Az egyik átló 10 egységgel hosszabb a másiknál. Mekkorák az átlók?

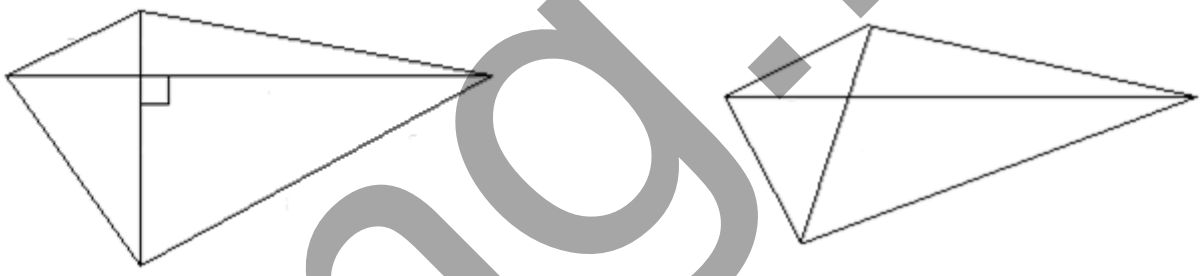
szmg.hu

c) Egy 100,32 m-es kötél két vége 100 m-re le van szorítva a földre. Középen felemeljük, ameddig lehet. Átfér-e alatta egy 4 méteres elefánt?

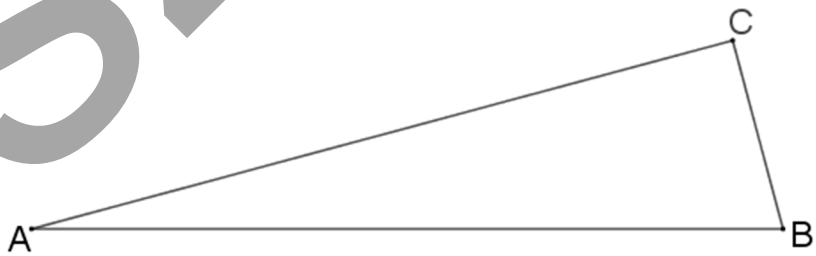


Hogyan lehetne ebből egy szélsőérték-feladatot készíteni?

d) Tétel: Konvex négyszögben a két átló merőleges egymásra $\Leftrightarrow a^2+c^2 = b^2+d^2$
Biz.:



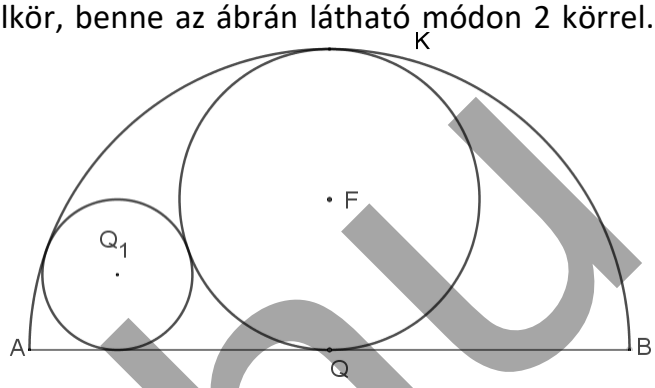
e) Egy 15°-os derékszögű háromszögben az átfogó 8 cm. Mekkora m_c és a ?



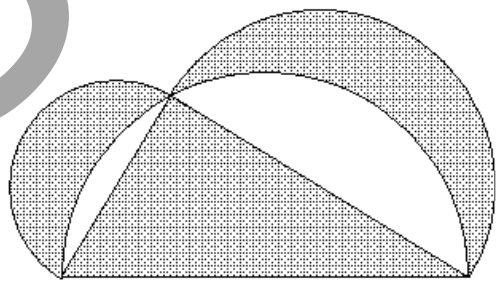
szmg.hu

f) Egy 30°-os derékszögű Δ két befogójának összege 10 cm. Mekkora az átfogó?

g) Rózsaablak: Adott egy 6 egység sugarú félkör, benne az ábrán látható módon 2 körrel. Mekkora a kis kör sugara?

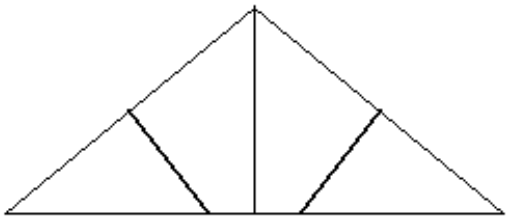


h) Hippokratész holdacskái
Állítás: derékszögű háromszög esetén a két holdacska területe megegyezik a Δ területével.
Biz.:



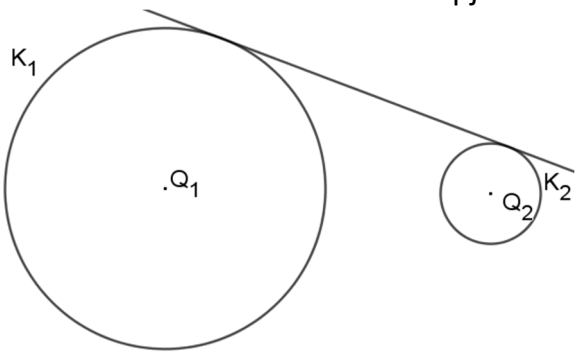
Hippokratész "holdacskái" egy konkrét példa arra, hogy görbe vonalakkal határolt síkidom „sokszögesíthető”.
De például euklideszi módon körrel egyenlő területű négyzet nem szerkeszthető!

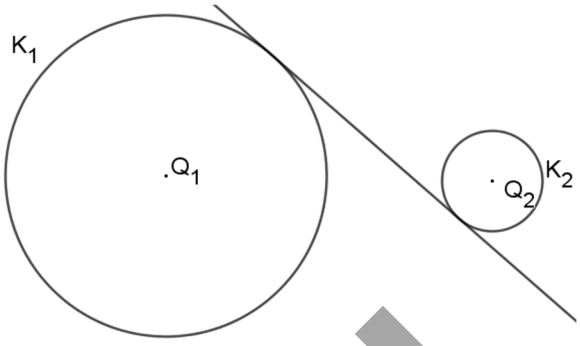
i) Egy tetőszerkezet 12 m széles és 5 m magas. Mindegyik tetőgerendát közepén egy rá merőleges gerenda támasztja alá. Milyen hosszúak ezek?



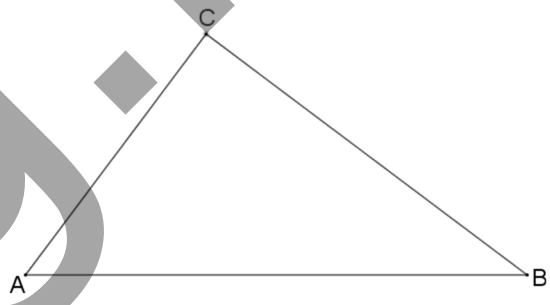
szmg.hu

j) Két kör közös érintőszakaszának kiszámítása.
A szerkesztést követő ábra alapján:



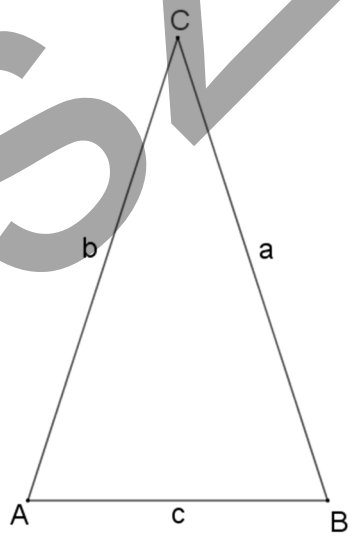


k) Derékszögű Δ-ből adott: *c* és *b*. Kell ρ.
1. Mo.:



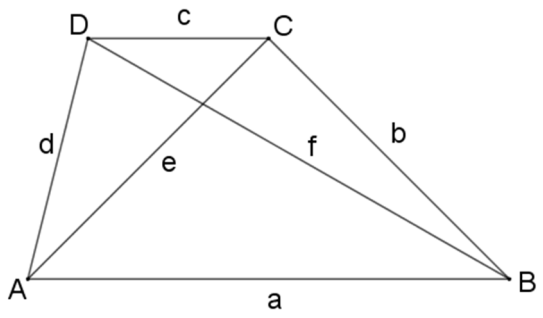
2. Mo.:

l) Az aranymetszés Δ-e
Számítandó az oldal, ha adott az alap: *c*.

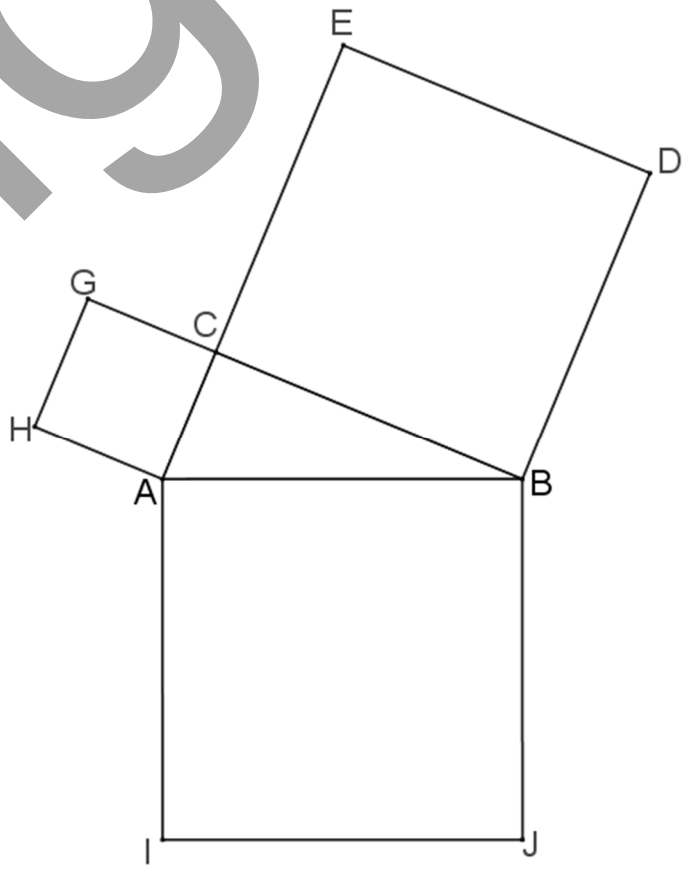


szmg.hu

m) Állítás: trapézban $e^2+f^2=b^2+d^2+2ac$

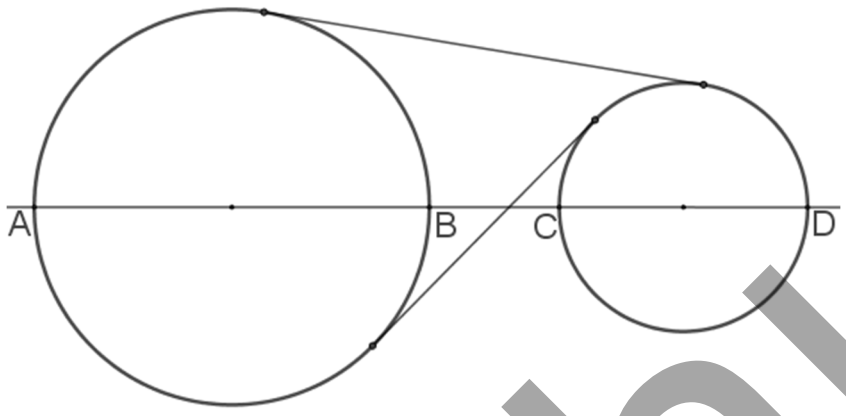


n) Egy derékszögű háromszög átfogója 13 cm és a befogóinak összege 17 cm. A háromszög mindhárom oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. Így a háromszög csúcsain kívül hat pontot kapunk. Mekkora az ezek által meghatározott hatszög területe?

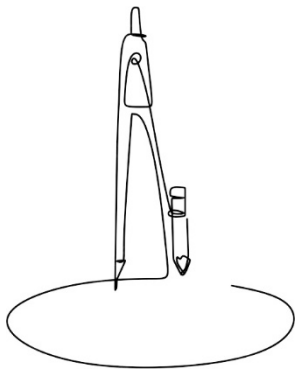


szmg.hu

o) ** Két, egymást nem tartalmazó, közös ponttal nem rendelkező kör közös szimmetriatengelye a köröket rendre az A, B, C, D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a közös külső illetve belső érintőszakaszok felírhatók két-két olyan szakasz mértani közepeként, amelyek végpontjai az A, B, C, D pontok közül valók!



szmg.hu



4) Egy kis térgeometria

a) Kocka

(i) Rajzoljuk fel újra az ábrát

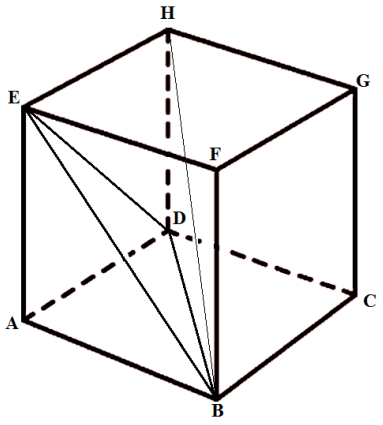
(ii) Egy *a* oldalú kockának mekkora a térfogata?

(iii) Mekkorák a lapátlók?

(iv) Milyen alakzat a BDE háromszög?

(v) A kocka négy, lapátlók végpontjaiból álló test.

(vi) Az egység oldalú kockának mekkora a testátlója?



szmg.hu

b) Téglatest: a=5, b=4, c=2

(i) Rajzoljuk fel újra az ábrát!

(ii) Mekkora a téglatest térfogata?

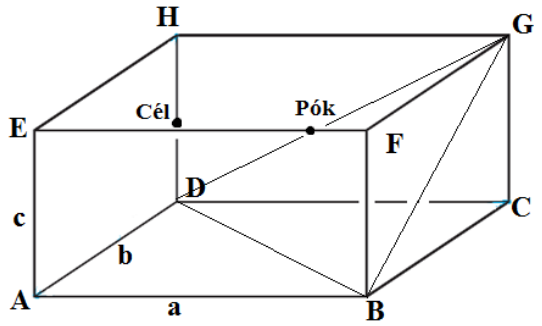
(iii) Mekkorák a BGD_{Δ} oldalai?

(iv) Milyen háromszög a BGD_{Δ}? (Hegyes, tompa, derék.)

(v) Mekkora a BH testátló?

(vi) Egy pók üldögél az EF élen az F-től 1 cm-re. El akar jutni a téglatest felületén a DH él felezőpontjába, de úgy , hogy az EFGH, az ADHE és a BCGF lapokra nem léphet. Milyen hosszú lesz a legrövidebb útja?

(vii) * Mutasd meg, hogy a DB lapátlón ugyanott van a DBC_{Δ} magasságtalppontja, mint a DBG_{Δ}-nek!

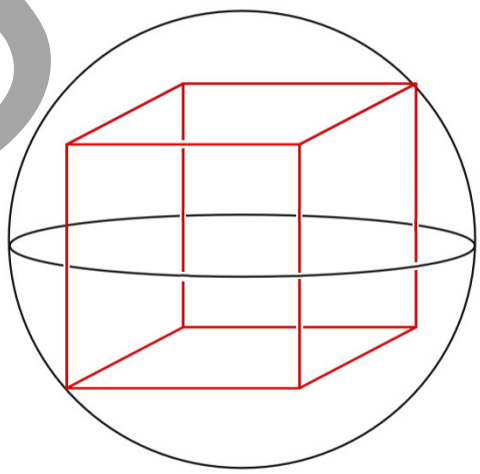


szmg.hu

c) Nehezebbek

(i) * Egy síkot és egymást 3 gömb érint, sugaruk: R. A negyedik érinti mindhármat és a síkot is. Mekkora ennek a sugara?

(ii) * Egy egység oldalú kockát beleírok egy gömbbe. A gömböt (és a kockát is) elszelem egy – a középponton átmenő – síkkal, amely párhuzamos az egyik oldallappal. Szerkesztd meg ezt a síkmetszetet!



szmg.hu

Paralelogrammák - Háromszögek - Súlyvonal

I. A paralelogrammák ekvivalens definíciói

1) Az alapdefiníció és a vele ekvivalens definíciók

a) "oldalak"

(i) Alapdefiníció: (ii)

b) "szögek"

(i) (ii)

c) "tükrösség"

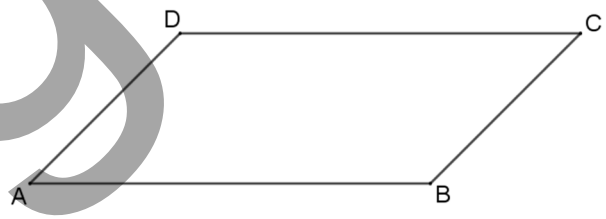
(i) (ii)

d) "kakukktojás

2) A definíciók ekvivalenciája

Lássuk be az alapdefinícióból az átlók felezését!

Lássuk be a szemközti oldalak egyenlőségéből a szemközti szögek egyenlőségét!



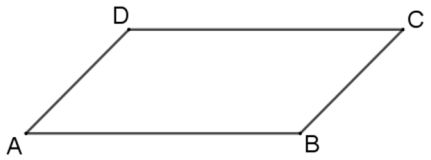
Így akár „körbevihető” néhány definíció. Pl.:

Alap ⇒ Szemközti oldalak egyenlők ⇒ szemközti szögek egyenlők ⇒ egy oldalon fekvő szögek kiegészítők ⇒ Alap

szmg.hu

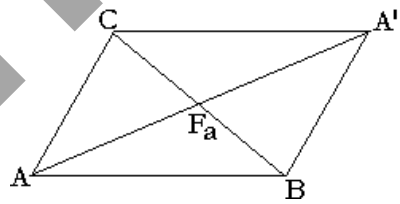
3) Paralelogramma – tételek és gyakorlások

a) Szerkesztendő paralelogramma, ha adott: *a* oldal és *f* ; *e* átlók.

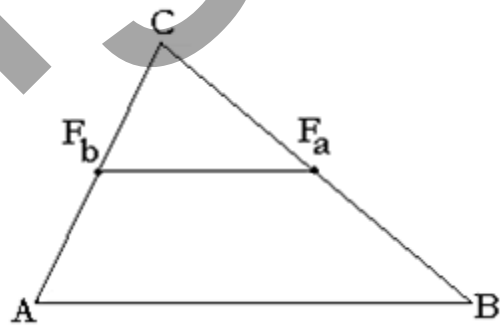


b) Állítás: a paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő a megfelelő oldalakkal.

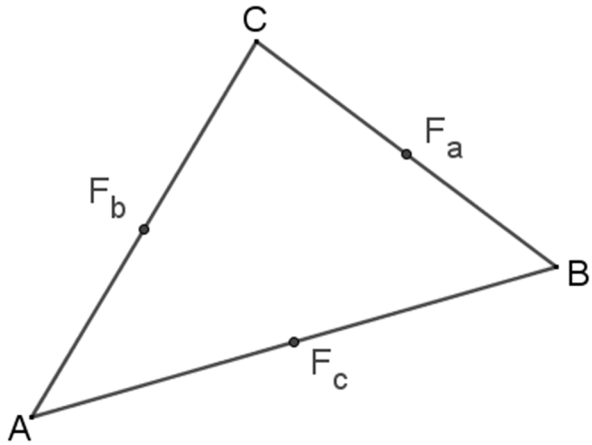
c) Áll: Δ -et az oldalfelezőjére tükrözve paralelogrammát kapunk.



d) Tétel: Δ középvonala párhuzamos és fele a megfelelő oldalnak.

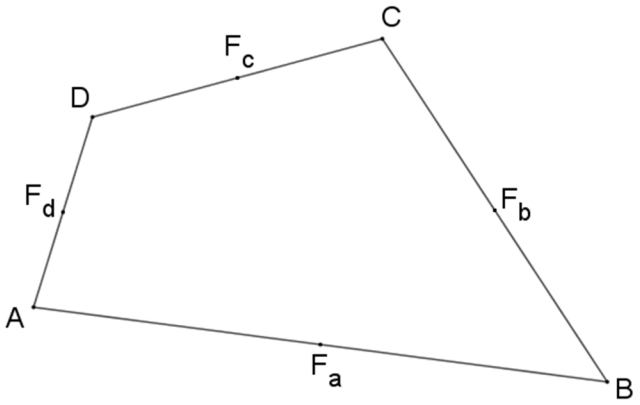


e) Állítás: a Δ középvonalai 4 egybevágó Δ-re vágják szét az eredeti Δ-et.

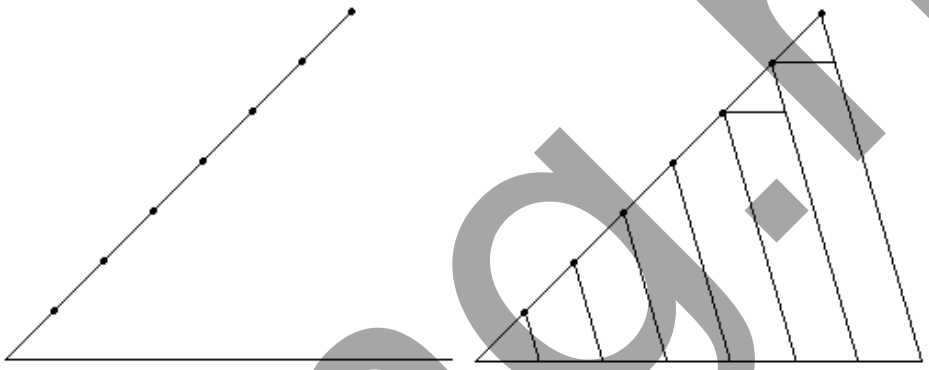


szmg.hu

f) Állítás: Egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg. Mekkora a paralelogramma területe az eredeti négyszöghöz képest?

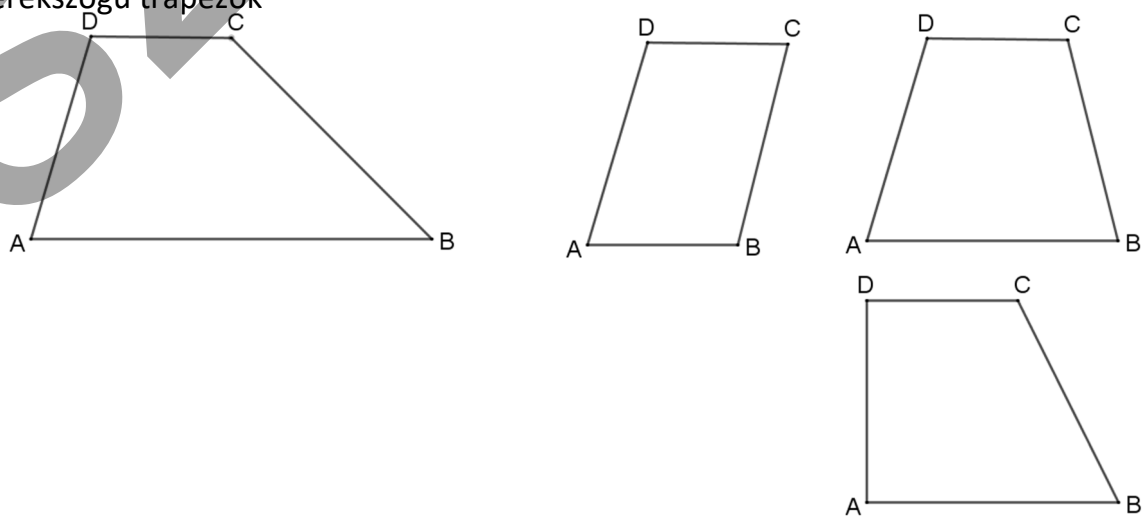


g) Szerkesszük meg egy szakasz 7-edelő pontjait: 1/7; 2/7; 3/7.
Mo.:



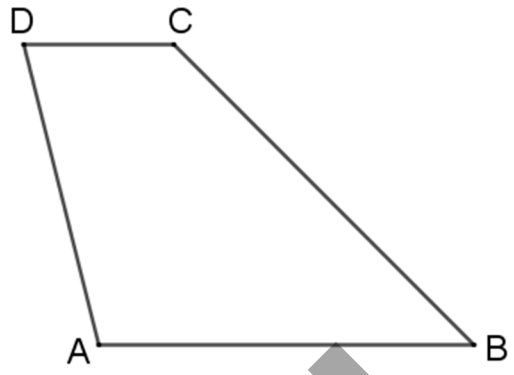
4) Trapéz - elnevezések, tulajdonságok, két fontos ötlet

a) Elnevezései: alapok, *a*, *c*, szárak: *b,d*
Magassága, középvonalai
Egyenlőszárú trapézok ⊃ húrtrapézok=szimmetrikus trapézok
Derékszögű trapézok



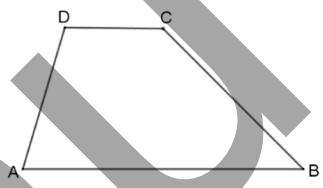
szmg.hu

b) Egyenlő területű háromszögek a trapézban

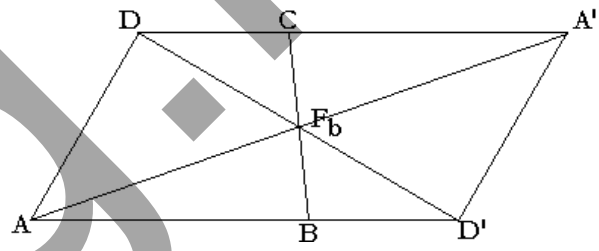


c) *Alapötletek* a példához

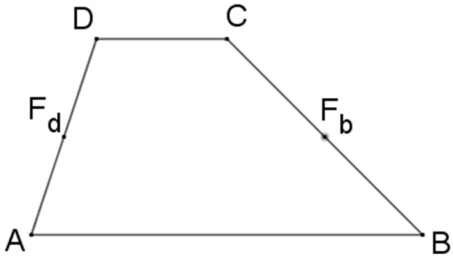
(i) Kiegészítő háromszöge - „kalapja”



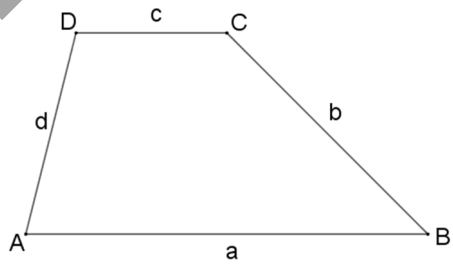
(ii) Átalakítása paralelogrammává: tükrözés az egyik szárfelező pontra.
Áll.: Trapéz tükrözve egy szárfelező pontra: paralelogrammát kapunk.
Figyeljük meg az átlókat.
Mit tudunk mondani BD és CD’, illetve AC és BA’-ről?



(iii) Középvonala
Állítás: A trapéz középvonala párhuzamos a két párhuzamos oldallal, és azok számtani közepe.



(iv) Trapéz négy oldalából
Trapézból a szokásos elnevezésekkel adott: a négy oldal. szerkesztendő a trapéz.



a _____

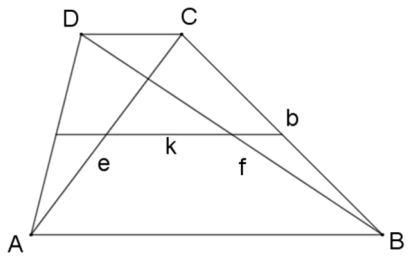
b _____

c _____

d _____

szmg.hu

d) Alappélda: Adott trapézból *k* középvonal, *b* szár és *e* és *f* átlók. Szerkesztendő a trapéz.



II. Ismétlés: Thalész tétel + a Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei

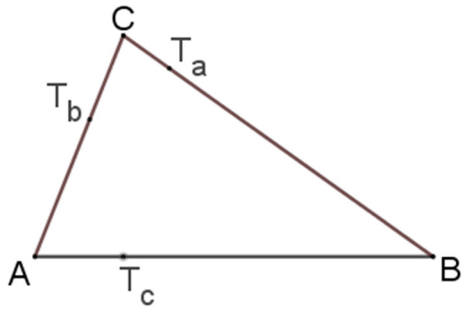
1) Tételek ismétlése

a) Thalész tétel: a tétel és bizonyítása (csak a táblán)

b) Mutasd, hogy egy háromszög körbeírható!
ST.: Szakaszfelező merőlegesre vonatkozó tétel.

c) Mutasd meg, hogy egy háromszögbe kör írható!
ST.: Szögfelezőre vonatkozó tétel.

d) Mutasd meg, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!

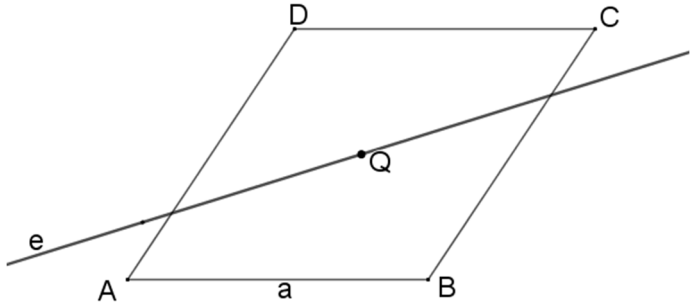


szmg.hu

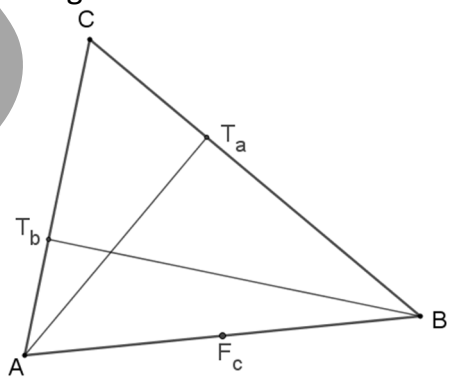
2) Gyakorlás

a) Szerkessz külső pontból körhöz húzott érintőt!

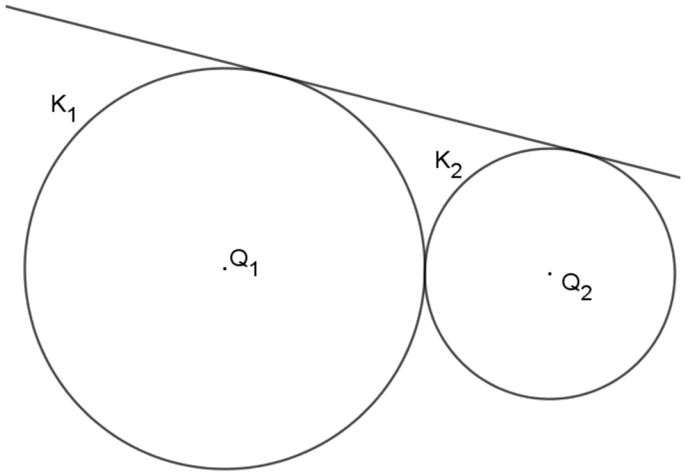
b) Szerkesszünk rombuszt, ha adott: *A*,*B* (egymás melletti csúcsok) és $e \rightarrow$ középpont $\in e$.



c) Bizonyítsd be, hogy egy háromszög bármelyik oldalának felezőpontja és a másik két oldalhoz tartozó magasság-talppontja egyenlőszárú háromszöget határoz meg! Mutasd meg, hogy az ABT_aT_b négyszög szemközti szögei kiegészítő szögek.

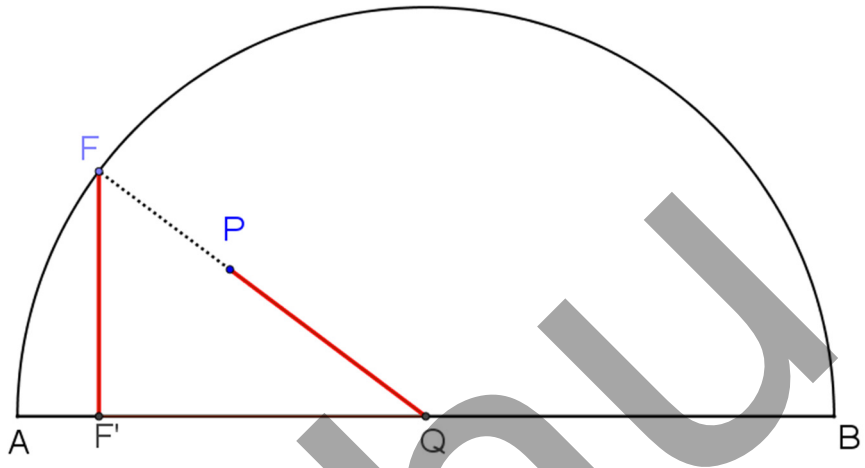


d) Bizonyítsd be, hogy két egymást kívülről érintő kör *E* érintési pontja rajta van a – közös külső érintő érintési pontjaira mint átmérőre emelt – körön.

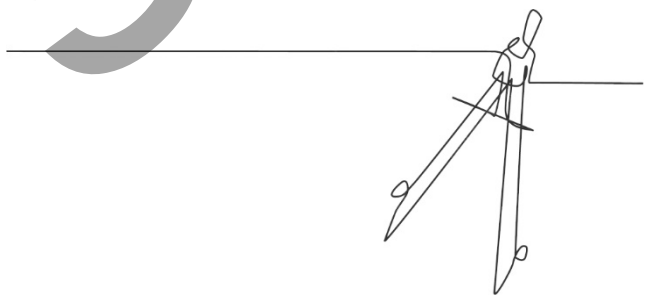


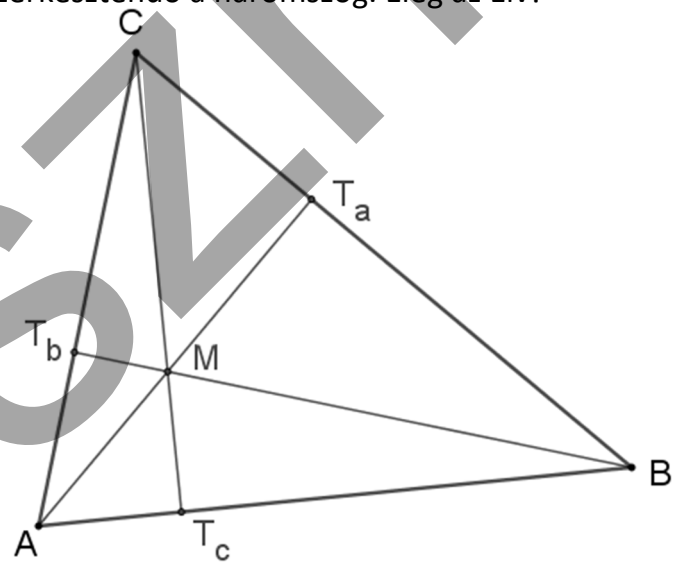
szmg.hu

e) *I/20: Egy *AB* átmérőjű, *Q* középpontú félkörön mozog egy *F* pont, amelynek merőleges vetülete az *AB* átmérőn: *F'*. Mérd föl *QF* sugárra *Q*-tól a *QP*=*FF'* szakaszt! Mi a *P* pontok halmaza, ha *F* befutja a félkört?
tanm_geometria_F_2_2_g_mertani_hely_thalesszal.ggb



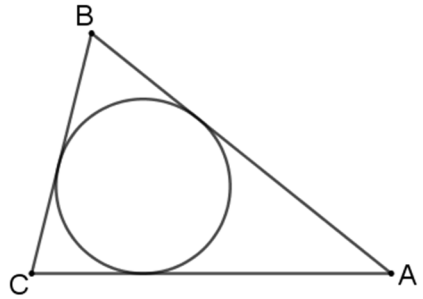
f) **Adott az ABC$_\Delta$-ből 3 pont: T_a, T_b, T_c.
Szerkesztendő a háromszög. Elég az Elv!



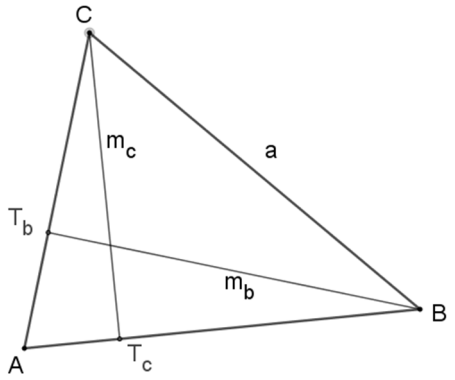


szimg.hu

g) Mutassuk meg, hogy háromszögnél: **T=ρ·s**

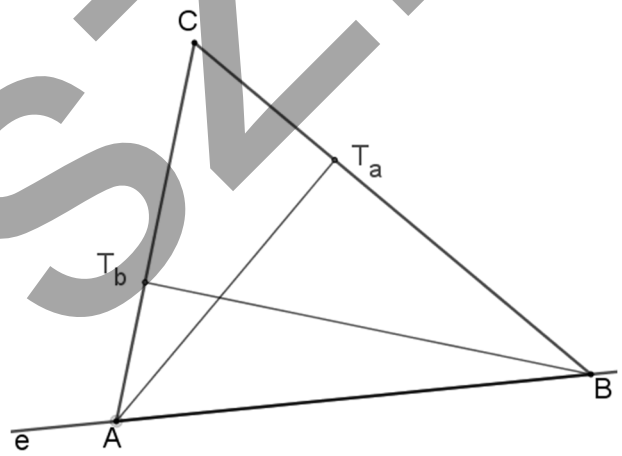


h) Adott a; m_b; m_c. Kell a Δ. (Elég az Elv.)



i) Egy derékszögű háromszög két befogójának hossza 3,6 cm és 4,8 cm. Határozd meg m_c-t!

j) Szerkessz háromszöget, ha adott egyik oldalának egyenese és a másik két oldalhoz tartozó magasságának talppontja! (Elég az Elv.)



szmg.hu

3) A Δ-be és a Δ-höz írt körök

a) Egyeneseket érintő körök:

1 egyenest:

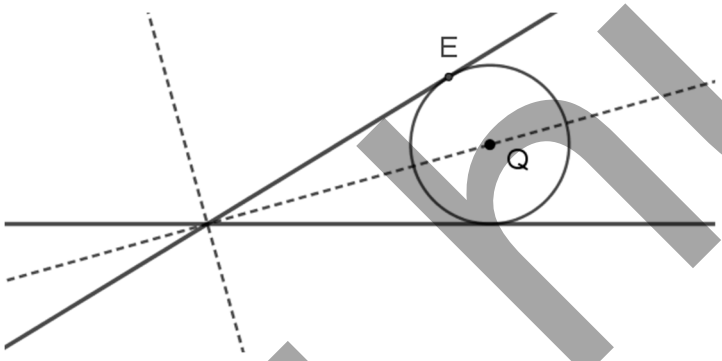
∞ sok van, a középpontjuk az egész síkot lefedi. Az egyenest is: pontkör.

2 egyenes:

- Két egymással párhuzamos

  ∞ sok van, a középpontjuk a két egyenes szimmetriatengelyén van, és minden ilyen pont jó középpontnak.
- metszők:

  ∞ sok van, a középpontjuk a két egyenes 2 szimmetriatengelyén (szögfelezőin) van, és ezek minden pontja jó középpontnak.



3 egyenes

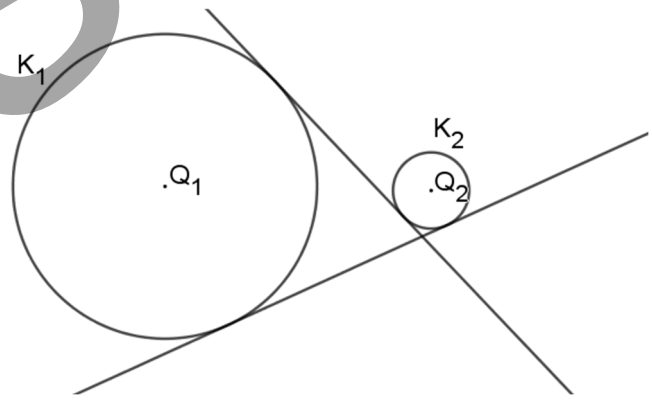
- Párhuzamosak: nincs megfelelő kör
- egy ponton áthaladók: nincs ilyen kör (kivéve a metszéspont pontköre)
- 2 párhuzamos, egy metsző
- 3 metsző, nem egy ponton áthaladó

4 egyenes: általában nincs

b) Két kör közös érintője

$K_1(Q_1;r_1=4)$; $K_2(Q_2;r_2=1)$ $d(Q_1;Q_2)=7$

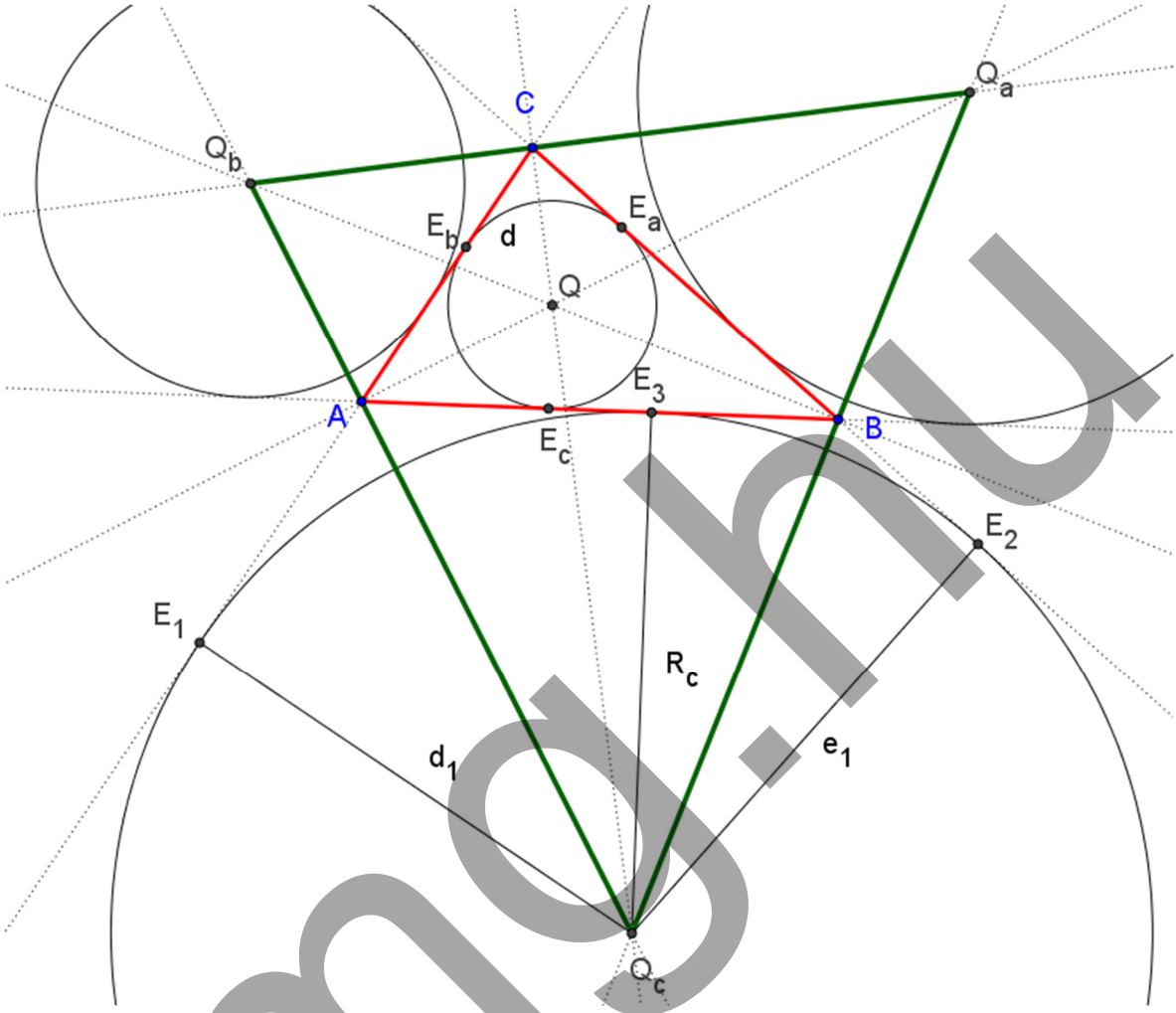
Számoljuk ki a közös külső és belső érintőszakaszok hosszát!



szmg.hu

c) Az ABC$_\triangle$-höz írt kör
tanm_geometria_F_2_3_b_haromszogbe_es_hozzairt_korok.ggb

3 ilyen van:



- Mi köze van Q-nak a Q_a, Q_b, Q_c háromszöghöz?

- Hogy hívjuk ekkor az ABC$_\triangle$ -et?

- Mi ennek a tanult tulajdonsága?

- Mekkora az $AQ_cB\angle$?

- Áll $\triangle$-ben: Q; A; Q_c B egy körön van.

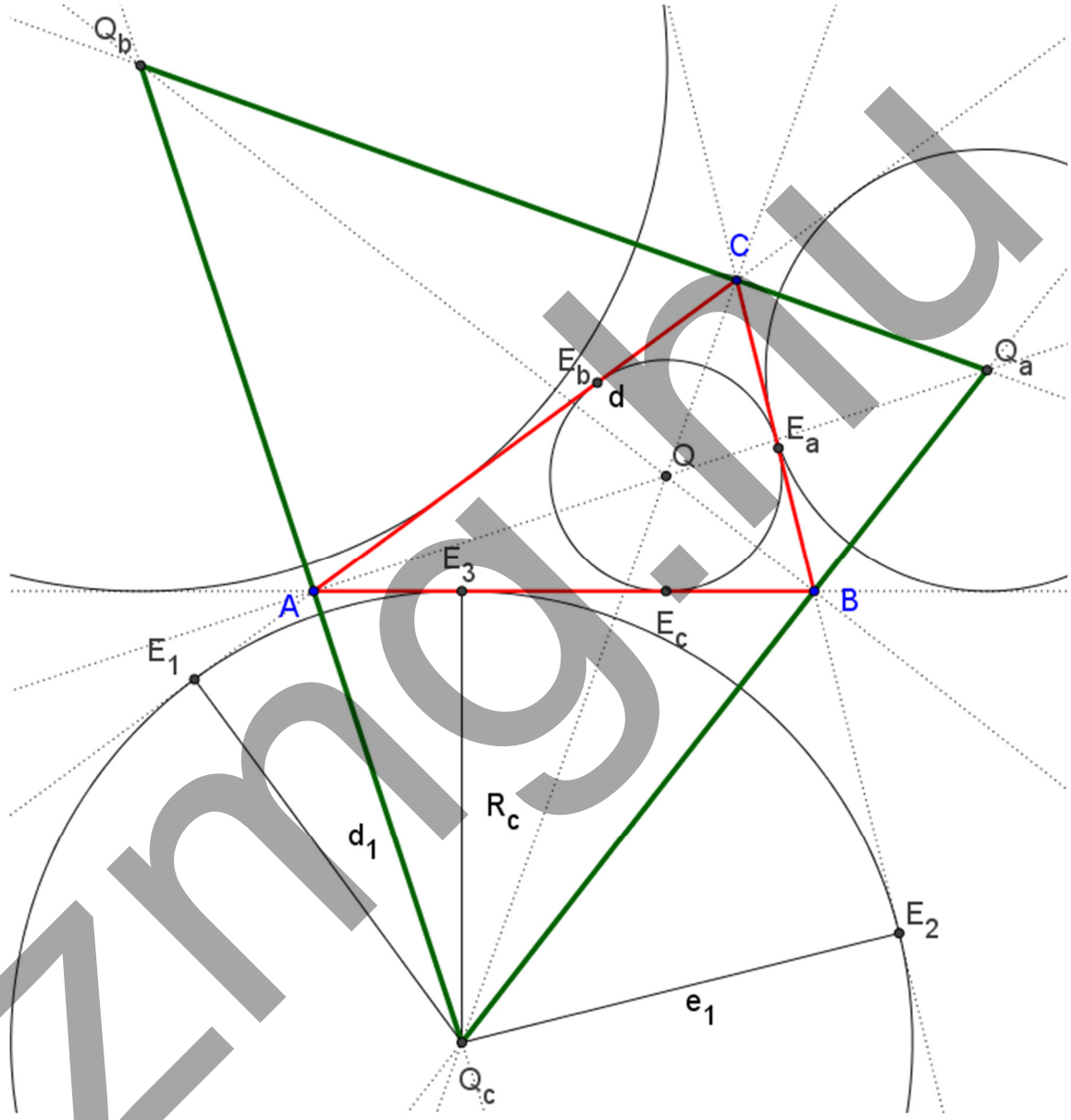
szmg.hu

d) Tételek a Δ-höz írt körrel kapcsolatban:

(i) A háromszöghöz írt kör a két meghosszabbított oldalt a szemközti csúcstól **félkerület** távolságra érinti.

(ii) A háromszöghöz és a háromszögbe írt kör két **külső érintőszakasza** egyenlő a közös belső érintőn található harmadik **oldallal**.

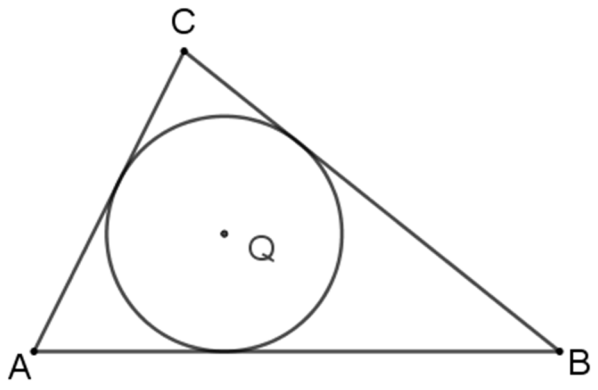
(iii) A külső és belső kör közös érintőszakasza egyenlő a másik két oldal különbségének abszolútértékével.



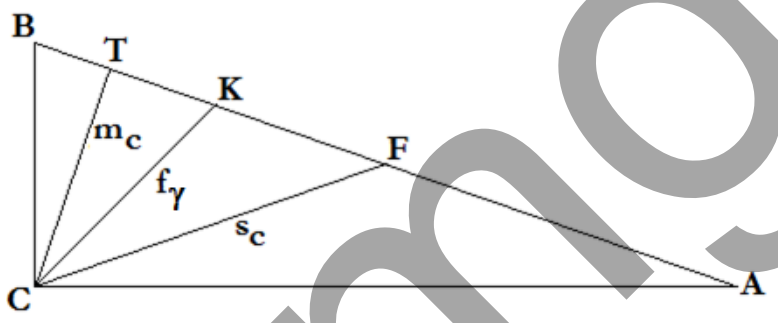
szmg.hu

e) Gyakorlópéldák:

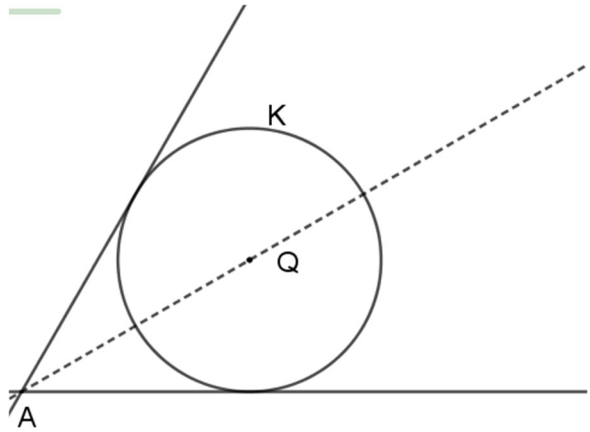
(i) Szerkesszünk háromszöget, ha adott egyik oldala, azon fekvő egyik szöge és beírható körének sugara. (c, α, ρ)



(ii) Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög derékszögének a szögfelezője (f_γ) egyben felezi az m_c és s_c szögét is!



(iii) Egy 60°-os szög szárait érinti egy ρ=4 cm sugarú kör. Ez a kör a szögfelezőt két pontban metszi. Milyen messze vannak ezek a pontok a szög csúcsától?



szmg.hu

III. A Δ súlyvonalai és a súlypontja

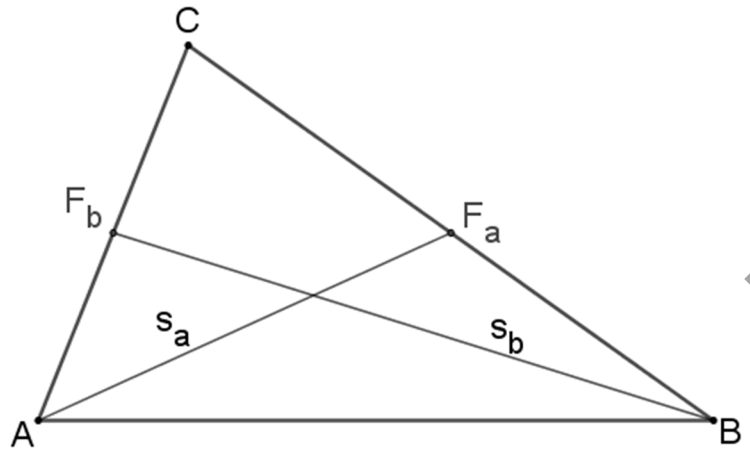
1) Súlyvonal és középvonal

a) Def.: Δ-ben a súlyvonal a csúcsot a szemközti oldalfelezőponttal összekötő szakasz.

b) Tétel: A Δ középvonala párhuzamos és fele a megfelelő oldalnak.

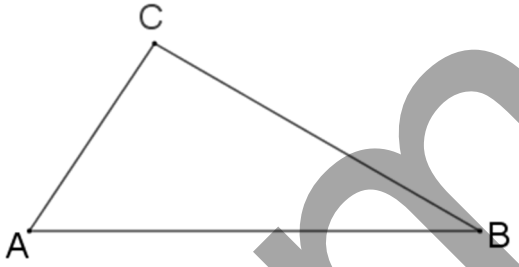
2) Tétel: A háromszög súlypontja

A háromszög súlyvonalai egy pontban (S), az oldalhoz közelebbi harmadolópontjukban metszik egymást. Vagyis a súlypont a súlyvonalakat 2:1 arányban osztja az oldalakhoz közelebb.

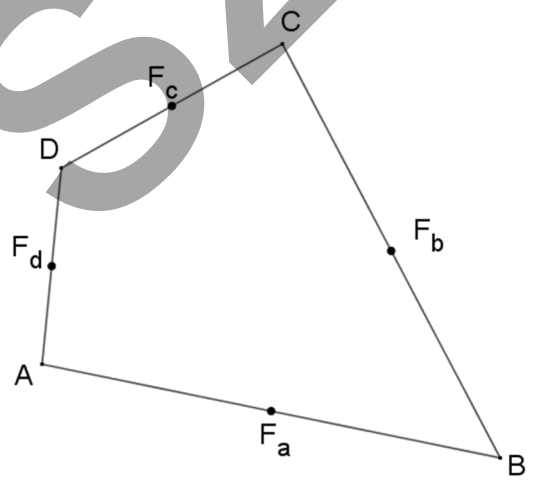


3) Alappéldák

a) Egy Δ oldalai: a=5, b=3, c=6. Mekkora s_c?

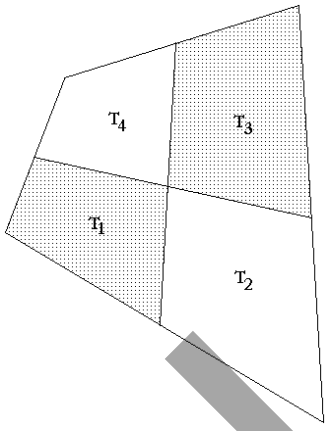


b) Állítás: négyszög oldalfelezőpontjai paralelogrammát alkotnak.

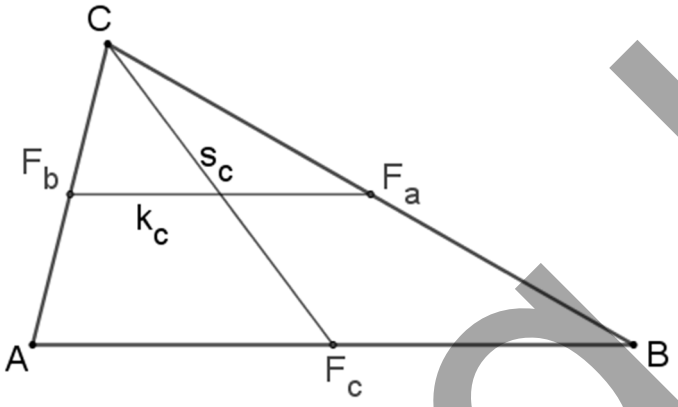


szmg.hu

c) * Állítás: négyszögben meghúzva a két középvonalat: $T_1+T_3=T_2+T_4$



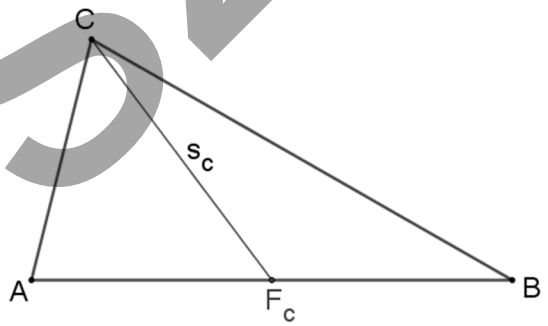
d) Milyen arányban osztja a k_c középvonal és s_c súlyvonal egymást a Δ-ben?



Ebből kijön egy új bizonyítás a súlypont létezésére - „analitikus” szemlélettel.
Az oldalfelezőpontok alkotta Δ-ben az eredeti súlyvonalak továbbra is súlyvonalak maradnak.
Ugyanakkor a ezek a Δ-ek „egyre kisebbek” – pontosabban éppen feleződnek az oldalak. (Bizonyítható, hogy egy háromszögben a leghosszabb szakasz a leghosszabb oldala)
Ha a három súlyvonal nem egy pontban metszené egymást, akkor az a három metszéspont egy idő után „kilógna” a csökkenő méretű háromszögekből, pedig a súlyvonalak mindig belül haladnak a háromszögben.

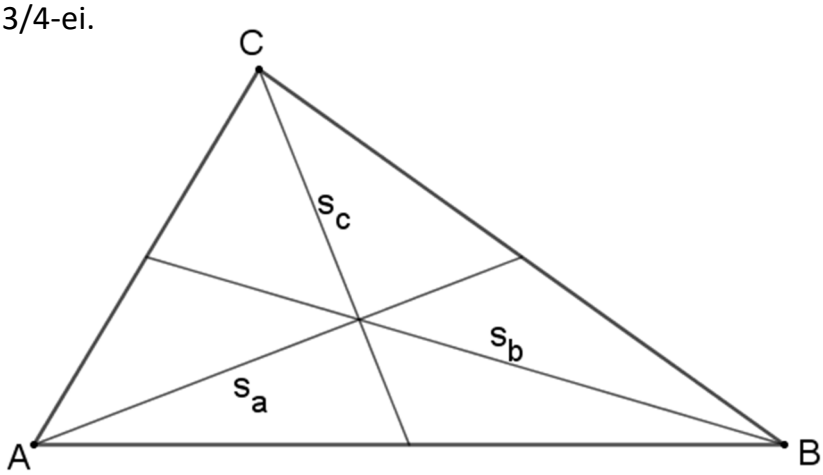
e) Adott egy súlyvonal és a két közrezáró oldal: Adott a;b; s_c. Kell a Δ.

Ötlet: súlyvonalas példánál sok esetben…

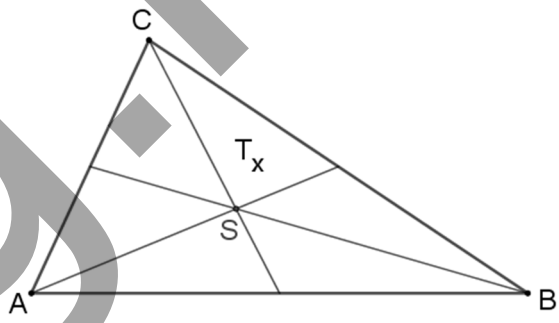


szmg.hu

f) * Állítás: Δ súlyvonalaiból Δ szerkeszthető, melynek súlyvonalai az eredeti Δ oldalainak 3/4-ei.

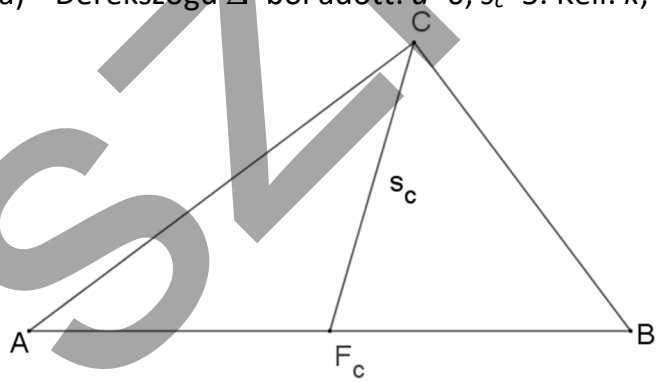


g) Fejezzük ki T_{ABC}-ből T_x-et.



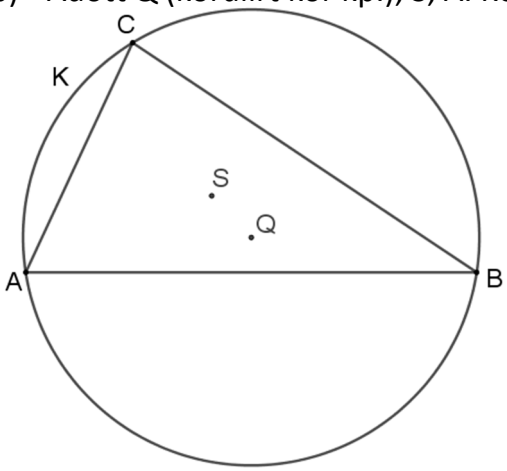
4) Egyéb példák

a) Derékszögű Δ-ből adott: a=6; s_c=5. Kell: k; T; s_a; s_b; R; ρ.



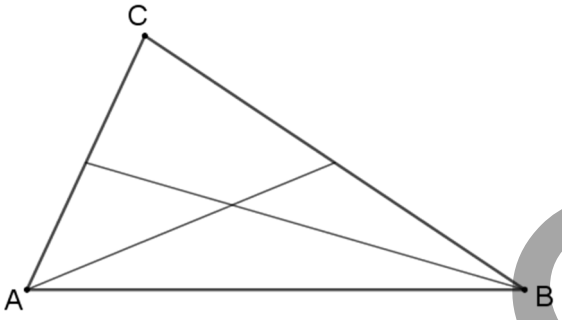
szmg.hu

b) Adott Q (körülírt kör kp.), S, A. Kell a Δ.



c) (1 súlyvonal két közrezáró oldal) Már láttuk.

d) *(2 súlyvonal egy oldal)* Adott a; s_b; s_a. Kell Δ.



e) * (3 súlyvonal) Adott s_a, s_b, s_c. Kell a Δ.

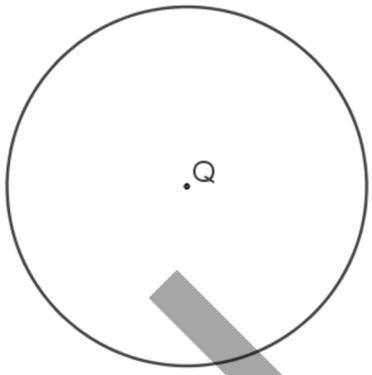
szmg.hu

5) Vektorok ismétlése, és a súlypontba mutató vektor

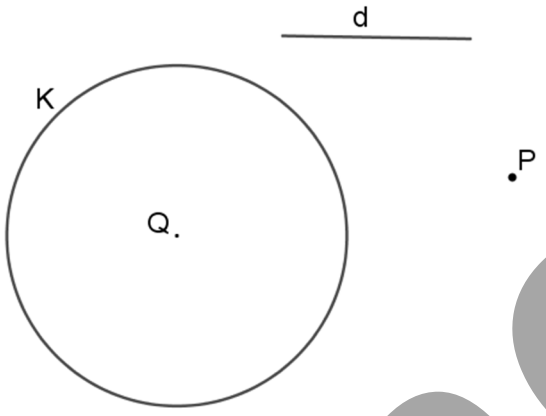
Kerületi szögek - Húrnégyszög - Érintőnégyszög

I. Ismétlés

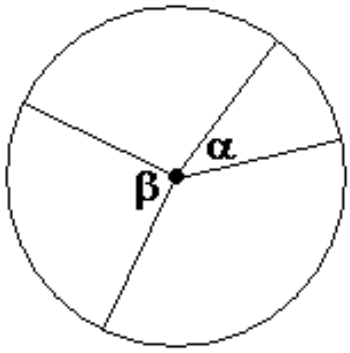
1) Fogalmak: ív, cikk, szelet.



2) Két kör közös külső és belső érintői
   Táblán, paraméterekkel.
3) Adott egy kör, egy *d* szakasz és a körön kívül egy P pont. Szerkesszünk a P-ből olyan szelőt, melynek a körbe eső húr-szakasza *d* hosszúságú.



4) Mértékek a körrel kapcsolatban
   a) **Középponti szög**: a kör egy középponti szöge az a szög, melynek csúcspontja a középpont, és szárai két sugár (lehetnek azonosak is!).



   b) Ív és középponti szög: Ha egy körben az α szöghöz i_α ív, a β-hoz i_β ív tartozik, akkor: $\frac{i_\alpha}{i_\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. (Ezt használtuk fel a radián (ívmérték) és a szögek kapcsolatára.) (Racionális arányoknál bizonyíthatjuk, egyébként elhisszük.)

   15° $\leftrightarrow$ hány radiánnak felel meg?

   $\frac{17}{12}\pi \leftrightarrow$ radián hány foknak felel meg?

   Egy 9 cm sugarú, 25°-os körcikk íve milyen hosszú?

szmg.hu

c) Körcikk területe és kp-i szög: Ha egy körben az α szöghöz t_α területű körcikk, a β-hoz t_β, akkor: $\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. (Racionális arányoknál bizonyíthatjuk, egyébként elhisszük.)

Egy 5 cm sugarú körben egy 27°-os körcikknek mekkora a területe?

d) Számolások

21°35’23”=? fok

84,256° = hány fok, perc, stb.

5) Ismétlések

a) Pitagorasz tétel

Pitagoraszi számhármasok:

3 4 5; 5 12 13; 7 24 25; 8 15 17; 9 40 41; 11 60 61;

b) A paralelogramma átlóira emelt négyzetek területösszege = az oldalakra emelt négyzetek területösszegével.

c) Emlékeztető: Δ súlyvonalára, súlypontjára vonatkozó tétel.

d) Emlékeztető: Thalész tétel

6) A mértani hely fogalma, lényege a geometriában.

Geometriában sok esetben pontokat keresünk.

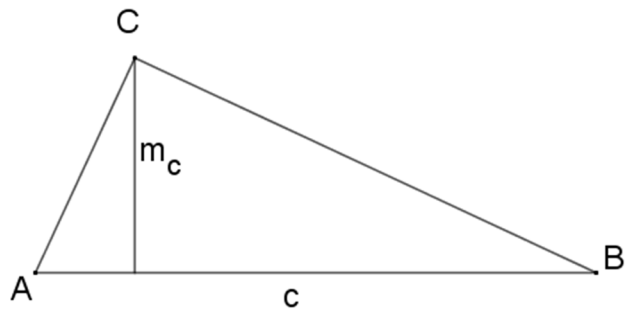
A pontokat általában kettő (vagy több) halmaz metszetében találjuk meg. Pl.: egyenes és kör. Ezen halmazokat (az egyenes és a kör) a pontok tulajdonsága alapján tudjuk meghatározni. Ezek a halmazok egyértelműek: a sík bármely pontjáról el kell tudni dönteni, hogy elemük vagy sem.

E halmazok a *mértani helyek* a geometriában.

Például: A Thalész kör mértani hely. Minden pontja az adott tulajdonsággal rendelkező pont, és rajta kívül máshol nincs olyan tulajdonsággal rendelkező pont.

szing.hu

Pl: Adott egy derékszögű Δ-ből: c és m_c. Szerkesztendő a Δ.

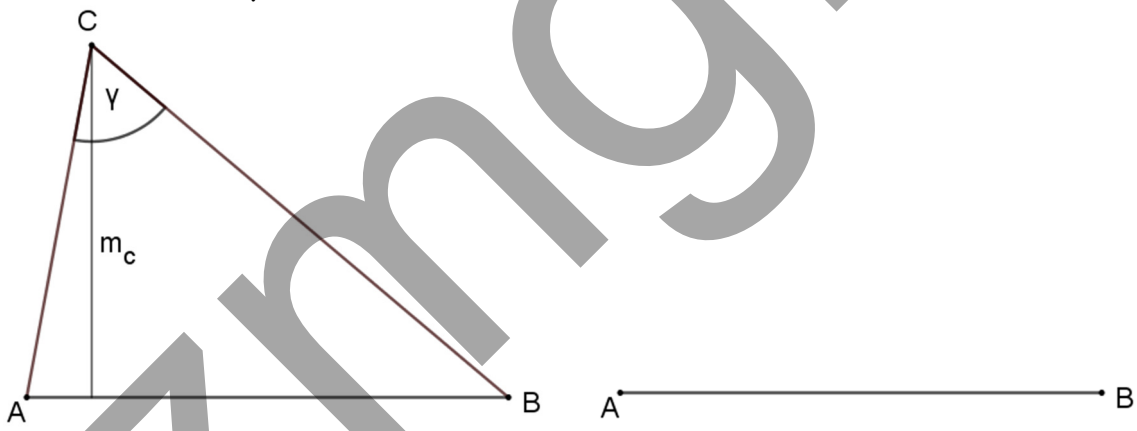


Vegyük észre: a két mértani hely miatt tudtuk, hogy hol kell lennie a C pontnak.

Az egyik mértani hely:

A másik mértani hely:

7) Célunk lesz egy új mértani hely megfogalmazása
Adott Δ-ből: c; m_c és γ.



Mo.: $c \Rightarrow$ A és B. Kell még C.
Hol van az C?
$C \in e \rightarrow d(e;c)=m_c$.

Még minek eleme az C?
Jó lenne, ha egy könnyen szerkeszthető alakzat eleme lenne, amely alakzatot a α szög definiálná valahogy.

Tehát: keressük azokat a pontokat, amelyből egy szakasz adott szög alatt látszódik.
Kézzel rajzolgassunk ilyeneket. Ehhez jó egy darab papír, amely meg van hajtva valamilyen szöggel.
Vegyük észre, hogy a BC szakaszt két körívből látjuk az adott α szögből.

szmg.hu

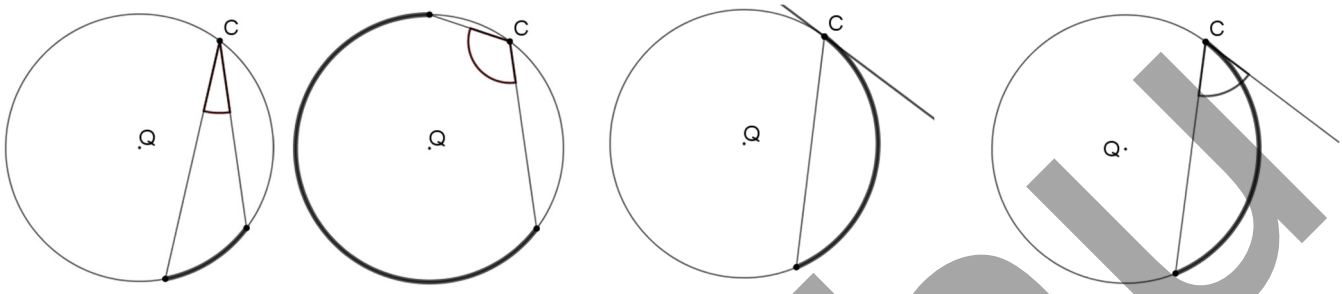
II. A középponti és kerületi szögek tétele

geometria_H_2_1_kozepponti_keruleti_szogek.ggb

1) Definíció - Kerületi szög

A kör **kerületi szöge** az a konvex szög, melynek csúcsa a kör kerületén van és a szárai vagy két húr, vagy egy húr és egy érintő. Ez utóbbi az **érintőszárú kerületi szög**.

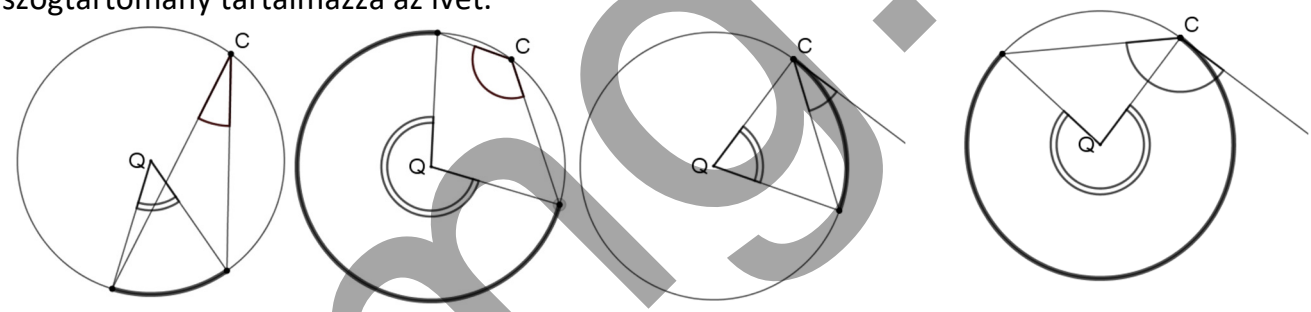
Az adott kerületi szög ahhoz a körívhez tartozik, vagyis azon a „köríven nyugszik”, amelyik körívet a szögtartomány lefedi a körből.



Egy kicsit később meg fogjuk mutatni, hogy egy körben egy adott íven nyugvó kerületi szögek megegyeznek!

2) Def.: Középponti szög

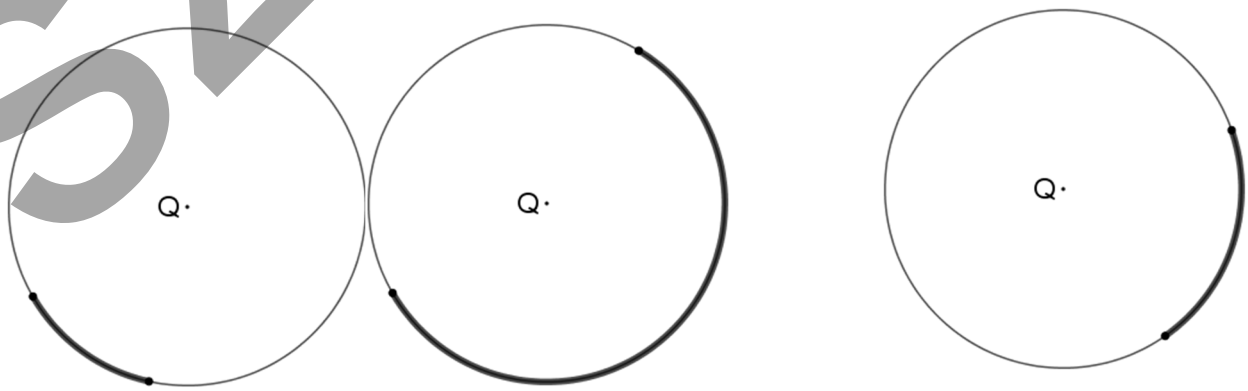
Egy körben egy kerületi szöghöz tartozó **középponti szög** az a szög, melynek csúcsa a kör középpontja, 2 szára 1-1 sugár, mely a kerületi szöghöz tartozó körív 2 végpontjába fut, és a szögtartomány tartalmazza az ívet.



Úgy mondjuk, hogy ugyanahhoz az ívhez tartozó/íven nyugvó kerületi és középponti szög.
Nyilván egy középponti szöghöz nagyon sok kerületi szög tartozik…

Fontos: húrhoz két kerületi és két középponti szög is tartozik – a viszonyukról később.

Rajzolj fel egy hegyes, egy tompa és egy érintőszárú kerületi szöget, majd a hozzájuk tartozó középponti szöget, és mérd le mindet! Mit veszel észre?



A kp-i szöget mindenki ugyanúgy mérte, de a kerületi szöget mindenki máshol…

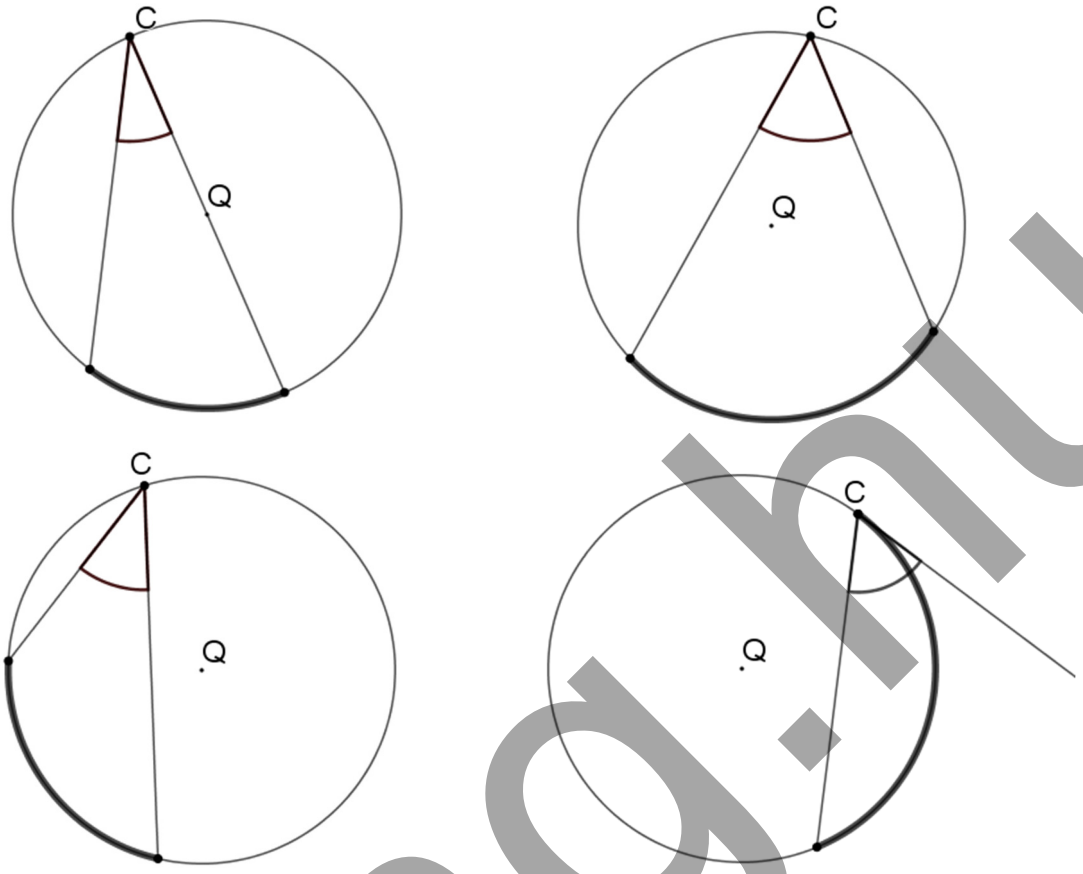
szmg.hu

3) A kerületi szög és középponti szög kapcsolata

Állítás: egy körben az azonos ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ívhez tartozó kerületi szögnek.

geometria_H_2_2_keruleti_szog_fele_kozeppontinak.ggb

Biz:



1. eset: $Q \in$ egyik szár

2. eset: Q belső pontja a szögtartománynak

3. eset: Q külső pontja a szögtartománynak.

4. eset: érintő szárú kerületi szögek:

Ha $ACB\angle = 90° \Rightarrow Q \in AB \Rightarrow AQB\angle = 180°$✓.

Ha $ACB\angle < 90° \Rightarrow BCQ\angle = QBC\angle = 90 - \alpha \Rightarrow AQB\angle = 2\gamma$✓

Ha $ACB\angle > 90° \Rightarrow$ „Kopernikuszi fordulattal”:

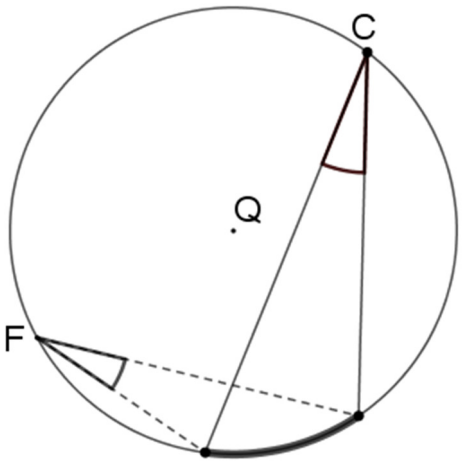
szmg.hu

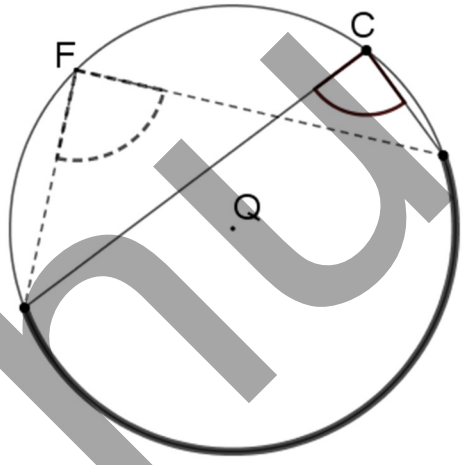
4) A Kerületi szögek tétele

Tétel: Egy körben ugyanazon az *íven nyugvó* kerületi szögek egyenlők, megegyeznek a hozzájuk tartozó kp-i szög felével.

Biz.: Az előző állításból következik.

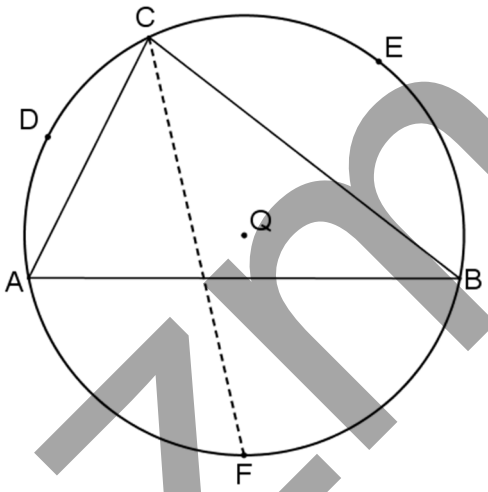
Mivel egy körben azonos hosszúságú ívekhez azonos nagyságú középponti szögek tartoznak, ezért kimondhatjuk, hogy azonos sugarú körökben azonos hosszúságú ívekhez azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak; ILLETVE: azonos nagyságú kerületi szögekhez azonos nagyságú ívek tartoznak.





Egy fontos következmény a háromszög szögfelezőjére:

⇒Háromszög szögfelezője a körülírt kör szöghöz tartozó ívét felezi.



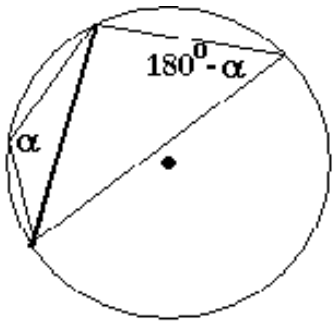
5) Körbe írt négyszög, illetve adott húrhoz tartozó kerületi szögek

Egy húrhoz két ív tarozik, melyet a húr választ el.

Az egyik íven α kerületi szög, így a hozzá tartozó kp-i: 2α.

A másik ívhez tartozó kp-i szög így $360° – 2\alpha$

tehát a másik ívhez tartozó kerületi szög: $180° - \alpha$.



Vagyis az azonos húrhoz tartozó kétféle kerületi szög egy körben egymás kiegészítő szögei.

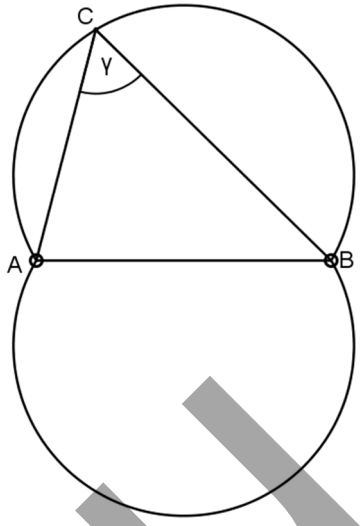
Tehát húrnégyszög szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást – kiegészítő szögek.

Kérdés, ez csak szükséges, vagy elégséges föltétel is?

szmg.hu

III. Tétel: A látószögkörívek tétele - mértani hely

Áll: Azon pontok halmaza a síkon, melyekből egy adott AB szakasz adott γ ($0° < \gamma < 180°$) szög alatt látszódik két – az AB egyenesre emelt – szimmetrikus nyílt körív, melyeknek az adott szakasz közös húrjuk, és az *A* ill. *B* nem tartozik hozzájuk. A két nyílt körív minden pontja ilyen tulajdonságú, és más ilyen tulajdonságú pont nem létezik. A két körívet együtt *„az AB szakaszra emelt α szögű látókköríveknek”* (v. *„látószögkörív”*) nevezzük.



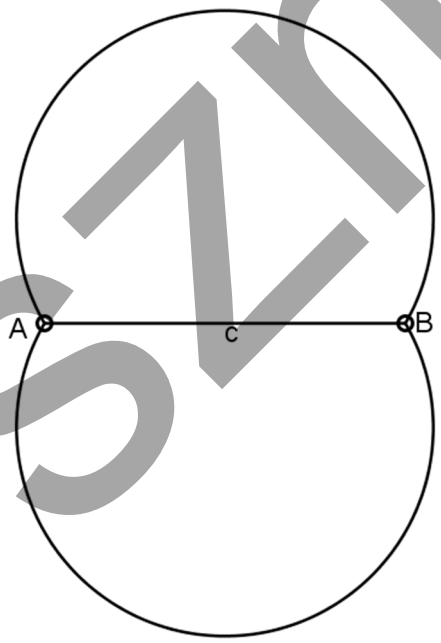
Biz.: Mivel $0° < \alpha < 180°$, ezért szerkeszthető olyan Δ, melynek két csúcsa A és B, a harmadik csúcsnál található szög pedig α. Tekintsük ez a Δ köré írt körnek a *harmadik csúcsot tartalmazó körívét* (elég az *AB* tartóegyenesének egyik oldalán, mert arra *szimmetrikus* lesz minden).

Ennek az *AB*-n kívüli minden pontjából az *AB* szakaszt a *kerületi szögek tétele* alapján α szög alatt látjuk.

Megmutatjuk, hogy csak ezen pontokból látjuk γ szög alatt a szakaszt.

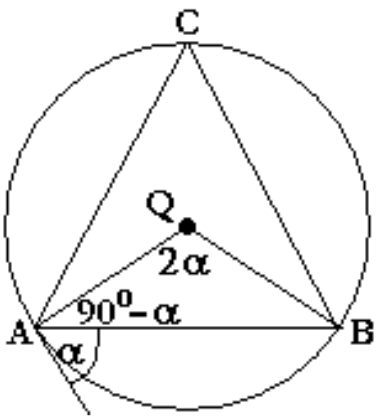
A módszer ugyanaz, mint a Thalész tételnél

Megmutatjuk, hogy az AB egyenes ezen az oldalán a köríven belüli pontokból γ -nál nagyobb, a köríven kívüli pontokból pedig $\alpha\gamma$ -nál kisebb szög alatt látjuk az AB szakaszt. Vagyis a nyílt körív minden pontja jó, más pont pedig nem. Mivel pedig az egész ábra szimmetrikus az AB egyenesre, ezért a keresett mértani helyünk valóban az „α szögű látókörív”.



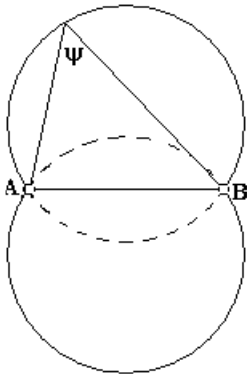
szmg.hu

Módszer az „α szögű látókörív” szerkesztéséhez: **érintőszárút szerkesztünk!**

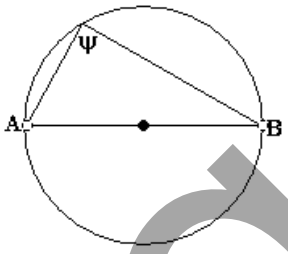


„Szerkessz” szögmérővel egy 4 cm-es szakaszra egy 40°-os látókörívet az ábra mellé!

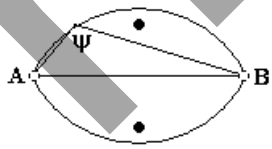
Látókörívek típusai



ψ



ψ=

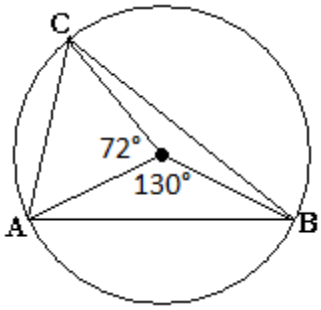


ψ

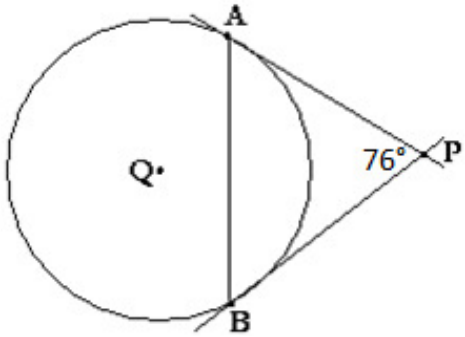
IV. Példák

1) Alappéldák

a) Egy Δ két oldala a köré írt körből 130°-os és 72°-os köríveket metsz le. Mekkorák a háromszög szögei?

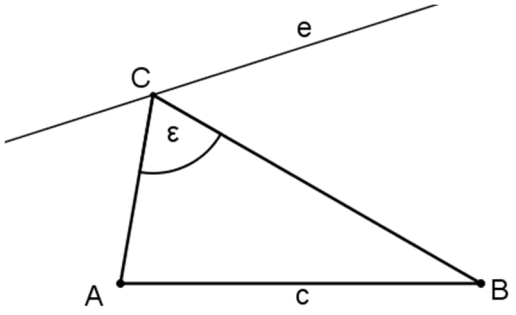


b) Egy pontból egy körhöz húzott két érintő 76°-os szöget zár be egymással. Mekkora kerületi szög tartozik az érintési pontok által meghatározott húrhoz.



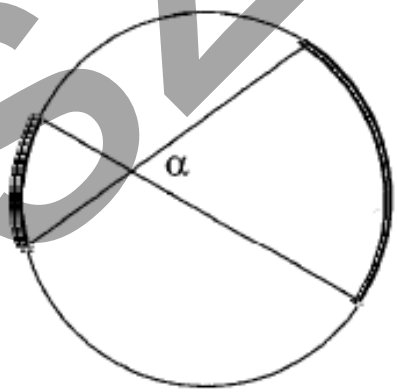
szmg.hu

c) **Alap**: Adott AB, e, ε. Kell $E \in e \rightarrow AEB\angle = \varepsilon$.



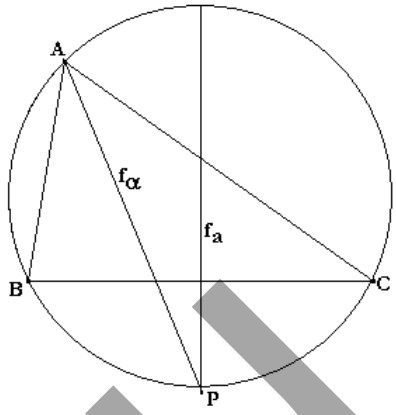
d) Δ-ből adott: γ, m_c, s_c. Kell a Δ.

e) Az ábrán a két vastag körívhez β és γ kerületi szög tartozik. Mekkora α?

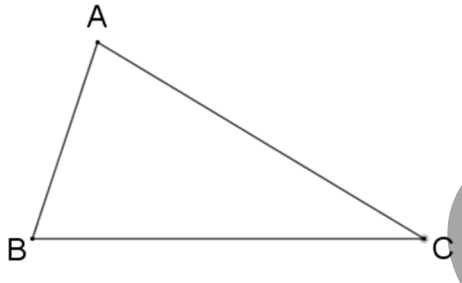


szmg.hu

f) **Alap**.: Állítás: ∀ Δ-ben egy szöghöz tartozó szögfelező és a szöggel szemközti oldal felezőmerőlegese a körülírt körön metszik egymást.



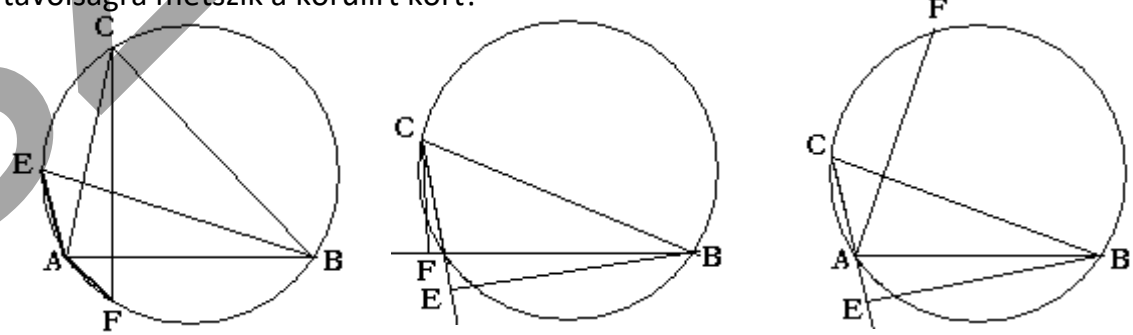
g) **Alap:** Δ-ből adott: α, a, b+c. Szerkesztendő a Δ. (Elv)
tanm_geometria_H_4_6.ggb



Ne feledjük: Geometriában ha szakaszok összege van megadva…

2) Gyakorlópéldák

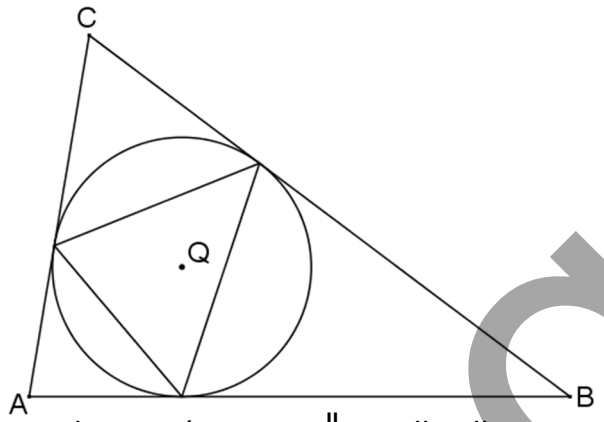
a) Mutassuk meg, hogy a Δ két magasságának meghosszabbításai a harmadik csúcstól egyenlő távolságra metszik a körülírt kört!
Biz.:



szmg.hu

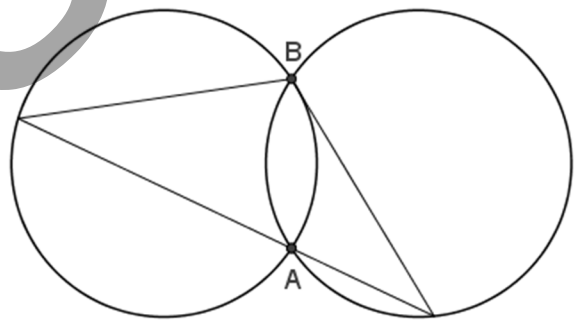
b) Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögből adott α, a $\Rightarrow \exists!$ R (köré írt kör sugara)

c) Állítás: egy háromszögbe írt kör érintési pontjai által alkotott Δ mindig hegyesszögű! $\Leftrightarrow$ Háromszögbe írt kör középpontja mindig belső pontja az érintési pontok által meghatározott Δ-nek. ***tanm_geometria_H_4_9.ggb***



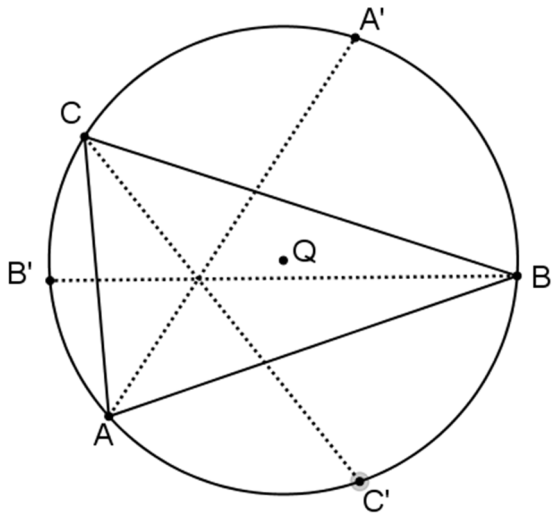
d) **Alap**: Adott AB és e, $\rightarrow$ AB $\parallel$ e. Kell Kell E$\in$ e $\rightarrow$ AEB$\angle$ = maximális.

e) Adott két egyenlő sugarú, egymás metsző K_1 és K_2. Metszéspontjaik: *A* és *B*. Az *A* metszéspontból húzzunk egy szelőegyenest: az egyiket *C* a másikat *D* pontban metszi. Állítás: CD-t az AB Thalesz köre felezi.



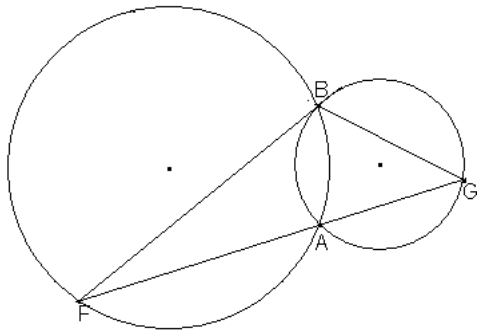
szmg.hu

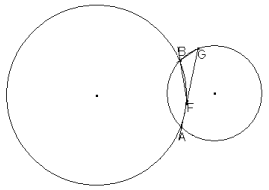
f) Szerkesszünk Δ-et, ha adott a szögfelezőinek a köré írt körrel adott metszéspontjai: A’, B’ és C’.



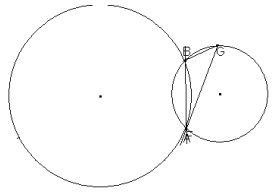
„Kipottyant” tételecske:

g) Adott két, egymás metsző K_1 és K_2. Metszéspontjaik: *A* és *B*. Az *A* metszéspontból húzzunk egy szelőegyenest: ez az egyiket *F* a másikat *G* pontban metszi. Állítás: $GBF\angle$ állandó.



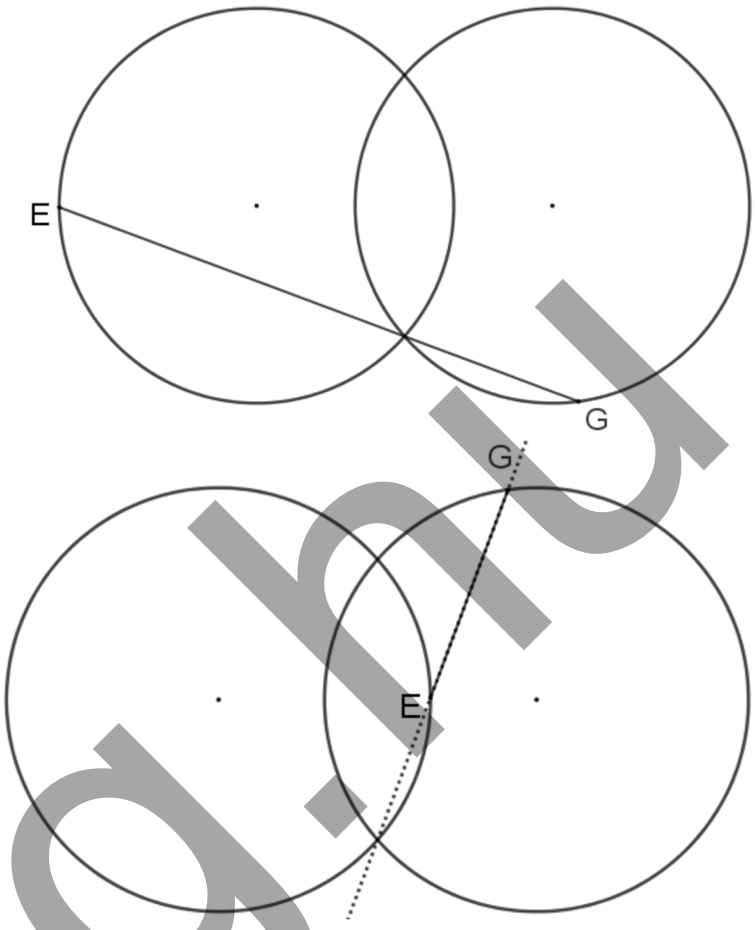


Észrevétel: Mikor lesz maximális a terület?

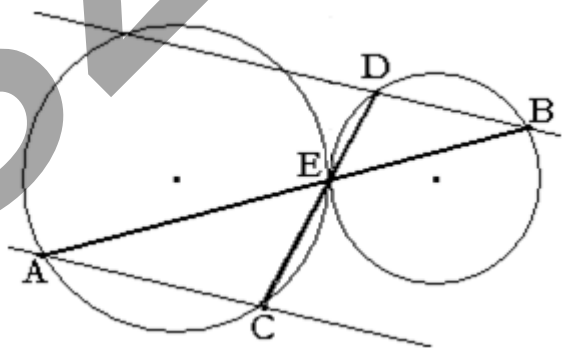


szmg.hu

h) * Adott két egymást metsző, egyenlő sugarú kör. Az egyik metszésponton keresztül közös szelőt húzunk. Mi a közös szelő két kör közé eső szakaszfelező-pontjainak mértani helye?



i) Áll.: Két érintő kör érintési pontján áthaladó két szelő 1-1 körön található végpontjait összekötve két párhuzamos egyenest kapunk.

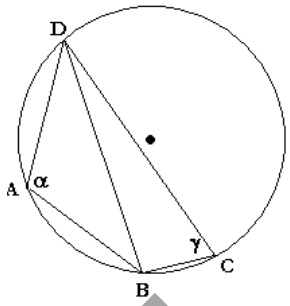


szmg.hu

V. A húrnégyszögek

1) Definíció és tétel

Def.: A körbeírható négyszögeket húrnégyszögeknek nevezzük.



Tétel – A húrnégyszögek ekvivalens tulajdonsága-definíciója
Egy négyszög akkor és csak akkor (pontosan akkor) húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°. (kiegészítő szögek.)

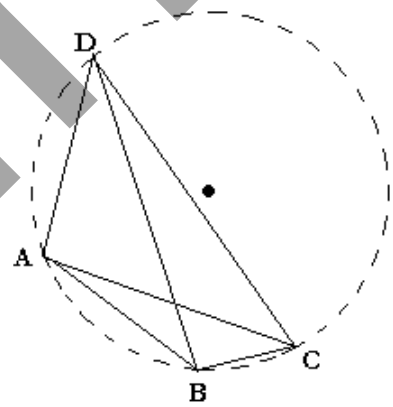
Nyilván elég egy szögpárnak ez a tulajdonság, akkor a másik szögpár is ilyen.

Biz.:
Ha húrnégyszög, akkor $\alpha+\gamma=180°$
Nézzük a BD húrt. Ezt a C-t tartalmazó ívet az A-t tartalmazó ívből α szög alatt látom, így a C-t tartalmazó ívből az A-t tartalmazó ívet 180° - α szög alatt látom. (lsd II./4) ✓

Ha $\alpha+\gamma=180°$, akkor húrnégyszög.
Nézzük például az ABD$\triangle$-et. Rajzoljuk körbe. Az A csúcsot így a körnek nem az A-t tartalmazó ívéből 180°- α szög alatt látom. Mivel γ=180°- α, ezért C-nek szükségszerűen ezen a köríven kell lennie. (A másik látóköríven nem lehet, mert akkor ABCD konkáv). ✓

2) Összefoglalva a húrnégyszögek tulajdonságait

Mondjunk kiegészítő szögpárokat és egyenlő szögpárokat az ábráról! (Alapszögek: α; β; γ; δ)



Új ekvivalens állítás a húrnégyszögre:
ABCD = húrnégysz. $\Leftrightarrow$ ADB$\angle$= ACB$\angle$ és AB-nek ugyanazon az oldalán vannak.
Biz.: triviális
FIGYELEM: sok esetben ezzel a módszerrel látjuk be, hogy egy négyszög húrnégyszög!

Tehát mikor húrnégyszög valamely négyszög? Akkor, ha:

- van olyan Q pont, amelyre QA = QB = QC = QD (Körbeírható)
- oldalainak felezőmerőlegesei egy ponton mennek át (ez a köré írt kör Q középpontja);
- ha szemközti szögeinek összege 180° (az ábrán például a + c = 180°);
- ha egy szöge és a vele szemközti külső szöge egyenlő
- ha egyik oldala két másik csúcsából ugyanakkora szögben látszik (például ACB$\angle$ = ADB$\angle$).

EGYIK LEGNAGYOBB HASZNUK: OLYAN <u>SZÖGEK EGYENLŐSÉGÉT</u> LEHET VELE BELÁTNI, AMELYEKNEK LÁTSZÓLAG SEMMI KÖZÜK EGYMÁSHOZ!!! (Se nem váltószögek, se nem csúcsszögek, nincsenek egybevágó $\triangle$-ekben…)

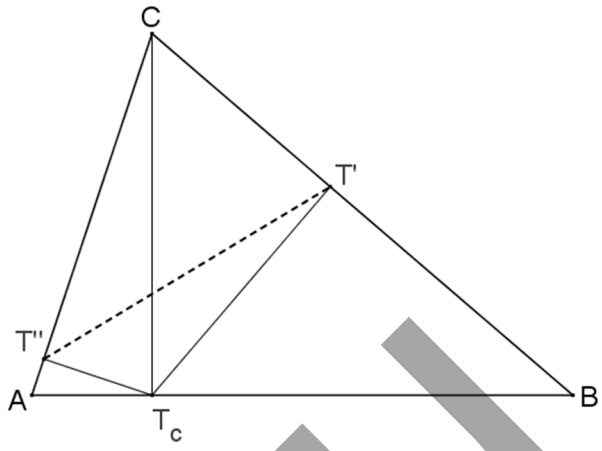
VAGYIS SOKSZOR SZÖGEK EGYENLŐSÉGÉNEK BIZONYÍTÁSÁHOZ HÚRNÉGYSZÖGET KERESÜNK!!!

szmg.hu

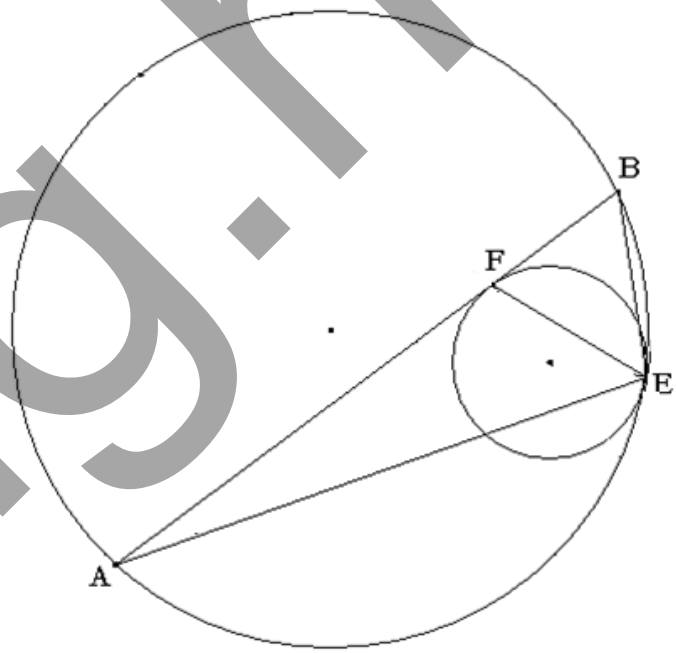
VI. Gyakorlás

1) Alappéldák

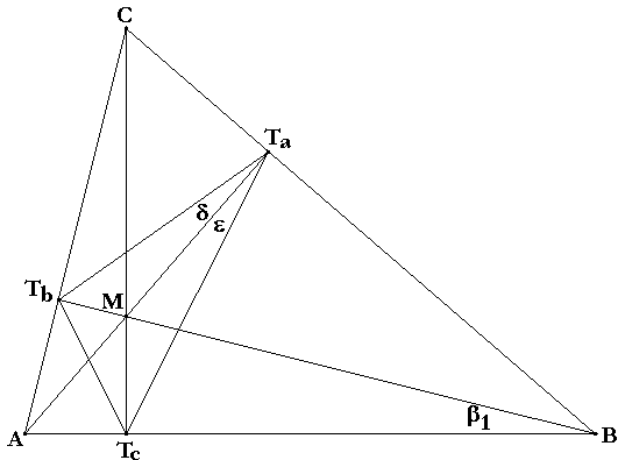
a) Az ABCΔ T_c talppontjából merőlegest állítok az *a* és a *b* oldalakra.
Állítás: CT”T’$\angle$ = CT$_c$T’$\angle$



b) Adott két, egymást belülről érintő kör. Húzzunk érintőt a belső kör egy F pontjához. Mutassuk meg, hogy a körök érintési pontjából az érintőnek a nagyobb körbe eső szakasza kétszer akkora szögben látszódik, mint az érintési ponttól a nagyobb körig terjedő része.



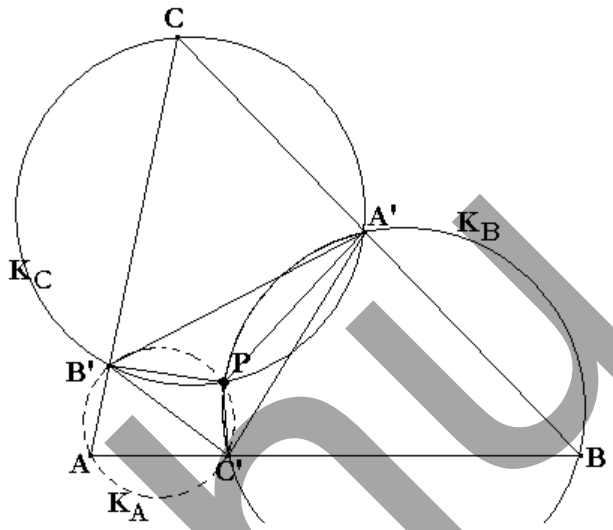
c) Állítás: hegyesszögű Δ-ben a talpponti Δ szögfelezői az eredeti Δ magasságai.
Hány húrnégyszög van az ábrán?



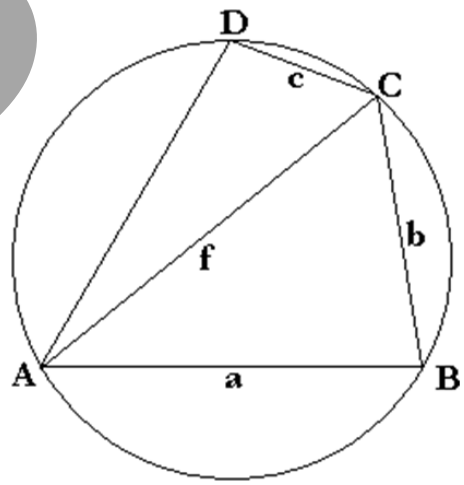
szmg.hu

2) Gyakorlópéldák

a) * Egy ABCΔ oldalain vegyünk fel egy-egy pontot: A' B' C'. Ezek összekötő szakaszai az eredeti Δ-ből 3 kisebb Δ-et metszenek le. Mutassuk meg, hogy e három háromszög köré írt körök egy ponton mennek át!



b) Szerkessz húrnégyszöget, ha adott az *a=AB*, *b=BC*, és *c=CD* oldala, és az A-ból induló *f* átlója.

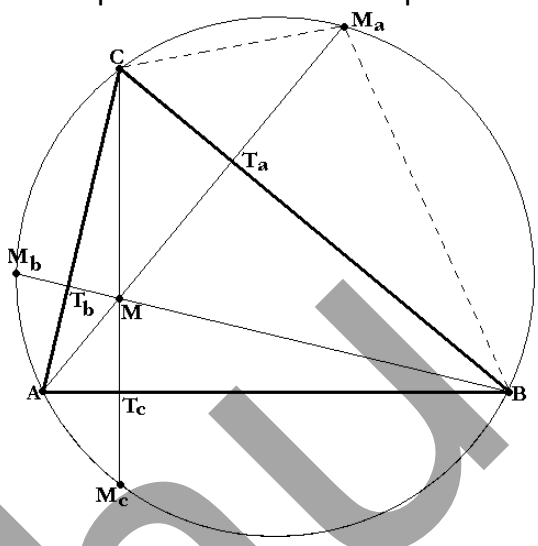


szmg.hu

VII. Húrnégyszögeket felhasználó tételek - példák

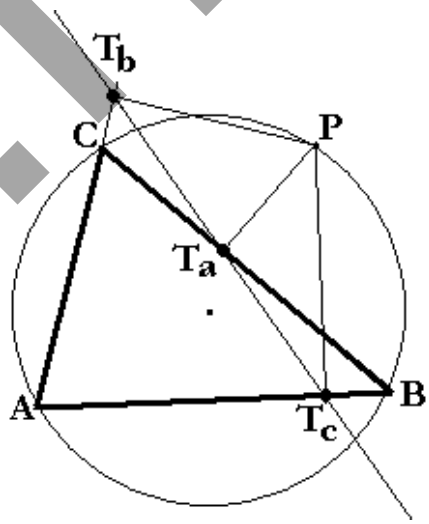
1) A Magasságpont tükörképe az oldalakra

Tétel: A Δ M-pontjának mind az oldalakra, mind az oldalfelező-pontokra vett tükörképe: M'$\in$ K (köré írt kör).



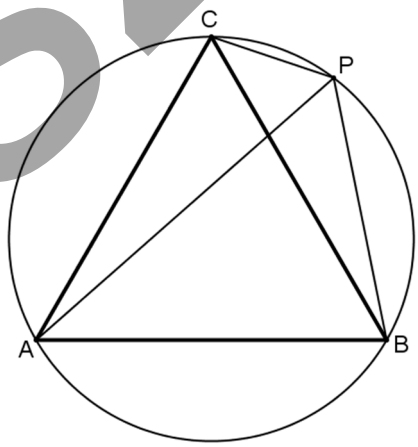
2) A Simson (Wallace) egyenes

Állítás: Ha az ABC háromszög körülírt körének tetszőleges P pontjából mindhárom oldalegyenesre merőlegest bocsátunk, akkor a merőlegesek talppontjai egy egyenesre, az ún. Wallace egyenesre illeszkednek.



3) Egyenlőoldalú háromszög köré írt kör

Egyenlő oldalú Δ köré írjunk kört. Áll.: az A-t nem tartalmazó BC ív bármely P pontjára igaz: PA=PB+PC.

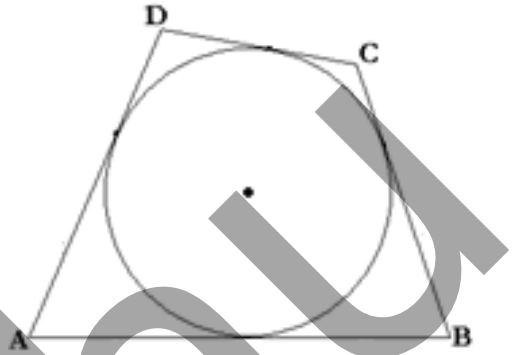


szmg.hu

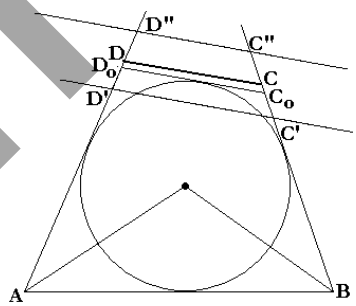
VIII. Az érintőnégyszögek

1) Definíció és tétel

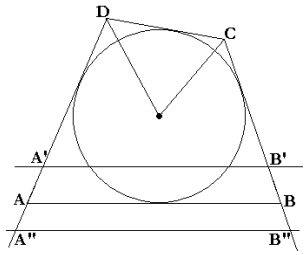
- Definíció – Érintőnégyszög
  Érintőnégyszög az a négyszög, melynek oldalai egy körnek érintői.
  Az érintőnégyszög tehát biztosan konvex ☺.
- Tétel – Az érintőnégyszögek ekvivalens tulajdonsága-definíciója
  Tétel: egy konvex négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha két-két szemközti oldalhosszának összege egyenlő.
  Biz:
  Érintőnégyszög $\Rightarrow$ a+c=b+d
  ST:



Érintőnégyszög $\Leftarrow$ a+c=b+d
Indirekt:
Berajzolom az *a*, *b* és *d* oldalegyenest érintő kört.
Ind. Felt.: tegyük fel, hogy DC nem érinti a kört. Ekkor behúzom a *c* oldallal párhuzamos érintőt: D_0C_0.: Az előző tétel alapján: $a+c_0=b_0+d_0$.
Ha az AD és BC egyenesek metszéspontjától távolabb, „bentebb" húzok párhuzamost (D'C'), akkor: b_0+d_0. csökken, $a+c_0$ nő, vagyis nem egyenlők.
Ha közelebb: akkor b_0+d_0. növekszik, $a+c_0$ csökken, vagyis nem egyenlők.
Tehát az érintő ráesik a *c* oldalra, vagyis *c* érintő.

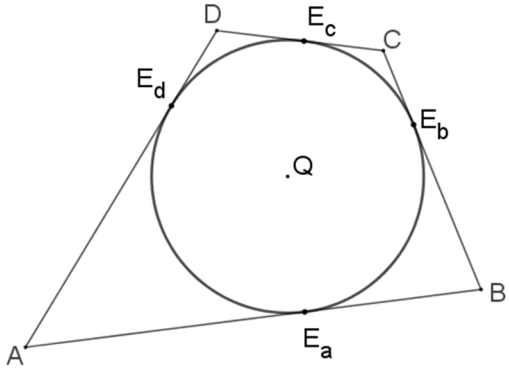


Hibás irány: belerajzolok egy 3 oldalt érintő kört.
Nem rajzolom be az *a* oldalt.
Meghúzom a 4. oldallal párhuzamos érintőt: ekkor:
DC+AB=AD+BC
Ha „bentebb húzok párhuzamost: a+c is csökken, és b+d is csökken.
Nyilván kihasználtuk, hogy a négyszög nem paralelogramma: de akkor ott, ha igaz rá, hogy a+c=b+d, akkor az rombusz, és az biztos érintőnégyszög. (miért?)



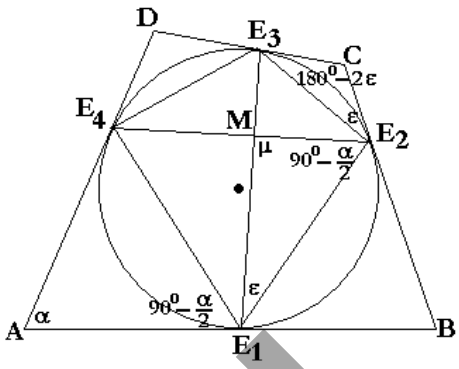
2) Az érintőnégyszögek és húrnégyszögek kapcsolata

a) Az érintőnégyszögek érintési pontjai húrnégyszöget határoznak meg.

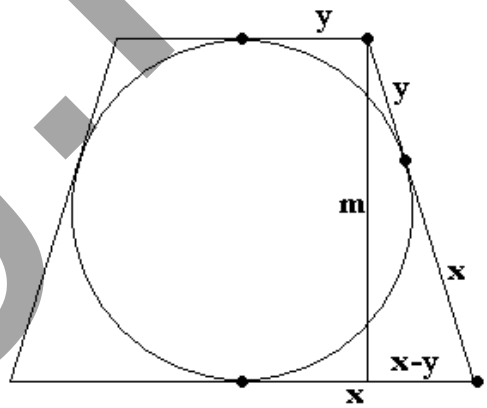


szmg.hu

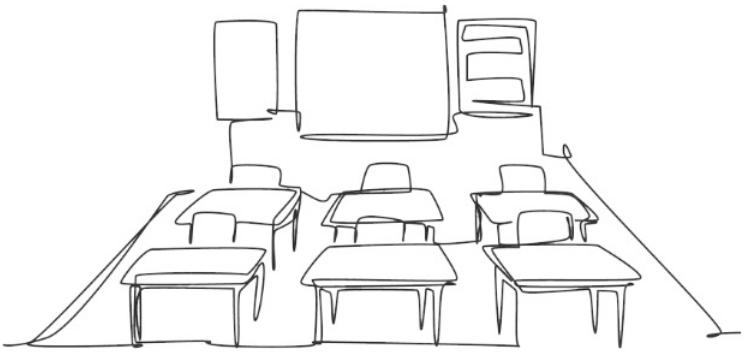
b) * Tétel: Egy érintőnégyszög ⇔ húrnégyszög, ha a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok merőlegesek.



c) * Állítás: Ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor a magassága a két alap mértani közepe.



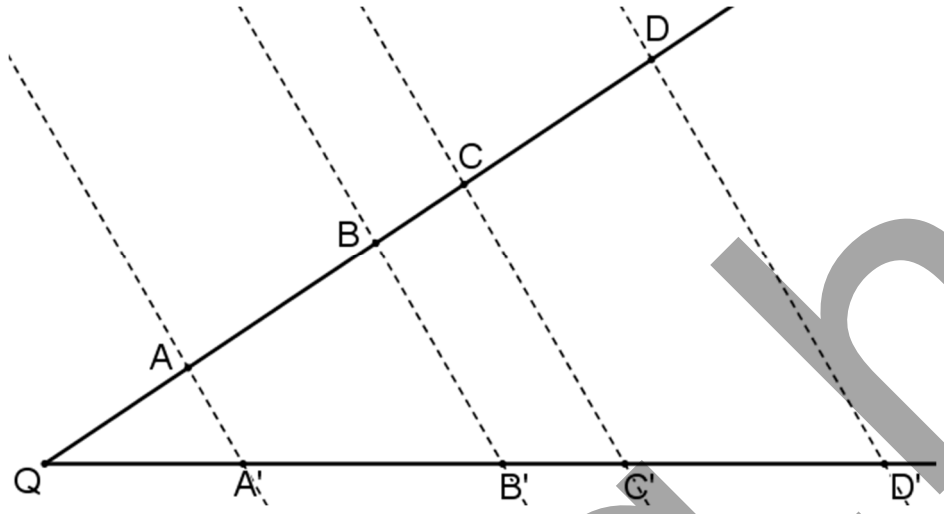
szmg.hu



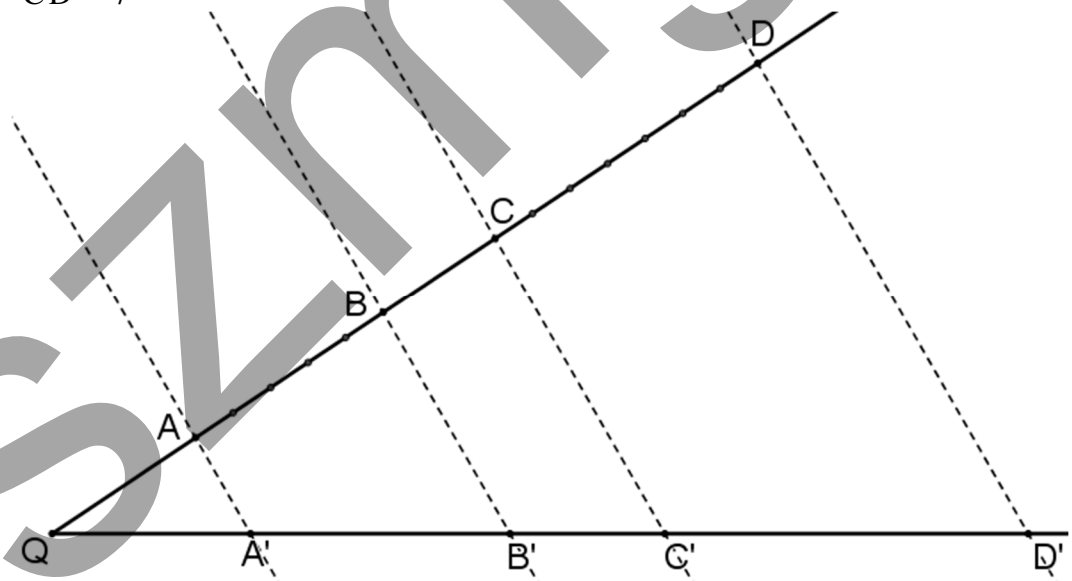
A párhuzamos szelők tétele

I. A párhuzamos szelők tétele illetve a párhuzamos szelőszakaszok tétele
Avagy ahol a geometria és az algebra másodszor találkozik. (Első találkozás: a Pitagorasz-tétel)

1) Segéd-tétel – háromszögek, paralelogrammák
Ha egy Q szög egyik szárára AB=CD szakaszokat mérünk fel és a végpontokon keresztül a másik szárat is metsző párhuzamosokat húzunk, akkor a kimetszett szakaszok is egyenlők lesznek.
Biz.:



2) Konkrét racionális arány
Legyen most: AB:CD=5:7.
Áll.: Ekkor ugyanúgy eljárva, mint az előző példánál: A'B': C'D'=5:7 = AB:CD
$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{5}{7}$
Biz.:



szmg.hu

3) A párhuzamos szelők tétele, csak racionális arányokkal bizonyítva

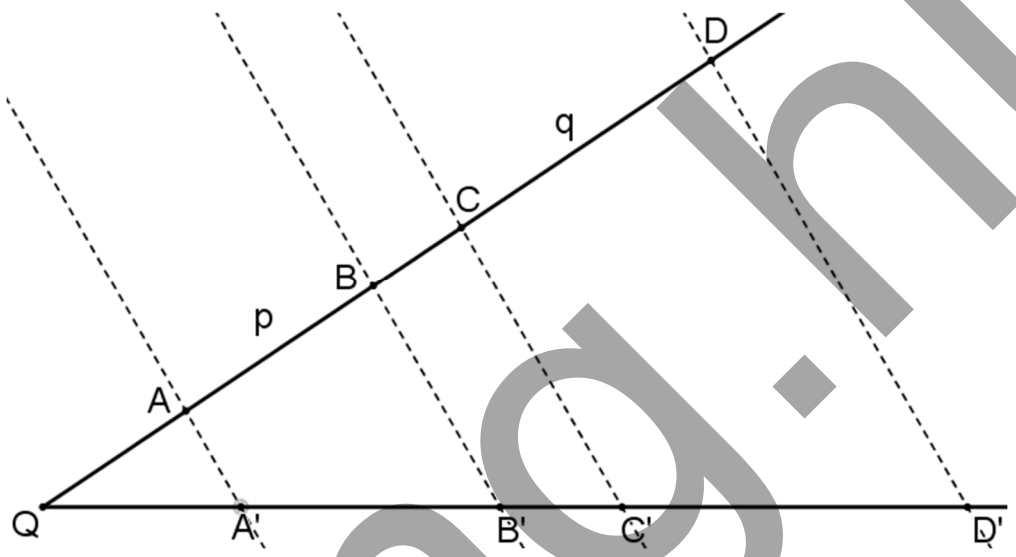
Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok hosszának aránya megegyezik a másik száron keletkezett megfelelő szakaszok arányával.

AB : *CD* = *p* : *q*. (Figyelem: rac/rac=rac, sőt két irrac aránya is lehet racionális!)

Bizonyítás

Osszuk fel *AB*-t *p*, illetve *CD*-t *q* egyenlő szakaszra. Ez esetben egyenlő x szakaszok keletkeznek *AB*-én és *CD*-n. Húzzunk az osztópontokból az eredeti párhuzamosokkal párhuzamos egyeneseket. Ekkor az *A'B'*-n és a *C'D'*-n a Segédtétel szerint egyenlő *y* szakaszok keletkeznek.

A'B'=p·y C'D'=q·y. Így: $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{p\cdot y}{q\cdot y}=\frac{p}{q}=\frac{AB}{CD}$. ✓



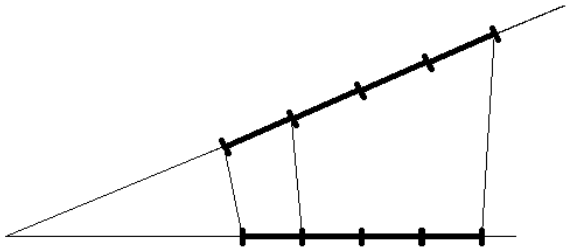
Nyilván teljesen mindegy, hogy egy előre felvett egységünkhöz képest egész, racionális vagy éppen irracionális hosszúságúak az AB és CD szakaszaink, egyedül az a fontos, hogy arányuk racionális legyen:

Pl.: AB=$\frac{8}{3}$, CD=$\frac{7}{5}$. Ekkor: $\frac{AB}{CD}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{7}{5}}=\frac{40}{21}$. Ugyanígy lehet AB=5·$\sqrt{2}$ és CD=8·$\sqrt{2}$.

FIGYELEM: Természetesen az állítás az ábrán MINDEN MEGFELELŐ SZAKASZPÁRRA IGAZ, ÍGY a QA és QB szakaszokra is!

4) A párhuzamos szelők tételének megfordítása

a) Próbáljuk megfogalmazni a megfordítást!
Vigyázat – lásd ábra!

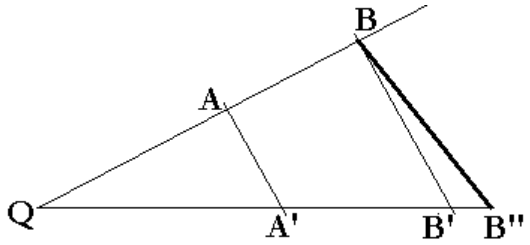


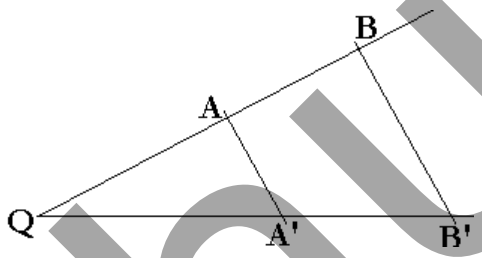
szmg.hu

b) A párhuzamos szelők tételének megfordítása: ha két egyenes egy szög száraiból a CSÚCSTÓL MÉRVE olyan szakaszokat vág le, amelyek hosszának aránya mindkét száron megegyezik, akkor a két egyenes párhuzamos.

Biz indirekt.: Legyen QA:QB = QA':QB'. Tegyük fel, hogy ∃ a *QB'* száron egy *B"*≠B' → BB" ∥ AA'. Ekkor: $\frac{QA}{QB}=\frac{QA'}{QB'}$ az eredeti feltétel alapján. Ugyanakkor a párhuzamos szelők tétele miatt: $\frac{QA}{QB}=\frac{QA'}{QB''}$.

Így: $\frac{QA'}{QB'}=\frac{QA'}{QB''}$. Vagyis QB'=QB", így B'≡B". ☠





5) A Párhuzamos szelőszakaszok tétele

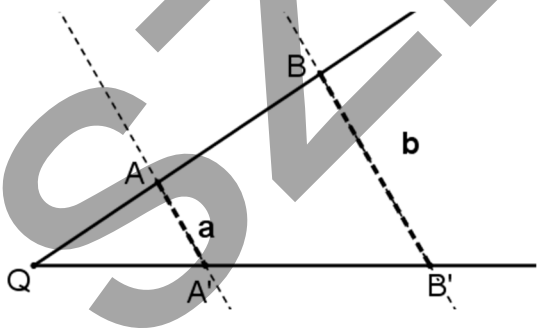
Egy szög szárait metsző ∥-okból a szögszárak által kimetszett szakaszok hosszának aránya megegyezik a ∥-ok által az egyik szárból kimetszett, csúcstól induló szakaszok arányával: $\frac{QA}{QB}=\frac{AA'}{BB'}$ (Nyilván akkor a másik szárból kimetszettekével is.)

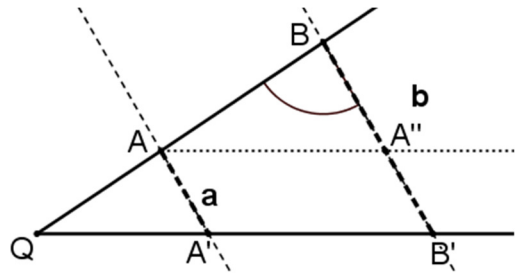
Biz.:

Nézzük a B csúcsú szöget!

Húzzunk A-ból párhuzamost QA' szárral. Ez A"-ben metszi BB'-t. Mivel A'B'A"A paralelogramma, ezrét A"B'=AA'-vel.

Nézzük a QBB'-szöget, és alkalmazzuk rá a QB' és AA" párhuzamosokkal a párhuzamos szelők tételét:





szimg.hu

II. Példák

1) Alap

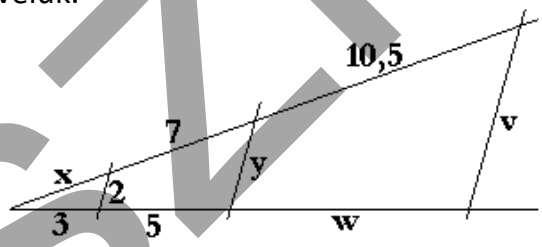
a) Osszunk fel egy szakaszt 5 egyforma részre

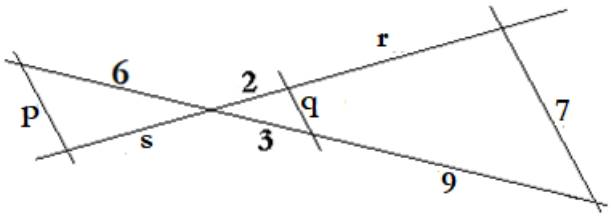
Adjuk meg egy szakasz 3:4 arányú H osztópontját!

És hogy osztunk egy szakaszt: $1\frac{5}{3}$: 2 : 2,3 arányban?

És hogyan $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ arányban?

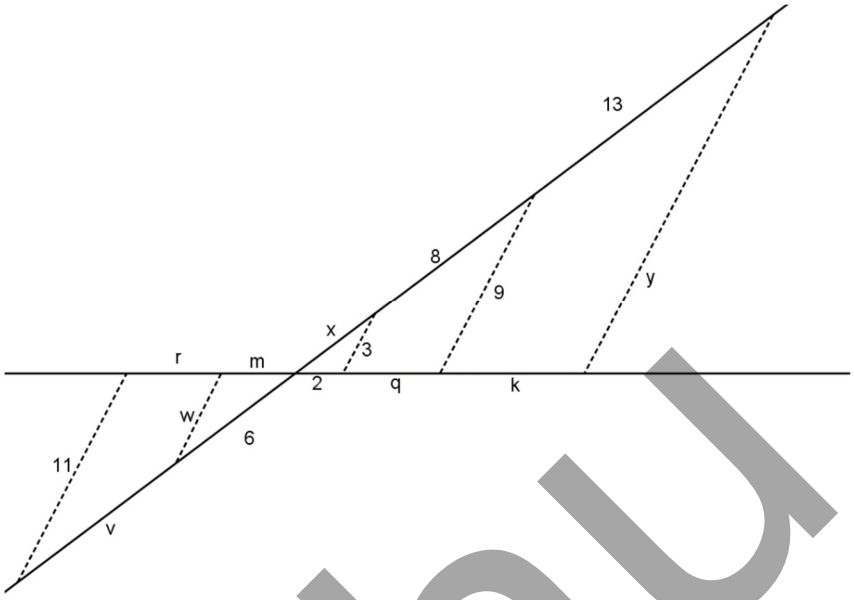
b) Számítsuk ki a hiányzó adatokat:
Ötletek: Ha lehet, soha ne kiszámolt adatokkal dolgozzunk: nem hurcoljuk magunkkal a hibákat. Ha lehet, rögtön a számlálóba kerüljön az ismeretlen: így könnyebb dolgozni velük.



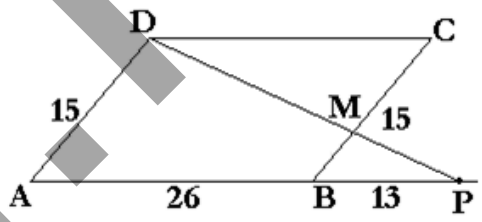


szmg.hu

Metsző egyenespárt párhuzamosokkal szelek. Számold ki a hiányzó adatokat!



c) Adott egy *ABCD* paralelogramma. *AB*=26, *AD*=15. Az *AB* *B*-n túli meghosszabbításán: *BP*=13. *DP*∩*BC*≡*M*. Mekkora *BM*?

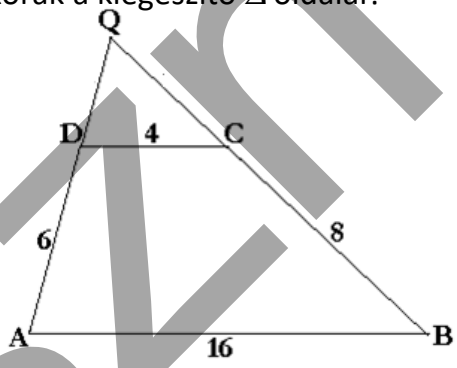


d) Trapéz

Trapéznál a kiegészítő ∆ oldalai:

Adott egy trapéz. Adatai az ábrán.

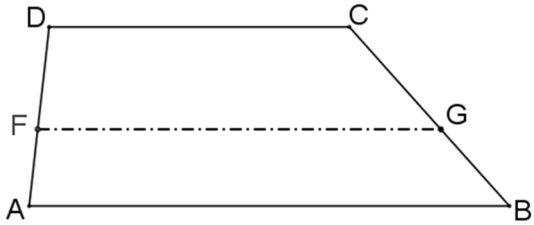
Mekkorák a kiegészítő ∆ oldalai?



Egy trapéz két alapja 8 és 5 egység.

FG||AB és CG : GB = 4 : 3

Mekkora FG?



Alapötletek a trapézzal kapcsolatban:

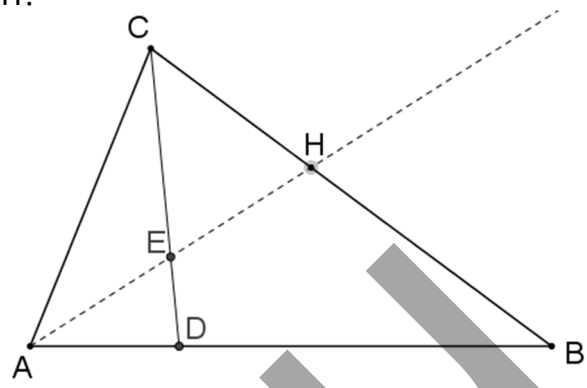
- ♥ *Kiegészítő háromszög („Kalap”).*
- ♥ *Párhuzamos az egyik szárral a trapézon belül.*
- ♥ *Szár felezőpontjára történő tükrözés ⇒ Paralelogramma keletkezik.*
- ♥ *Átlók meghúzása után a szárakon található háromszögek területe egyenlő.*

szmg.hu

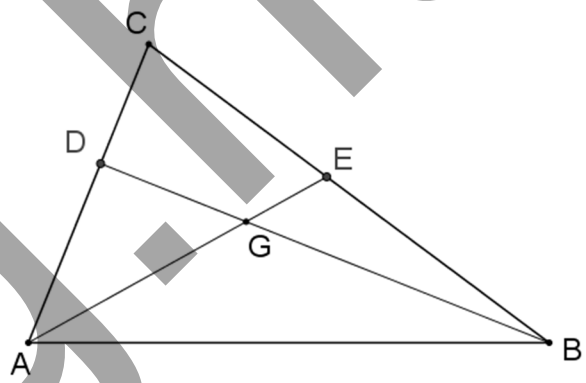
2) Párhuzamos szelők, szelőszakaszok tételének alkalmazása

a) Osztópont

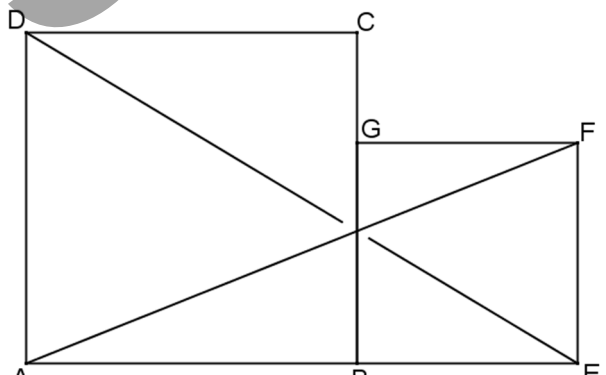
Adott egy Δ. *D az AB*-t *A*-hoz közelebb: 2:5 arányban osztja. E a CD-t D-hez közelebb 3:7 arányban osztja. Milyen arányban osztja BC-t a H?



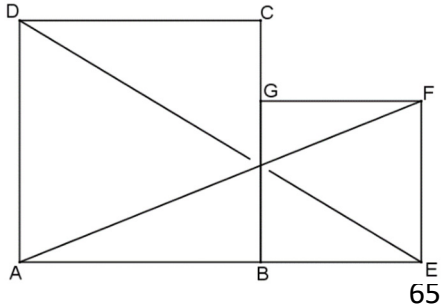
Adott egy Δ. *D az AC*-t *C*-hoz közelebb: 3:2 arányban osztja. *E* a *BC*-t *C*-hez közelebb 4:5 arányban osztja. Milyen arányban osztja *BD* -t a *G*?



b) Adott két négyzet az ábra szerint. Mutassuk meg, hogy *AF* és *ED* a *BC*-n metszi egymást.



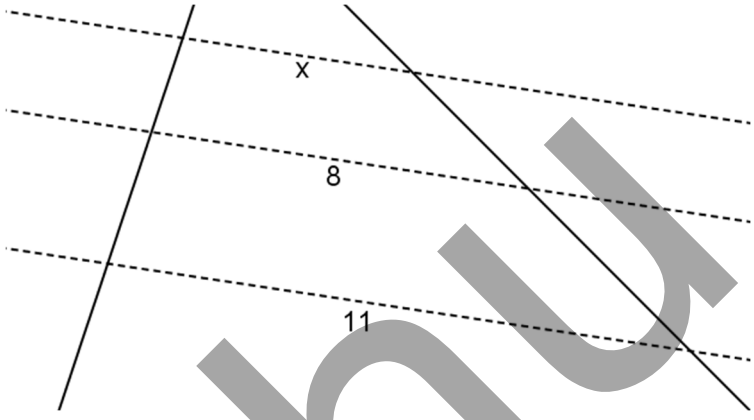
Ötlet: sokszor három egyenes egy ponton történő áthaladását úgy bizonyítunk, hogy találunk egy háromszöget, melynek ők egy ponton áthaladó egyenesei…



szmg.hu

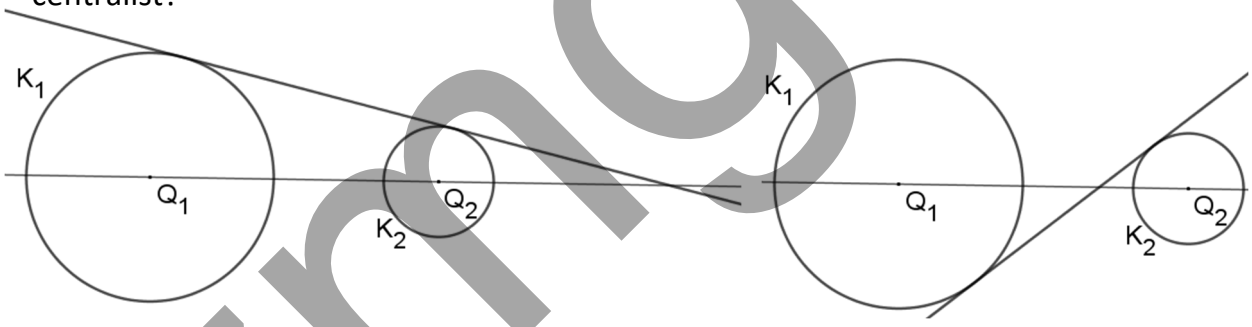
c) Adott *e* és *f*, nem párhuzamosak. 3 párhuzamos egyenessel elmetsszük őket, melyek távolságának aránya: 5:7. A két hosszabbik, kimetszett szakasz: 8 és 11 egység. Mekkora a harmadik szakasz?

Mo.:
Először is vegyük észre, hogy a távolságok aránya megegyezik a…



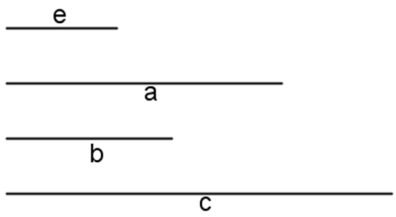
Vegyük észre, hogy itt trapézokkal dolgoztunk, és újra az egyik „trapéz-alapötlet” került elő…

d) Adott két kör: $r_1=9$, $r_2=4$, $d(Q_1;Q_2)=21$. Hol metszi a közös belső és a közös külső érintő a centrálist?



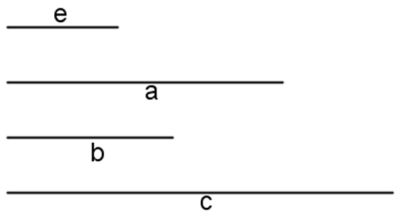
3) „Számítható” szakaszok szerkesztése
Adott: *e*=egység, *a*, *b*, és *c* szakasz.

a) Kell: $\frac{ab}{c}$ hosszúságú szakasz.



szmg.hu

b) Kell a·b hosszúságú szakasz.
Mo.: Vegyük észre, hogy nem mindegy, mekkora az egység! Ha mindkettőnél nagyobb, akkor az új hossz kisebb lesz mindkettőnél, stb. Ez azt jelenti, hogy nem elég az a és a b szakaszt megadni, kell *e* is.



c) Kell: $\frac{1}{a}$ hosszúságú szakasz.

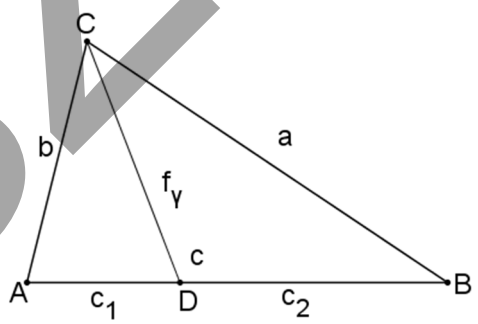
d) Kell: b^2 hosszúságú szakasz.

Ötlet: geometriában ha szakaszok szorzatával kell bánni, akkor sokszor érdemes „keresztbe-osztani", majd a párhuzamos szelők, v. a párhuzamos szelőszakaszok tételére (illetve hasonlóságra) visszavezetni a problémát.

III. A szögfelező és egyéb feladatok

1) A Szögfelező tétel

a) Milyen arányban osztja a szögfelező a szemközti oldalt?



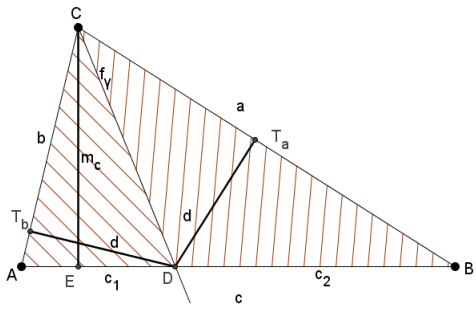
Ötlet: szögfelezőknél sokszor…

Szögfelező tétel: Δ belső szögfelezője szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja.

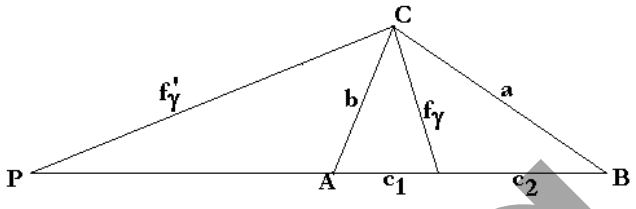
szmg.hu

Másféleképp: tanm_geometria_i_2_11__szogfelezo_t__terulettel.ggb

Nézzük az ADC_{Δ} és a DBC_{Δ} területét:
Mivel D távolsága a-tól és b-től egyenlő, ezért a két háromszög területének aránya: b:a.
Ugyanakkor ha úgy nézzük, akkor az egyik háromszög alapja c_1, a másiké c_2, és mivel a magasságuk közös (m_c) és a területük aránya b:a
$\Rightarrow c_1:c_2=b:a$



b) Külső szögfelező
Áll.: $PA : PB = b : a$ (= $c_1 : c_2$)



c) Összegezve: Ha a háromszög egy csúcsából meghúzzuk a külső v. belső szögfelezőt, akkor az olyan pontban metszi a szemközti oldalegyenest, melynek a szemközti oldal két végpontjától vett távolságának aránya egyenlő a végpontokba futó oldalak hosszának arányával.
Mindennek fontos szerepe lesz az ún. **Apollóniosz-köröknél:**

Apollóniusz kör azon pontok halmaza (mértani helye) a síkban, amely pontoknak két adott ponttól való távolságainak aránya állandó.

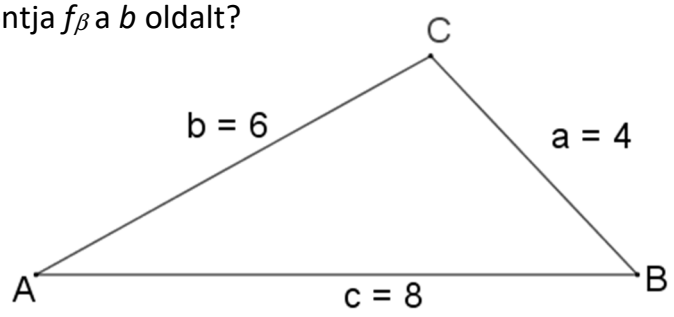
geometria_I_3_1_c_apolloniusz.ggb

** Azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek az A-tól és B-től vett távolságának aránya: 1:2, az egy kör!

szmg.hu

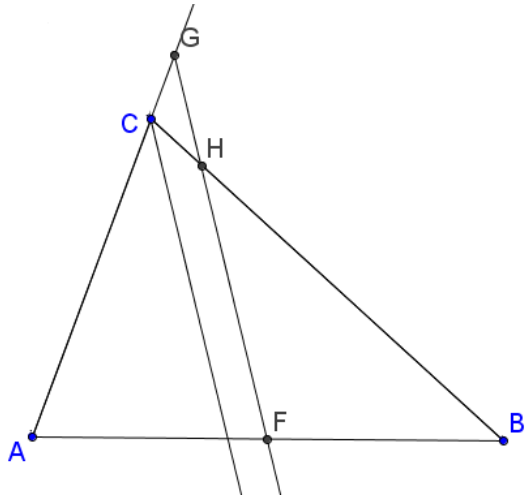
2) Példák

a) Mekkora szakaszokra bontja f_β a b oldalt?



Számold ki a,b,c paraméterekkel, hogy mekkora szakaszokra bontja f_γ a c oldalt!

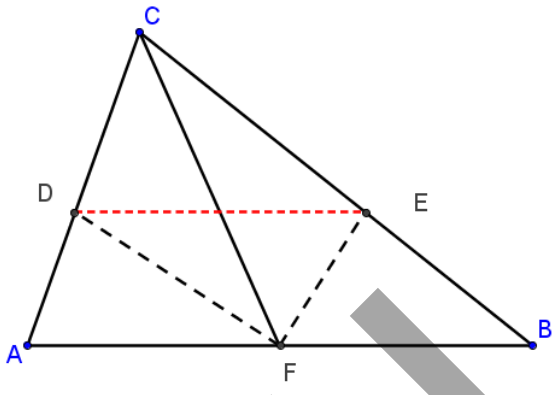
b) Gyakorlópélda: Egy ABC_Δ oldalai a,b,c. Az AB oldalának F felezőpontjából párhuzamost húzok f_γ-val. Ez a másik két oldalegyenest H-ban és G-ben metszi. Mekkora AG és BH szakasz a háromszög oldalaiból kifejezve?



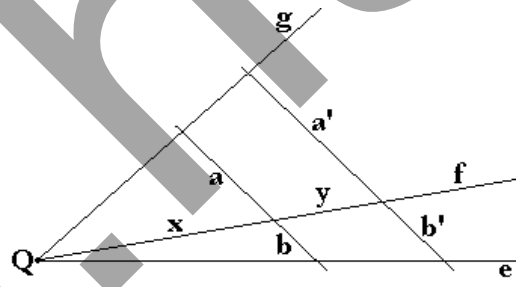
HF: Mutasd meg, hogy $\frac{1}{FH}+\frac{1}{FG}=\frac{2}{f_\gamma}$

szmg.hu

c) Az $ABC_{\triangle}$ AB oldalának felezőpontja F. Messe az $AFC_{\angle}$ szögfelezője az AC oldalt D-ben, a CFB szög szögfelezője a BC-t E-ben. Bizonyítsuk be, hogy DE$\|$ AB!

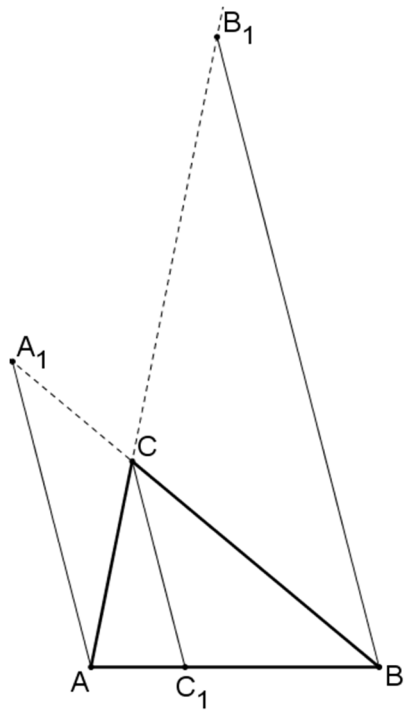


d) Adott egy Q pontból induló 3 egyenes. Messük el őket 2 párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a·b'=b·a'



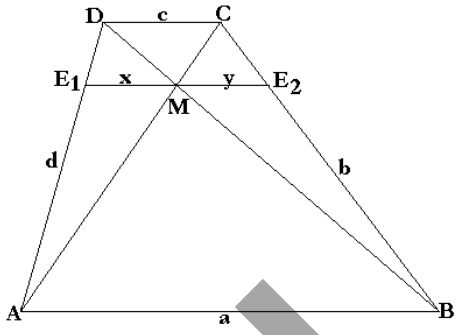
e) Vegyük föl az $ABC_{\triangle}$ AB alapján egy C_1 pontot. Hosszabbítsuk meg C-n túl az AC és a BC oldalt, majd A-ból és B-ből húzzunk CC_1-gyel $\|$-t. Ez BC meghosszabbításából A_1-et, AC meghosszabbításából B_1-et metszi ki.

Mutassuk meg, hogy: $\frac{1}{CC_1}=\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}$



szmg.hu

f) Adott az *ABCD* trapéz. Az átlók *M* metszéspontján keresztül húzzunk a két alappal párhuzamost. Mutassuk meg, hogy a trapézba eső szakaszát *M* felezi.



g) Adott egy háromszögből: a, b, f_γ. Szerkesztendő a Δ.

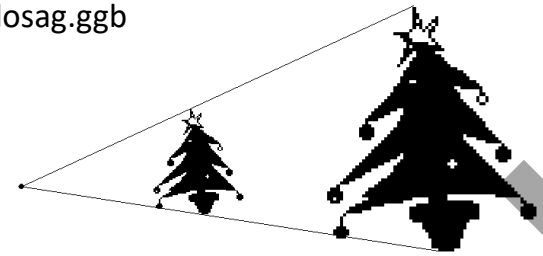
szmg.hu

Geometria - I: A hasonlóság

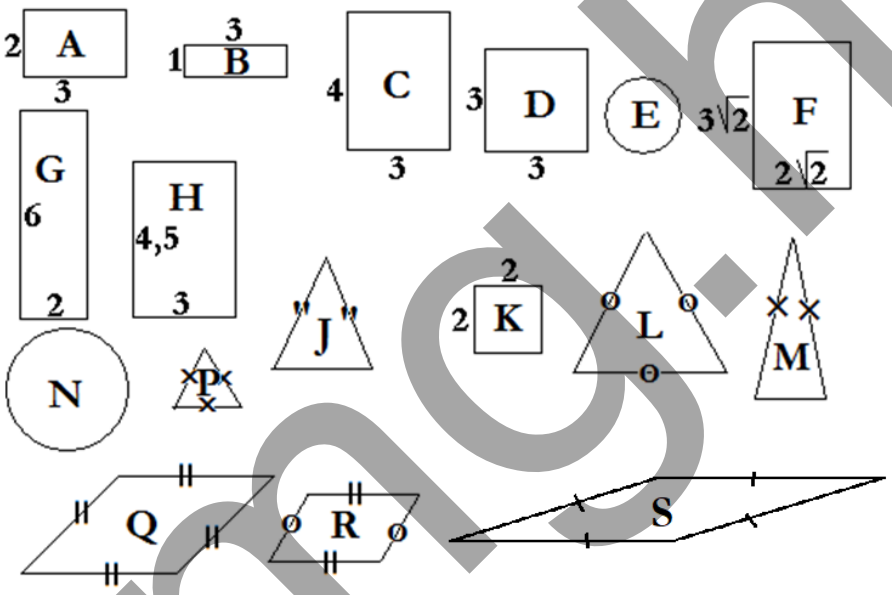
I. A középpontos hasonlósági trafó

1) Szemléltetés

a) Vetítőgép
geometria_J_1_2_kozeppontos_hasonlosag.ggb



a) Ábrák a táblán, válasszuk ki a szerintünk hasonlókat!

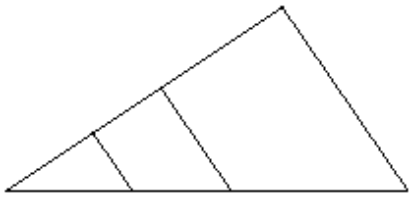


b) Mitől hasonló két négyszög?
Később megmondjuk. De biztos nem elég csak az oldalak viszonya. Nem elég csak a szögek egyezősége.

c) Könnyen rajzolható hasonló alakzatok
Körök Szabályos háromszögek

Szabályos alakzatok

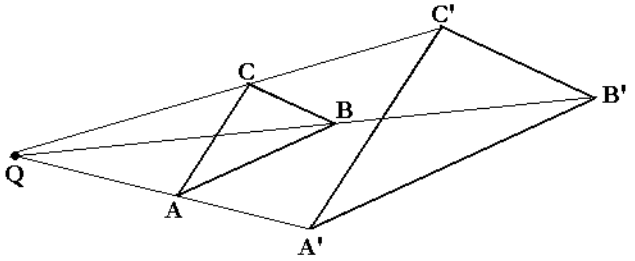
Egy akármilyen háromszöget megnagyobbítunk…

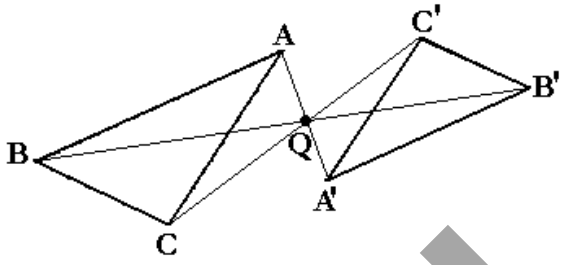


szmg.hu

d) Szemléltetés: középpontos ábrákon (négyzet, háromszög, kör

$\lambda=+2$ $\lambda=-0{,}8$





e) Megfigyelés: úgy tűnik, mintha párhuzamos lenne minden megfelelő oldal → párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele. De meg kell fordítani: először kell egy definíció, ami ehhez hasonlít!

2) Definíció és tulajdonságok

a) Def.: A középpontos hasonlósági transzformáció.

Legyen adva egy Q pont és egy $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0;1\}$

Ekkor $Q^{\lambda}(\ ): S \to S$; $P \mapsto P'$, ahol: $P' \equiv P$, ha $P \equiv Q$, egyébként:

P'QP kollineáris és

$P'Q = |\lambda| \cdot PQ$

$\lambda > 0$ esetén: Q nem választja el P-t és P'-pt,

$\lambda < 0$ esetén: Q elválasztja P-t és P'-pt.

Figyelem, szóhasználat! Megesik, hogy azt mondjuk, hogy „Q-ból nagyítsuk P pontot".

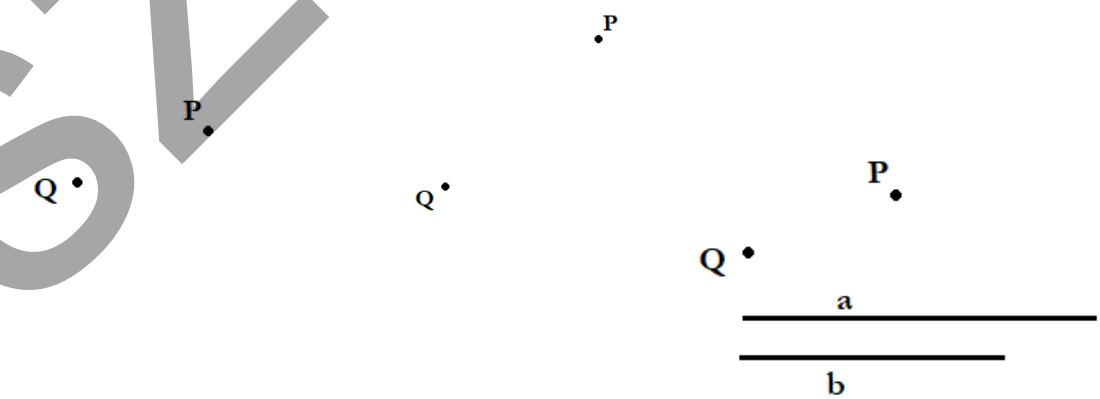
Közben: P pont nem lesz nagyobb…

Az is lehet, hogy λ éppenséggel: $-0{,}2$

Nyilván helyesen mondva: pl.: „vegyük P-nek Q-ból vett λ arányú, középpontosan hasonló képét".

b) Szerkesszünk a definíció szerint pontot

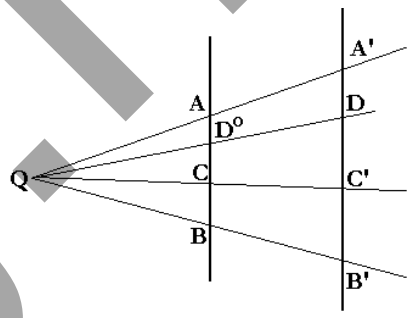
$Q^{\lambda=2}(P)$ $Q^{\lambda=-2/3}(P)$ $Q^{\lambda=a:b}(P)$ vagyis:



szmg.hu

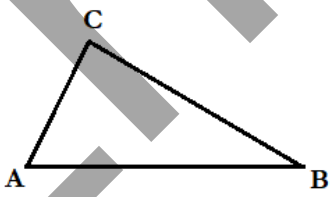
c) Tulajdonságai:
- Illeszkedéstartó
- Nem távolságtartó, de szakaszok arányát megtartja $\Rightarrow$ szögtartó
- Általában nem szimmetrikus: kivéve: $\lambda = -1$ – ez kp-os tükrözés! (és 1, de ekkor identitás fv.; tehát $\lambda=1$-gyel nem foglalkozunk)
- Körüljárás tartó
- injektív (kölcsönösen egyértelmű)
- Egyenes képe egyenes
- Fix pont, fixegyenes, fixalakzatok, invariáns alakzatok $|\lambda|\neq 1$ esetén:
  - Fixpont: Q. Minden más pont képe más távolságra kerül Q-tól, vagy a másik oldalára.
  - Fixegyenesek, fix alakzatok nincsenek, hiszen változnak a távolságok, és különben is, csak egy fixpont van. ($\lambda=-1$ pedig kp-os tükrözés…)
  - Invariáns egyenesek: Q tartópontú sugársor v. egyenessereg.
    Invariáns alakzatok: mivel változnak a távolságok, ezért csakis nem korlátos alakzatok lehetnek ezek: pl. félsík, ha $Q\in$ határvonal

d) Bizonyítások (csak az ábrát nézzük): a párhuzamos szelők tételével, és annak megfordításával.

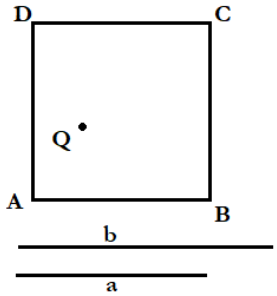


e) Szerkesszünk a definíció szerint:

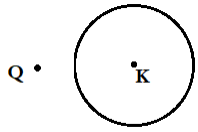
(i) Háromszög képét: $\lambda=\sqrt{2}$ Az A csúcsból.



(ii) Négyzetet képét: λ = a:b:,



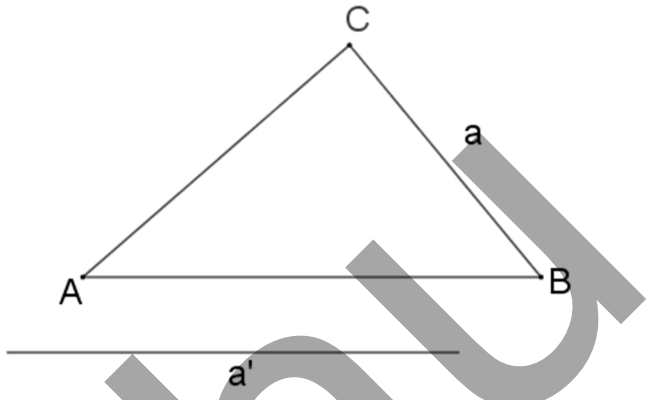
(iii) Kör képét: $\lambda = -3$



szmg.hu

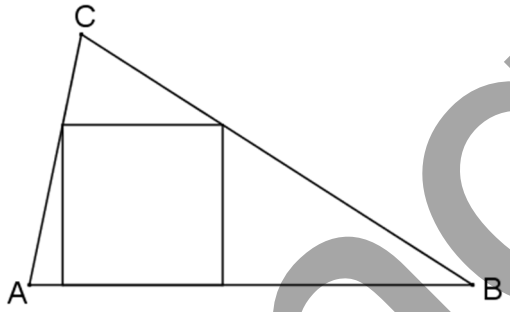
(iv) Nagyítsunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy az „a” oldal egy adott a’ szakasszal legyen egyenlő!
A „vissza a kályhához megoldás”: $\lambda = a':a$

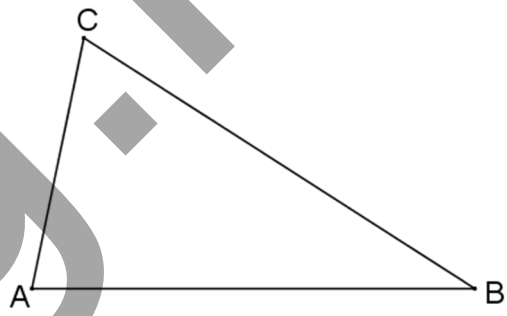
Ravaszabb megoldás:



f) Szerkesszünk négyzetet egy háromszögbe:

g) „Mintha már kész lenne” Vakábra





szmg.hu

II. A hasonlósági transzformáció

1) Definíció + tulajdonságok

a) Szemléltetés:)
Először „be kellett állítani” az alakzatot egy v. kettő egybevágósági transzformációval, hogy azután középpontos hasonlósági trafóval dolgozzunk.

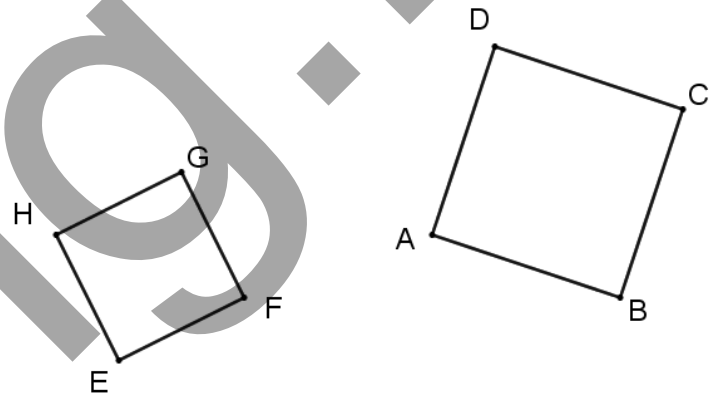
b) Def: A hasonlósági transzformáció egy (vagy több) középpontos hasonlóság – g( ) fv. - és egy (vagy kettő) egybevágósági transzformáció - f( ) fv. - kompozíciója.

gof
Figyelem: $f \circ g \neq g \circ f$. A végeredmények egybevágók lesznek ugyan, de nem ugyanott…

c) Rajzoljunk kézzel ilyet – egy háromszög és választhatón tengelyes tükrözés, forgatás majd egy –2-szeres nagyítás. Úgy tervezd meg, hogy férjen ide!

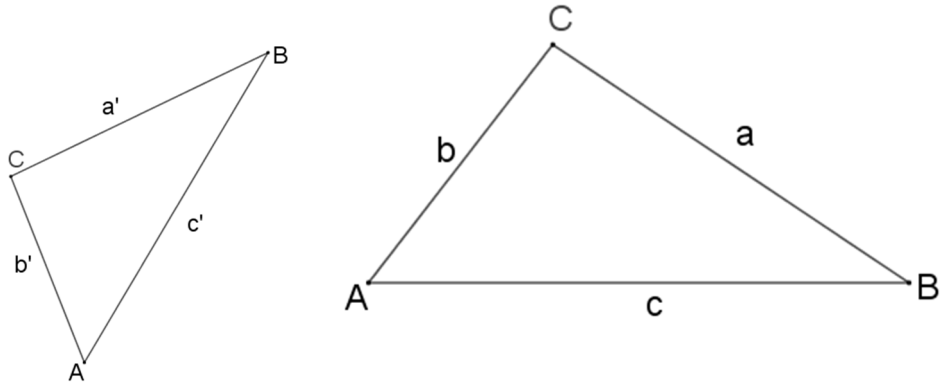
d) Tulajdonságai
- illeszkedéstartó
- nem távolság, de aránytartó ⇒ szögtartó
- Általában nem szimmetrikus
- Ha van benne egy tengelyes tükrözés, akkor a körüljárást megváltoztathatja.
- Injektív
- egyenes képe egyenes
- fixalakzat, invariáns alakzat általában nincs (fixpont általában van)

Hogyan tudnád e két négyzetet egymásba transzformálni?
geometria_J_2_1.ggb



2) Hasonló alakzatok

a) Def: … két alakzat hasonló, A~ B ha ∃ olyan h( ) hasonlósági trafó, amelyre h(A)≡B.
Def.: Két hasonló alakzat hasonlóságának aránya annak a kp-os hasonlóság arányának abszolút-értéke, amely egy egybevágósági transzformációval a két alakzatot egymásba viszi.
Vegyük észre, hogy két hasonló alakzat oldalainak aránya, illetve szögei megegyeznek:
Pl. ha ABC⊿-ben a=5,7 b=4 c=7,2 akkor ha a'=3,8 akkor a másik két oldal már számítható, hiszen: a/a'=b/b' stb.

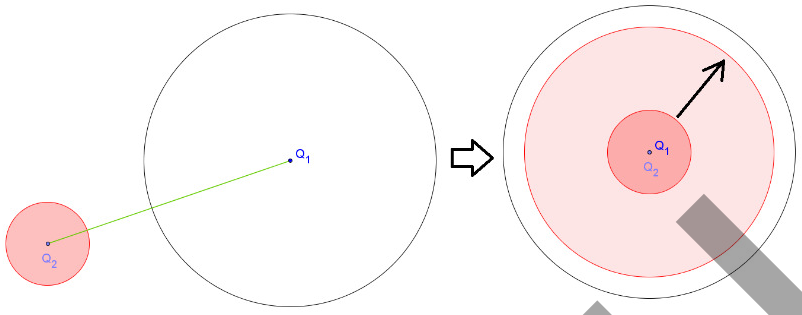


szmg.hu

b) Példák hasonló alakzatokra

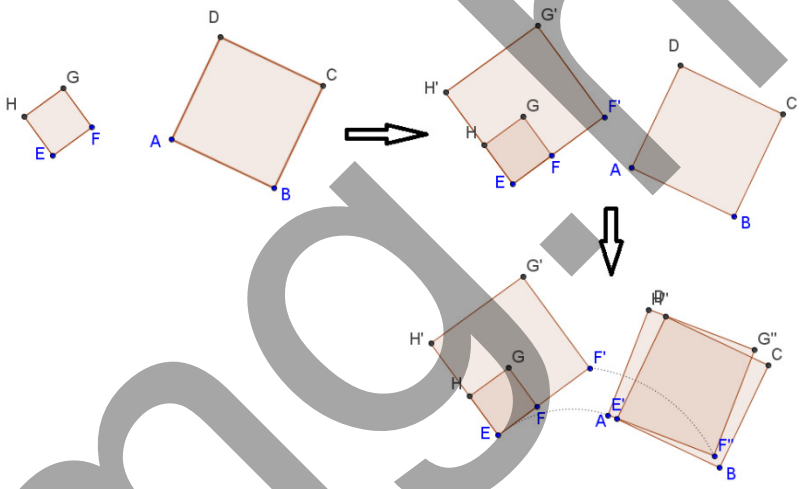
(i) Két kör (hogyan) tanm_geometria_j_2_2__b_2.ggb

Állítás: $K_1(Q_1;r_1) \approx K_2(Q_2;r_2)$. ($r_1 \neq r_2$). Egyenlőség esetén trivi.

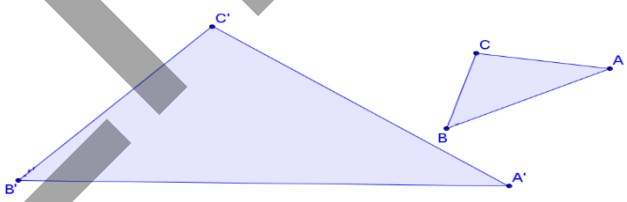


Vagy: megszerkesztjük a közös érintőket…

(ii) Két négyzet: hogyan? tanm_geometria_j_2_2__b_2.ggb



c) Háromszögek hasonlósága



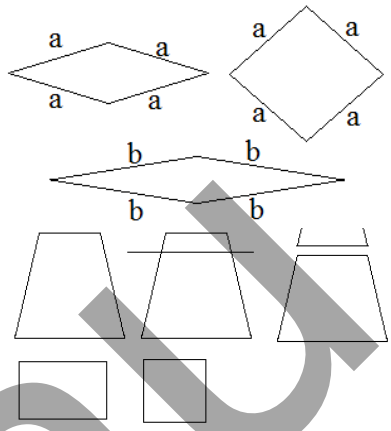
Két Δ hasonló, ha: tanm_geometria_j_2_2__b_3.ggb

- a megfelelő oldalaik aránya egyenlő: a:a'=b:b'=c:c'
- Ha két-két szögük megegyezik **(ezt szoktuk legtöbbször használni)** $\alpha=\alpha'$; $\beta=\beta'$. (Úgy szoktuk mondani, hogy három szögük megegyezik.
- Ha két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és az általuk közrefogott szögek is egyenlők: a:a'=b:b', $\gamma=\gamma'$
- Ha két-két oldalhosszuk aránya egyenlő és a nem kisebbikkel szemközti szögek is egyenlők: $a \geq b$, a:a'=b:b', $\alpha=\alpha'$

szmg.hu

d) Példa: a=5, b=4, c=3. a'=7. Mekkora a b' és a c'?

e) Négyszög - buktatók



Vegyük észre: nem elég az oldalak aránya:
négyzet ↔ rombusz stb.

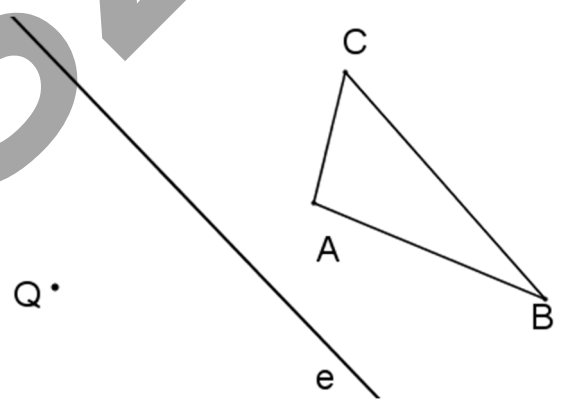
Nem elég a szögek egyenlősége:
négyzet ↔ téglalap; v. trapézok stb.

f) Két sokszög hasonló, ha a következő feltételek egyike teljesül:
- megfelelő oldalaik és átlóik aránya megegyezik.
- megfelelő oldalaik aránya megegyezik, és a megfelelő szögek páronként egyenlők.

A hasonlóság: reflexív, szimmetrikus, tranzitív, vagyis ekvivalencia reláció.
⇒ osztályfölbontást indukál!
Pl.: a 40°, 50° és 90°-os háromszögek osztálya
Így alakzatok keresésekor elég az osztályfölbontásból egy elemet megtalálni, és már csak egy konkrét adat kell az alakzatból!

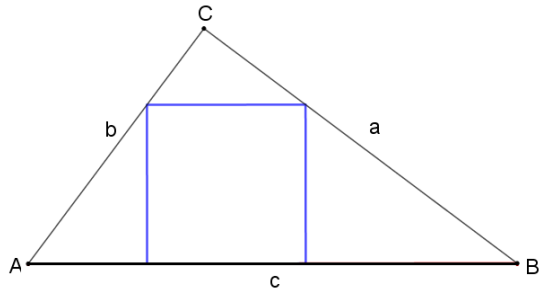
g) Speciális alakzatok hasonlósága: ha két szabályos n szög…
Ha egyenlő szárú Δ: elég a szárszög v. alapon fekvő szög. De vigyázat, nem kevesebb az információ!

III. Gyakorlás
Figyelem: ha kp-os hasonlósági trafót kérnek: meg kell adni a kp-ot, és a hasonlóság arányát!
1) Alap
a) Adott Q, ABC_{Δ}, e. Kp-osan trafózzuk ABC-t úgy, hogy A' az e-re essék, vagyis: Kell $Q^{\lambda}(\ )\rightarrow Q^{\lambda}(ABC)$ esetén $A' \in e$.
tanm_geometria_j_3_1__háromszög_trafózása.ggb



szmg.hu

b) Egy a=6, b=8 c=10 cm oldalú háromszögbe szerkesszünk egy négyzetet, melynek egyik oldala a *c* oldalra illeszkedik.
Számítsuk ki a négyzet oldalát!
Mo:

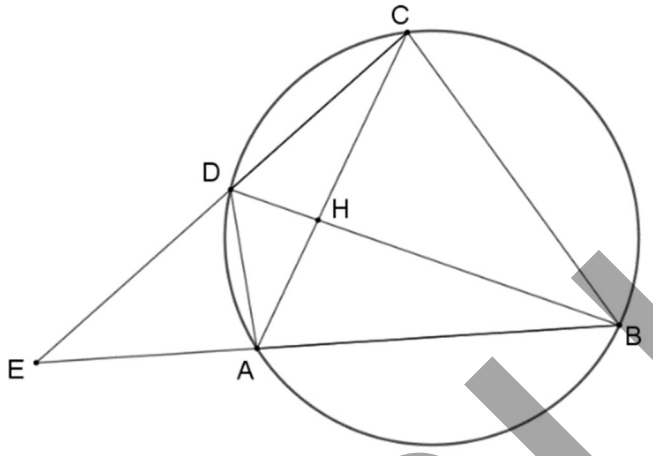


c) Adott egy téglalap. Vágjunk le belőle egy egyenessel egy hozzá hasonló téglalapot.
tanm_geometria_j_3_4__téglalapba_téglalap.ggb

Ha a két oldala 7 és 3 egység, mekkora lesz a levágott téglalap két oldala?

szmg.hu

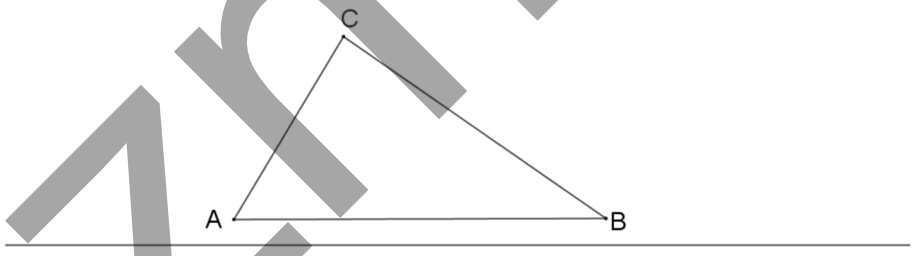
d) Hosszabbítsd meg az ABCD húrnégyszög nem párhuzamos szemközti oldalát úgy, hogy azok E-ben messék egymást, illetve húzd be a két átlóját. Keress hasonló Δ-párokat az ábrán!



e) Hasonlóság számolása: λ. ABC_{Δ}: a=6, b=4, c=2,5. $Q^{\lambda}(a)$=8,4. Mekkora b', c'?

ABC_{Δ}: a=8; b=4; c=6. $Q^{\lambda}(ABC_{\Delta})$: a'=3,5. Mekkora: λ, b' és c'?

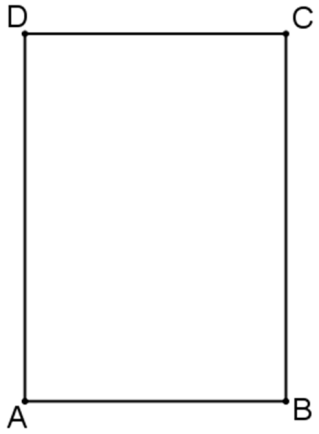
f) Δ-ből adott: $\alpha;\beta$; és a kerület. Szerkesztendő a Δ. (Elég az elv.)



Ötlet: HA MÁR KÉT SZÖG MEG VAN ADVA EGY HÁROMSZÖGBŐL, AKKOR HASONLÓ SZERKESZTHETŐ. A 3. ADAT LEHET AKÁRMILYEN MEGHÖKKENTŐ: PL.: Δ-ből adott $\alpha;\beta$ és QQ' távolság (beírt és körülírt kör kp távolsága)

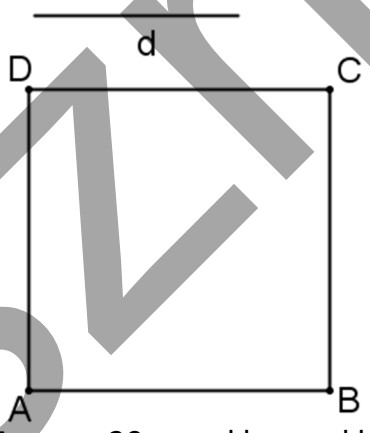
szmg.hu

g) Az A/4-es lap olyan, hogy már az első megfelelő félbehajtáskor hasonlót kapok, ún. A/5-ös lapot. Mennyi az A/4-es lap két élének aránya?



h) Egy háromszög oldalai: a=15 b=8 c=17. Mekkorák annak a két háromszögnek az oldalai, melyekre az m_c vágja ketté a háromszöget?

i) Egy négyzetet nagyítsuk úgy, hogy az átló és az oldal különbsége adott hosszúságú legyen.



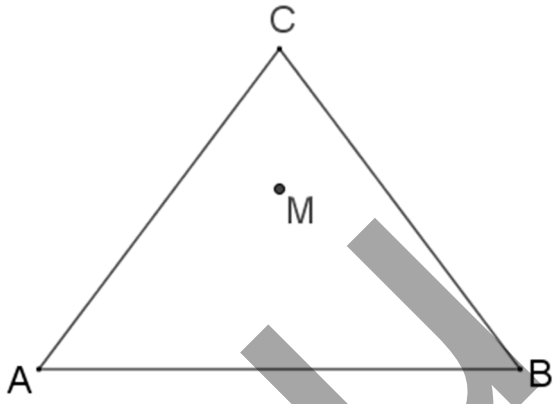
Ha d=5 cm, a=20 cm, akkor mekkora λ?

szmg.hu

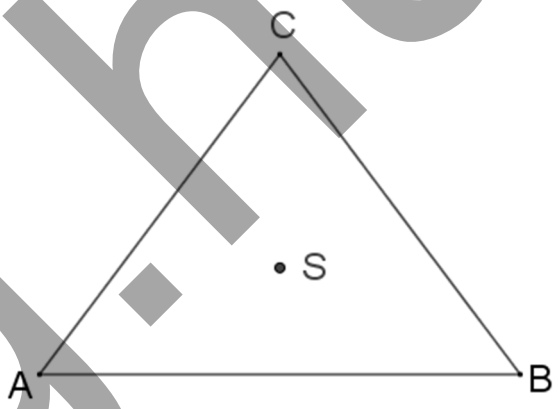
j) Egy egyenlőszárú Δ alapja 42 cm, szárai 35 cm hosszúak. Milyen távol van az M, az S, a köré írt (Q_1), és a beírt kör középpontja (Q_2), alap egyenesétől?

Mo.:

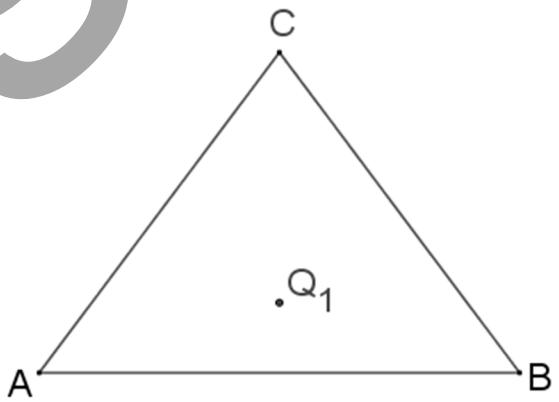
M:



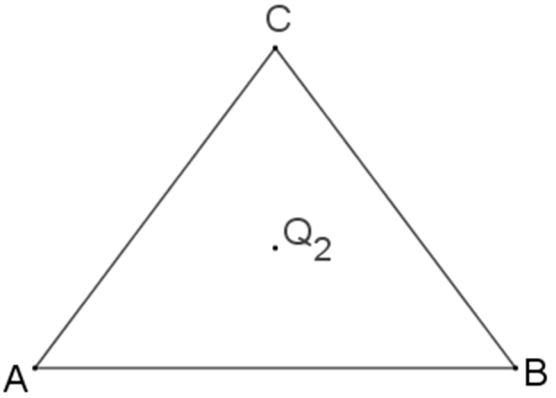
S:



Q_1:

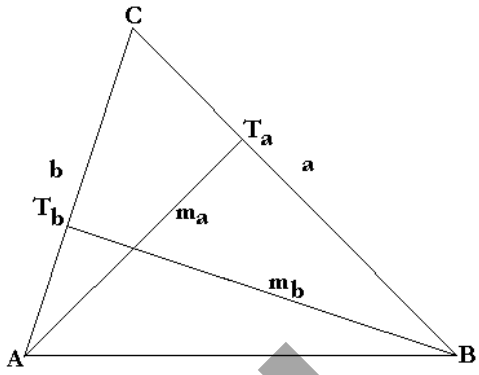


Q_2:

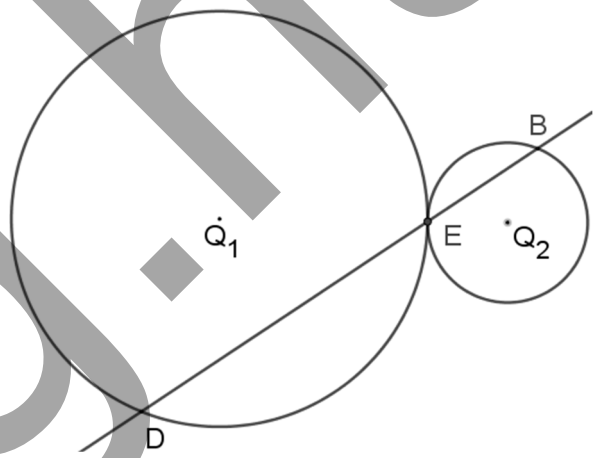


szmg.hu

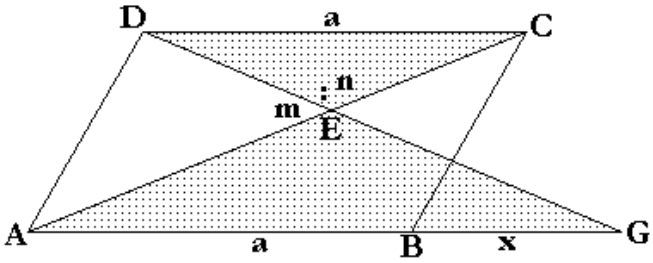
k) ABC_{Δ}: $m_a+m_b=14$, a=16 b=12. Mekkora m_a és m_b? (Vagy: szerkesztendő a Δ.)



l) Két, egymást kívülről érintő kör érintési pontján át húzott szelő által kimetszett húrok hosszának aránya: 13:5. d(Q_1;Q_2)=36. Mekkorák a sugarak?

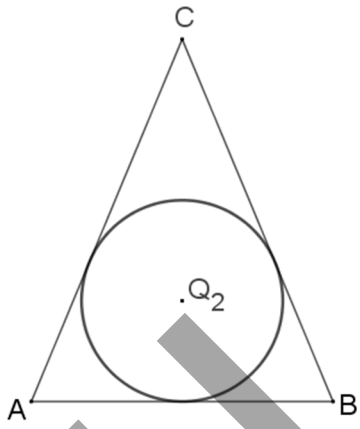


m) Adott egy paralelogramma alapja: *a*. Az *AC* átlón egy *E* pont, továbbá az *AE*:*CE*=*m*:*n* arány. A *DE* szelő mekkora szakaszt metsz le az *a* oldal meghosszabbításából?



szmg.hu

n) Egy egyenlőszárú háromszög AB alapja 10 cm. Szárai 13 cm hosszúak. Mekkora az m_c magassága? Mekkora a beírt kör sugara?

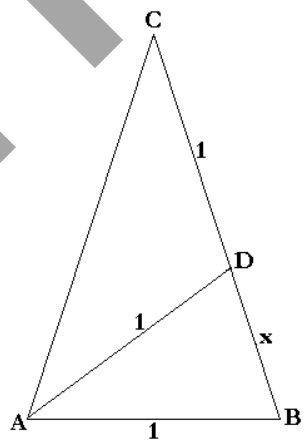


2) Hasonlósággal (is) bizonyítható ismeretek

a) Állítás: hasonló sokszögek kerületének aránya a hasonlóság aránya.

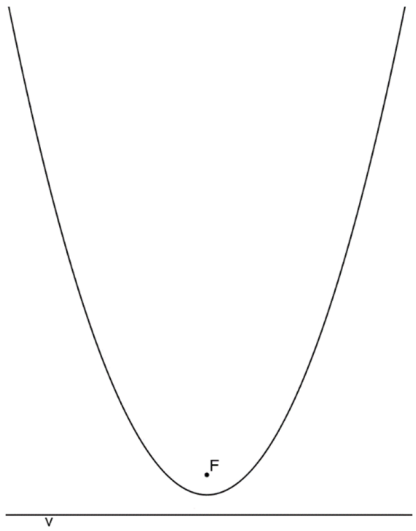
Biz.: $k=\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \Rightarrow k'=\sum_{i=1}^{n} a'_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda \cdot a_i)=\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i=\lambda \cdot k$ ✓

b) Az aranymetszés Δ-e. (A Pitagorasz-tételnél már láttuk)



c) A parabola, emlékeztető: Def, elnevezések, tulajdonságok, pontjainak szerkesztése.
tanm_fuggvenyek_egyenletek_G_1_1_b_parabola.ggb

DEf.: Adott egy v egyenes és egy $F \notin v$ pont. Ekkor
Parabola:={$P \in$ Sík | d(P;F)=d(P;v)}

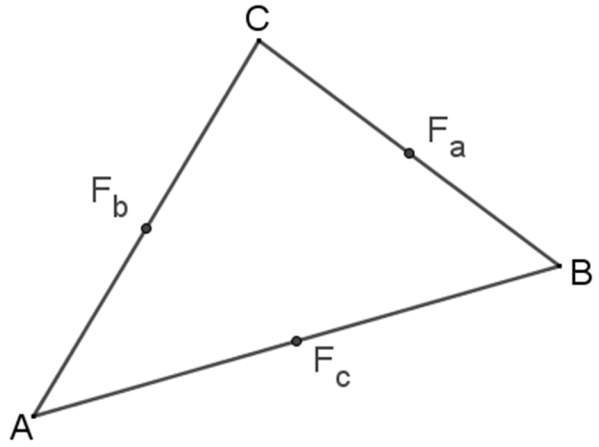


Elnevezések:

- F: fókusz (v. gyújtópont)
- v = vezéregyenes v. direktrix,
- d(F;v) = a parabola paramétere = p (távolság, adat)
- a v-re merőleges, fókuszon áthaladó egyenes: tengely
- tengely $\cap$ parabola: tengelypont v. csúcspont
- vezérsugár: a fókuszból a parabola egy pontjához húzott szakasz

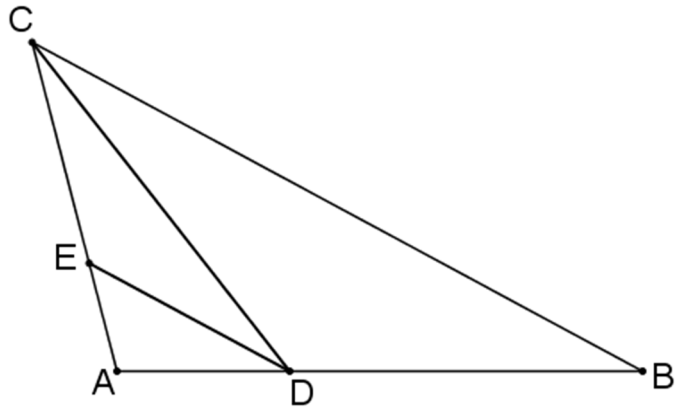
szmg.hu

d) A középvonalak és a súlyvonalak tulajdonságainak bizonyítása hasonlósággal.



e) Adott két kör: d(Q_1;Q_2)=15, r_1=7, r_2=3. Hol metszi a közös belső érintő a centrálist?

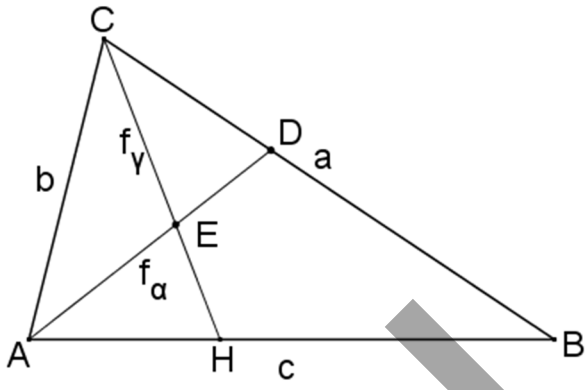
f) ABC$\triangle$-ben $f_\gamma \cap c \equiv D$. D-ből $\parallel$ a-val: mekkora ennek a $\parallel$-nak a $\triangle$-be eső szakasza, a és b-ből kifejezve?



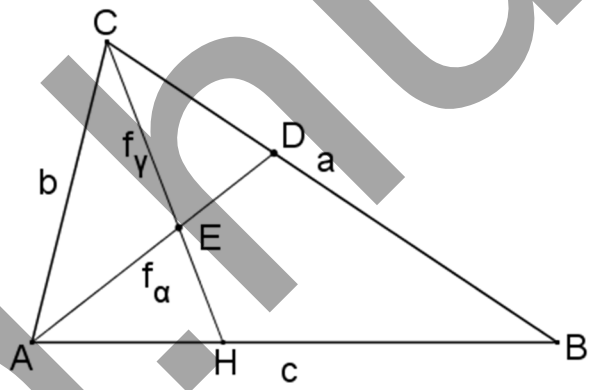
szmg.hu

g) Milyen arányban osztják egymást a belső szögfelezők a háromszög oldalaival kifejezve? Pl.: AE:ED=?

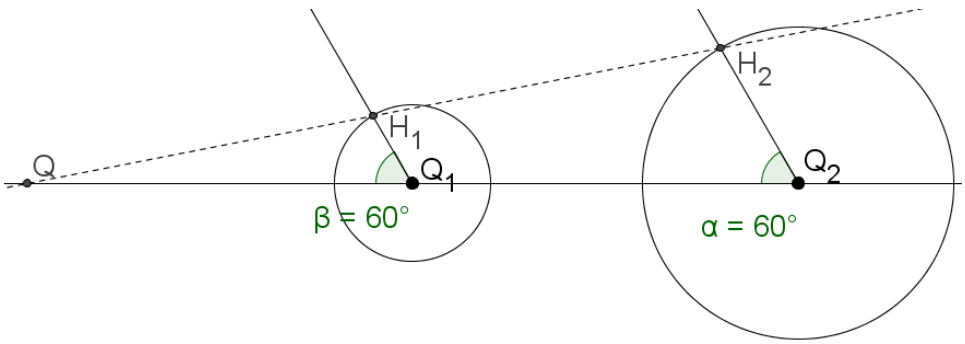
1. Mo.:



2. Mo.:



h) Két kör közös hasonlósági középpontja – közös érintők új szerkesztési lehetősége. Magyarázzuk meg az ábra alapján, hogyan szerkesztjük meg a közös éintőt!

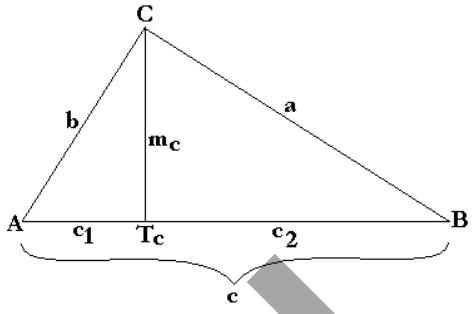


szmg.hu

IV. Tételek Derékszögű Δ-ekben

1) Az m_c meghúzása után hasonló Δ-ek a derékszögű Δ-ben:

Az ábrán mely háromszögek hasonlítanak egymásra?



Írjunk fel arányokat!

2) A magasságtétel – csakis derékszögű háromszögben!

a) Tétel: *<u>Derékszögű Δ-</u>ben* az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe annak a két szakasz hosszának, melyre a magasság az átfogót osztja (az átfogó két szeletének), vagyis $m_c = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$ *vagy* $m^2 = c_1 \cdot c_2$

Tipikus hiba: bármely háromszögre képesek alkalmazni a diákok, pedig **csak derékszögűre** igaz!

Biz.:

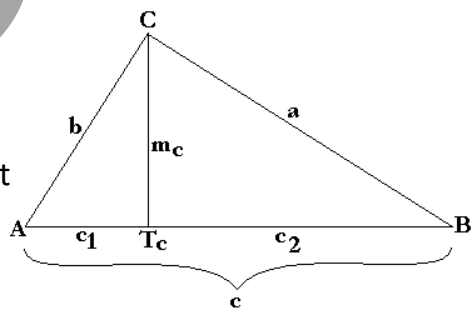
m_c=$\sqrt{c_1 \cdot c_2}$ $\Leftrightarrow$ négyzetre emelünk ($\oplus$ hosszok)!!! $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $m_c^2=c_1 \cdot c_2$ $\Leftrightarrow$ keresztülosztunk, mert arányokkal dolgozunk sokszor

$\Leftrightarrow$ $m_c/c_1=c_2/m_c$ $\Leftarrow$

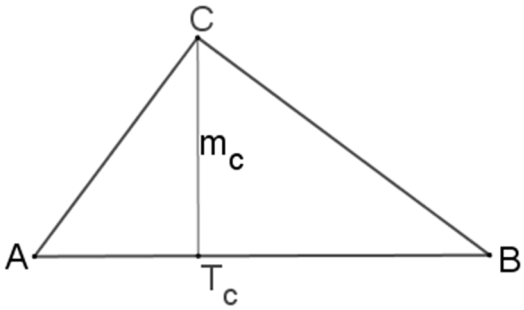
$\Leftarrow$ a hasonlóságok miatt, a megfelelő szögekkel szemközti arányok!

(Vagyis: _____$\Delta \approx$ _____Δ)



Szokták úgy is tudni a tételt, hogy **$m_c^2=c_1 \cdot c_2$.**
Lehetőség téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztésére. Hogyan?

b) Egy derékszögű háromszög m_c magassága 12 egység, A T_c talppontjától a B csúcsig terjedő szakasz 16 egység. Mekkorák az oldalai?



szmg.hu

c) Két szakasz számtani és mértani közepének szerkesztése, illetve a számtani-mértani közép közti összefüggés

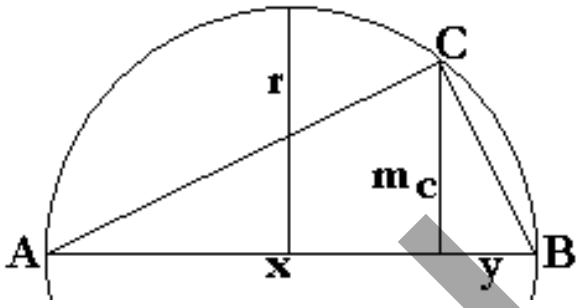
Legyen a két szakasz hossza: x és y. Legyen az AB szakasz = x+y.

Rajzoljuk meg a Thalesz kört, és a magasságot húzzuk be: m_c.

A Thalesz kör sugara: $(x+y)/2$,

a magassága: $\sqrt{xy}$.

($m_c^2=x\cdot y$)



A számtan-mértani közép közti összefüggés:

Legyen $0<x;y$. Ekkor: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (=) $\Leftrightarrow$ ($x=y$)

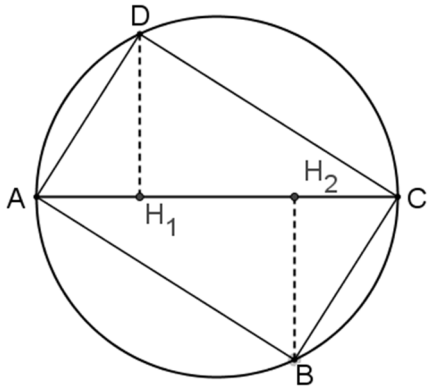
1. Biz.: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\Leftrightarrow$ mindkét old. + $\Leftrightarrow$ $x^2+2xy+x^2 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ ✓ (=) $\Leftrightarrow$ ($x=y$)

2. biz.: Magasságtétellel. Illesszük egymás mellé az x és y hosszúságú szakaszt, majd erre, mint átmérőre emeljünk egy derékszögű Δ-et.

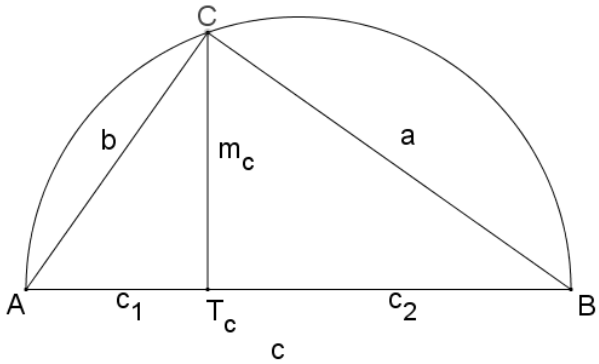
Így látható, hogy valóban igaz a tétel. Egyenlőség $\Leftrightarrow$ ha $m_c=r$, vagyis $x=y$.

d) Egy 42 cm átmérőjű kör átmérőjén kijelölöm a 2:5 és 5:2 arányú osztópontokat. Ezekre merőleges szakaszt állítok az ábra szerint. Milyen alakzat az ABCD? Mekkorák az oldalai?



e) Egy derékszögű háromszög átfogóját a magassága egy 6 és egy 12 cm hosszú szakaszra vágja. Mekkorák a befogók?

Mo:



szmg.hu

3) Befogó-tétel – csakis derékszögű háromszögben!

a) Tétel: *<u>Derékszögű ⊿-ben</u>* a befogó hossza mértani közepe az átfogóra eső ⊥ vetülete és az átfogó hosszának.

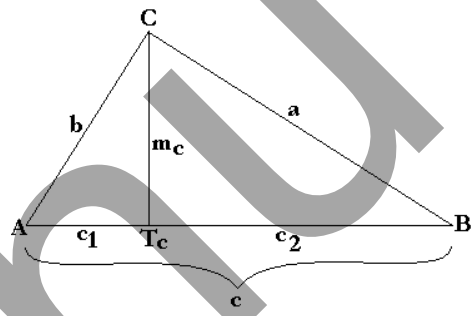
Tipikus hiba: bármely háromszögre képesek alkalmazni a diákok, pedig **csak derékszögűre** igaz!

Biz.: $b=\sqrt{c_1 \cdot c}$ ⇔ négyzetre emelünk (⊕ hosszok)!!!

⇔ $b^2=c_1 \cdot c$ ⇔ $b/c_1=c/b$

⇐ a hasonlóságok miatt, a megfelelő szögekkel szemközti arányok!

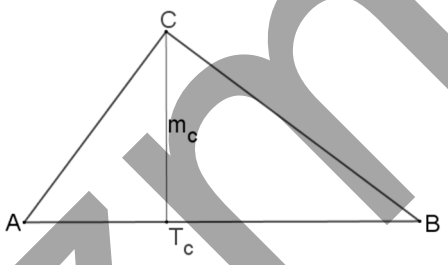
(Vagyis: _____⊿ ≈ _____⊿)



Új lehetőség téglalappal egyenlő területű négyzet szerkesztésére.

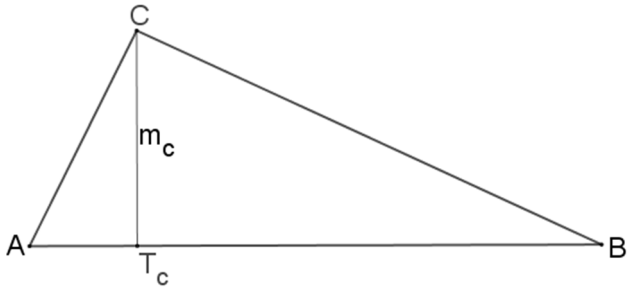
4) Példák

a) A Pitagorasz-tétel bizonyítása befogó tétellel



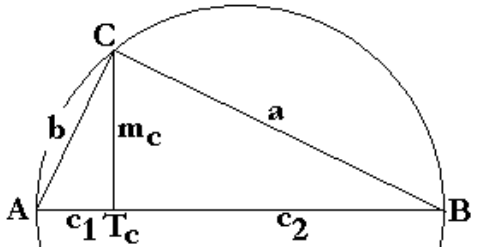
b) Adott: *e*, és *a* hosszúságú szakasz. Kell $\sqrt{a}$ hosszúságú szakasz!

c) Adott egy derékszögű háromszög, oldalai 8; 15 és 17 cm (Pitagoraszi számhármas) Mekkora szakaszokra vágja az átfogót a hozzá tartozó magasság?



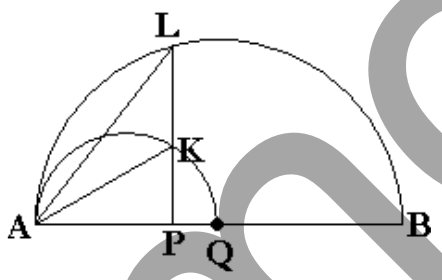
szmg.hu

d) Derékszögű Δ-ben a és b-ből fejezzük ki, milyen arányban osztja m_c az átfogót.



Konkrét számokkal: a=7 b=24 c=25 cm.

e) Adott két, egymást belülről érintő r és $2r$ sugarú kör centrális által elfelezett része. Legyen $P\in\ ]A;Q[$. Húzzunk P-ből $\perp$-t a centrálisra. Ez a kisebbik kört K-ban, a nagyobbikat L-ben metszi. Mutassuk meg, hogy $AL^2=2AK^2$.



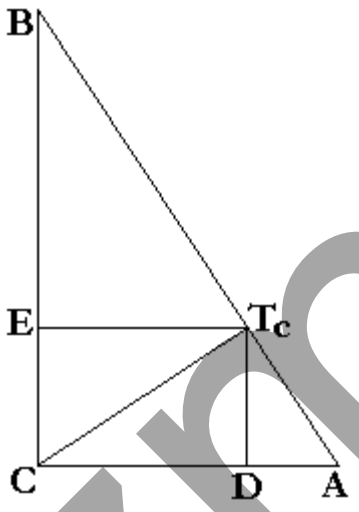
1. Biz.:

2. biz:

szmg.hu

f) Egy derékszögű Δ befogóinak aránya: 3:2. Az átfogónak a hozzá tartozó magasságvonal által levágott szeletei közül az egyik 2 cm-rel nagyobb a másiknál. Mekkora az átfogó?

g) Áll: $DA \cdot CD^3 = CE^3 \cdot EB$



szmg.hu

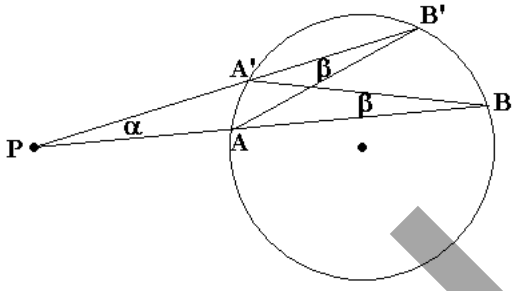
V. Pont körre vonatkozó hatványa

1) Külső pontból körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele

Külső pontból egy körhöz húzott szelőnek a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjedő szelőszakaszainak a szorzata állandó = a pontból a körhöz húzott érintő négyzete.

Biz: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' \Leftrightarrow \frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB} \Leftarrow PAB' \approx PBA'$, és ezek a megfelelő oldalak.

A hasonlóság a látókörív tétel miatt: $PB'A\angle = PBA'\angle$, és a Δ-ek másik szöge közös.



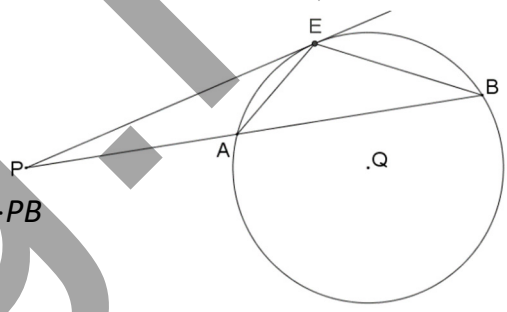
Mennyivel egyenlő ez a szorzat?

$PAE_\Delta \approx PBE_\Delta$

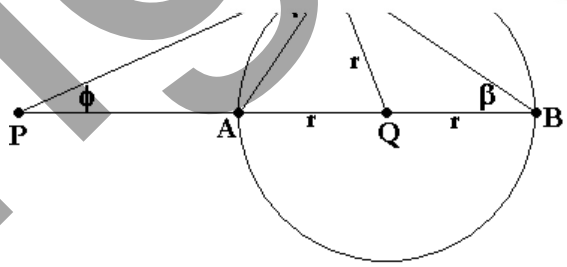
Ui.: P-nél található szögük közös, illetve az *AE* ívhen nyugvó *ABE* kerületi és *AEP* érintőszárú kerületi szögek egyenlők: $PBE\angle = PEA\angle$.

(ezek a megfelelő oldalak) $\Rightarrow$

$\frac{PA}{PE} = \frac{PE}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PE^2$



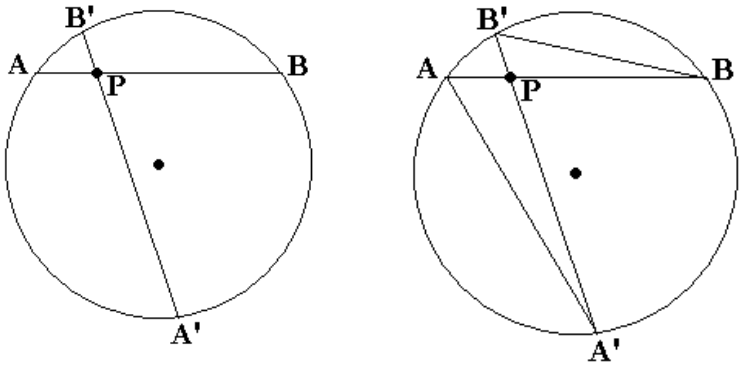
Emlékezzünk arra, hogy $PE^2 = PQ^2 - r^2 = (PQ-r)(PQ+r) = PA \cdot PB$



2) Belső pont – Húrtétel

Egy kör belső pontján áthaladó bármely húr - a pont által meghatározott - 2 szeletének szorzata állandó.

Biz.:



$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' \Leftrightarrow$

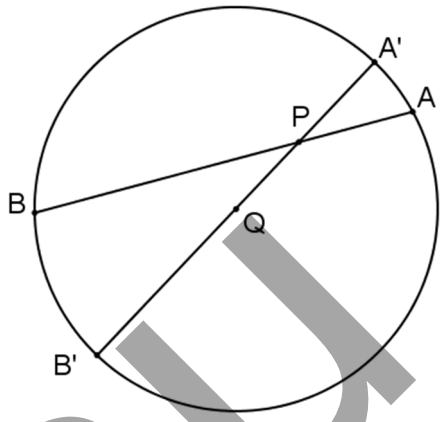
$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB} \Leftarrow PAA'_\Delta \approx PBB'_\Delta$,

és ezek a megfelelő oldalak.

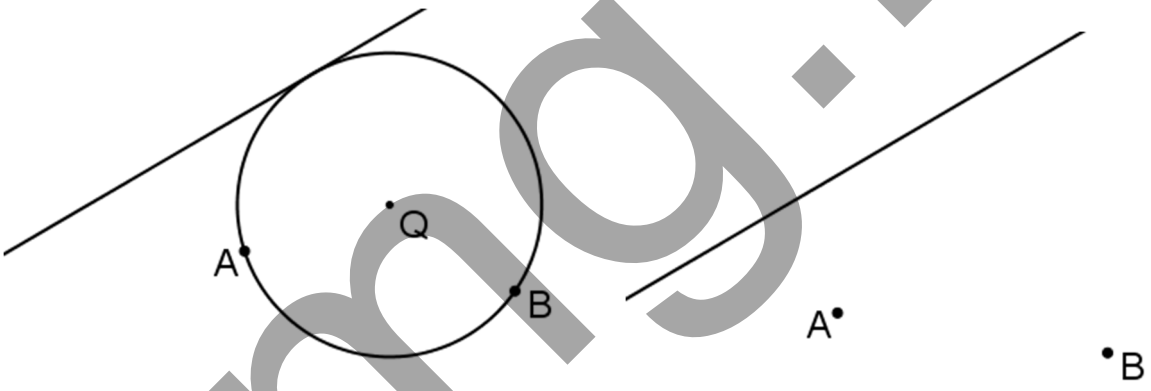
A hasonlóság oka: azonos íveken nyugvó kerületi szögek megegyeznek.

szmg.hu

Mennyivel egyenlő ez a szorzat?
Húzzuk meg *PQ* átmérőt: ekkor látszik:
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = (r-d)(r+d) = r^2 - PQ^2$.
Itt nincs érintő, ezért ezzel jellemezhetjük ezt a szorzatot.



3) Példák
   a) Alappélda: adott A, B, és e. Kell $k \rightarrow |e \cap k| = 1$ és $A, B \in k$ (Vagyis Kell AB-re illeszkedő, *e*-t érintő kör.)
   Mo.: Vegyük észre, ez ekvivalens azzal a szélsőérték feladattal, hogy keressük azt a pontot e-n, amelyből a **legnagyobb szög alatt látom *AB* szakaszt.**

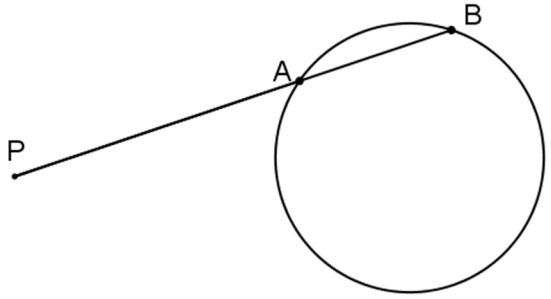


Nyilván, ha $AB \parallel e$, akkor egyszerű.

Vegyük észre: ez egy *e* vezéregyenesű, *A* fókuszpontú parabola és az $f^{\perp}_{AB}$ metszéspontjának keresése!

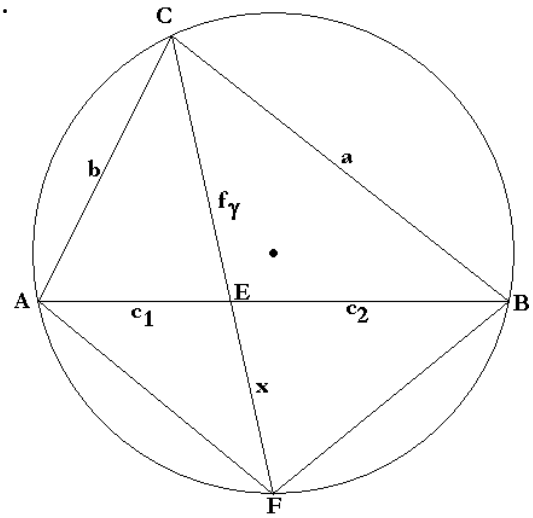
szmg.hu

b) Adott egy kör, rajta kívül P. Adott P-ből szelő a körhöz: PA=11, AB=5. Szerkesztendő egy olyan szelő P-n keresztül, melynek a körbe eső szakasza: A'B'=8 cm. Figyelem! Többféle megoldási is van!



c) * Adott két egymást metsző, nem szükségképpen egyenlő sugarú kör. Az egyik metszésponton keresztül közös szelőt húzunk. Mi a közös szelő két kör közé eső szakaszfelező-pontjainak mértani helye?

4) Tétel – háromszög szögfelezőjének hossza: $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.



szmg.hu

Adott egy háromszög: a=7; b=24; c=25 cm. Milyen háromszög ez? Mekkora a legnagyobb szög szögfelezője? Mekkora a beírt kör sugara? A beírt kör középpontja milyen távol van a C-csúcstól?

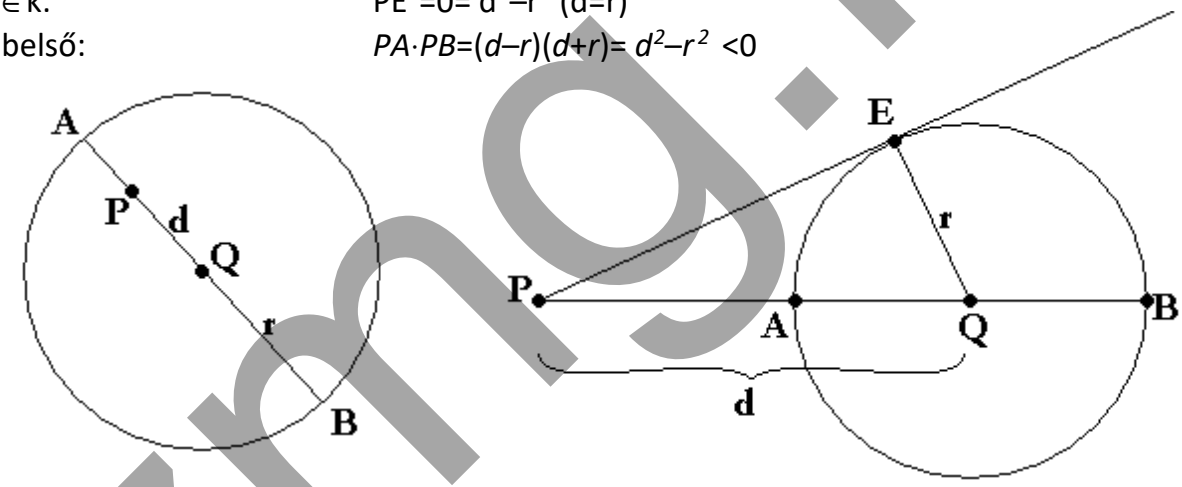
5) Pont körre vonatkozó hatványa, körhatvány

a) Összesítő definíció

P külső: $PE^2=PA\cdot PB=(d-r)(d+r)=d^2-r^2>0$

$P\in k$: $PE^2=0=d^2-r^2$ (d=r)

P belső: $PA\cdot PB=(d-r)(d+r)=d^2-r^2<0$



A P pontnak a K(Q;r) vonatkozó „hatványa” legyen d^2-r^2, ahol: d=d(P;Q), r pedig a sugár. Jelezzük a következő módon: $K(P)=d^2-r^2$.

- Vegyük észre, hogy külső pontnál a pont körre vonatkozó hatványa a pontból húzott érintőszakasz négyzete.
- Vegyük észre, hogy nincs szükségünk a kör megrajzolására, csak két adatra: r és d(P;Q).
- Ahogy a P≡Q-ból kifelé tartok a P-vel: K(P) szigorúan monoton nő. Minimuma: $K(P)=K(Q)=-r^2$, majd amikor elérem a kört: K(P)=0. Ezután is szigorúan monoton nő.
- A középponttól egyenlő távolságra található P pontoknak ugyanannyi a hatványa.
- A körvonal pontjaira a körhatvány értéke 0, a körön belül negatív, a körön kívül pozitív.

szmg.hu

b) Definiálunk egy függvényt: Adott $K(Q;r)$. Legyen a fv. neve $K(\ )$

$K(\ ):S\to\mathbf{R}$; $K(P)=d^2-r^2$, ahol $d=\mathrm{d}(Q;P)$

A függvény a ponthoz hozzárendeli a pontnak a körre vonatkozó hatványát, tehát a z tengely mentén megjelenő függvényértékek a megfelelő pontnak a körre vett hatványai.

Legyen $Q(u,v)$, $P(x,y)$

Ekkor: $(x-u)^2+(y-v)^2-r^2$ a hozzárendelési szabály.

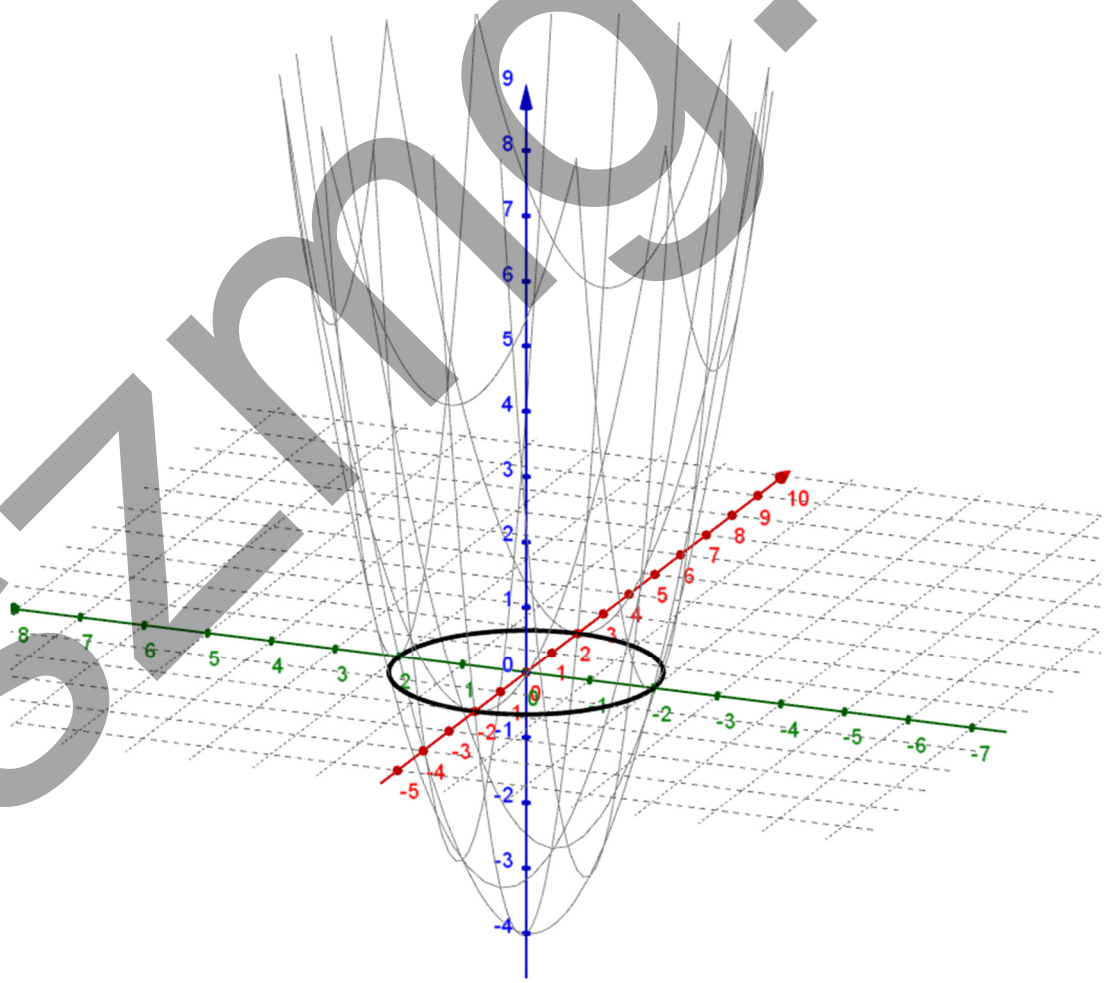
Mi lehet a zérushely, vagyis hol metszi a függvény az xy síkot?

Nyilvánvalóan a Q kp-ú r sugarú kör pontjaiban. Vagyis ez a kör a zérushely.

Hogy találjuk meg ezeket a pontokat? Ahogy más fv-eknél is: egyenlettel.

Ez lesz a „köregyenlet”:

$(x-u)^2+(y-v)^2-r^2=0$ Ennek $(x;y)$ megoldásai a koordináta síkon az $Q(u;v)$ kp-ú, r sugarú kör pontjai, és csakis azok.



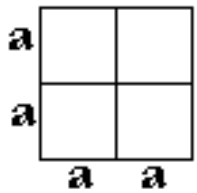
szmg.hu

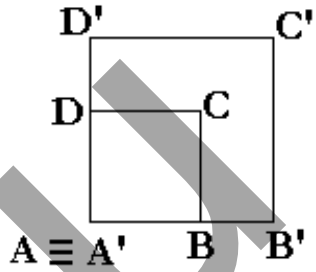
VI. Hasonló alakzatok területének aránya - és térfogatarányok

1) Tételek

a) Hasonló négyzetek területe

Könnyen látható, hogy egy kétszeresére nagyított négyzet területe a négyszerese lesz, illetve egy felére kicsinyített négyzet területe a negyede.

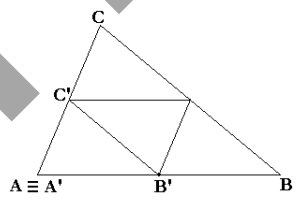




Általában négyzetre:
$T_{ABCD}=a^2$.
$Q^{\lambda}(ABCD)\equiv A'B'C'D'$,
$Q^{\lambda}(a)=a' \Rightarrow T_{A'B'C'D'}=a'^2.= (\lambda\cdot a)^2=\lambda^2\cdot a^2= \lambda^2\cdot T$
Vagyis: a terület: λ^2-szeresére változott.

b) Hasonló háromszögek területe

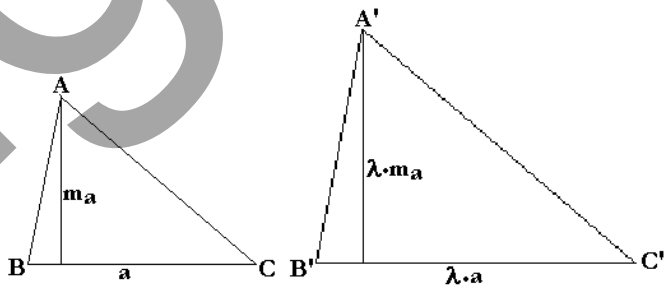
Nézzünk először egy háromszöget, melynek meghúzzuk mind a 3 középvonalát.
Nyilván egy kicsi háromszög hasonlít a nagyra, méghozzá a fele.
Vagyis itt is látható, hogy a 2-szeres nagyítás 4-szeres területet,
az 1/2-es kicsinyítés 1/4-es területet eredményez.



Általában:
$T_{ABC}=a\cdot m_a/2$
$T_{A'B'C'}=\lambda\cdot a\cdot \lambda\cdot m_a/2$

$$\frac{T_{A'B'C'}}{T_{ABC}}=\frac{\frac{(\lambda a)\cdot(\lambda m_a)}{2}}{\frac{a\cdot m_a}{2}}=\lambda^2$$

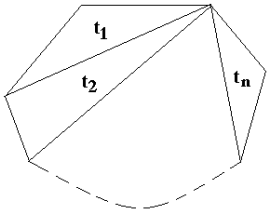
Vagyis hasonló Δ-ek területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzete.

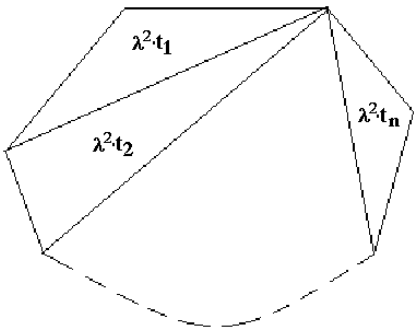


c) Tétel: hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóságuk arányának a négyzete.
Biz.: Általában is igaz, de itt csak konvex sokszöget nézünk.

$$T=\sum_{i=1}^{n} t_i \ \ és \ \ T'=\sum_{i=1}^{n} t_i'=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda^2\cdot t\right)=\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^{n} t=\lambda^2\cdot T \quad ✓$$

Vagyis: $\lambda=\sqrt{\frac{T'}{T}}$

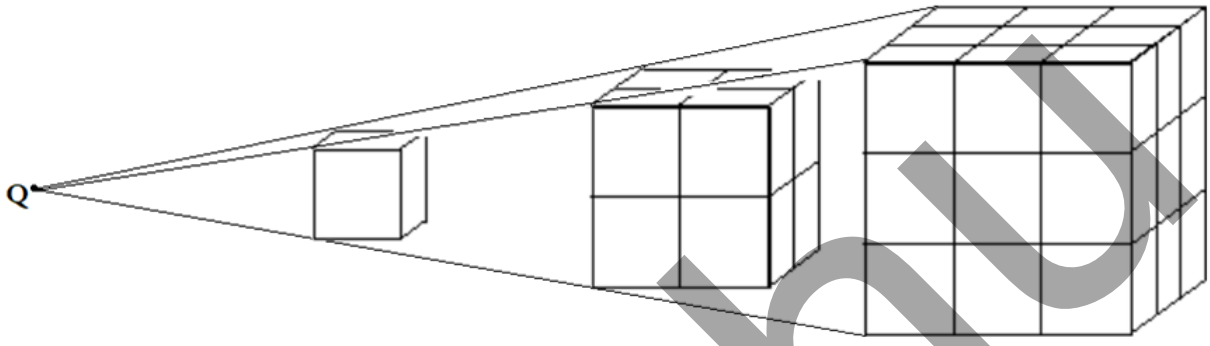




szmg.hu

d) Tétel: Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.
Pl.: egy kocka élének a kétszeresét, háromszorosát vesszük: a térfogata a 2^3=8, illetve 3^3=27-szeresére változik.

De a felülete csak a 2^2=4, illetve 3^2=9-szeresére: minden lap területe a λ (=3) négyzetével szorzódik.
Figyelem: így a felnagyítottnak a felületéhez képest nagyobb a térfogata – fizikában a tömbege is!



e) Arányok számítása
(i) Hogyan változik egy síkidom területe (test felülete) a következő arányú hasonlósági trafóknál?
λ=3; λ=–1/2 λ= $\sqrt{2}$

(ii) Mekkora a λ, ha a területek aránya:

$\frac{T'}{T} = 2$ λ= $\frac{T'}{T} = \frac{1}{9}$ λ=

(λ akkor lehet negatív, ha nem a hasonlóság arányát kérdezik, hanem a transzformáció arányát!)

(iii) Egy téglatest egyik lapjának területe a 16-szorosa lett nagyításkor. Hányszorosára változott a térfogata?

(iv) Szerkesszünk egy háromszögnél 3-szor nagyobb területű, hozzá hasonló Δ-et.
Mo:

szmg.hu

2) Bevezető példák

a) Alapok

(i) Egy 6×6-as kocka éleinek veszem a 1,5 (másfélszeresét).
a) Mekkora az így kapott új kocka térfogata? b) Hogy aránylik az új térfogat a régihez? c) Hogy aránylik az új felület a régihez?

(ii) Hányszorosára nagyítottam/kicsinyítettem egy háromszöget, ha a területe a
a) 3-szorosa lett; b) a fele lett; c) 8/27-ede lett

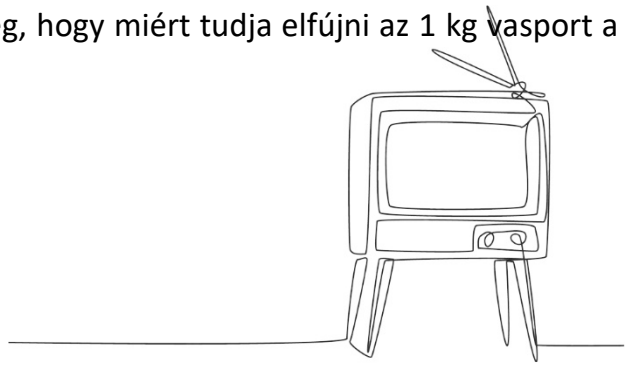
b) Gyakorló példák

(i) Egy négyzet közepéből kivágtam egy kétharmad akkora oldalú négyzetet. A maradék területe 80 dm^2. Mekkora volt az eredeti négyzet oldala?

(ii) Egy 3 m^2 területű háromszöget felnagyítottam. Az eredeti és az új területének összege 30 m^2 lett. Hányszorosára nagyítottam?

(iii) Egy 16:9 képarányú TV 8100 cm^2 képfelületű. 6000 cm^2-tel nagyobb felületű TV-t vettünk. Mekkora az képméret szélessége és magassága?

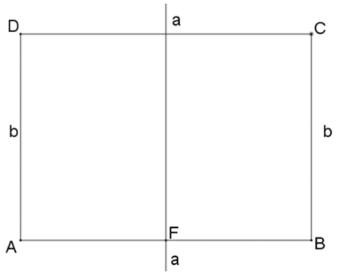
(iv) * Próbáld megmagyarázni, hogy meg, hogy miért tudja elfújni az 1 kg vasport a szél, míg az 1kg-os mérlegsúlyt nem!

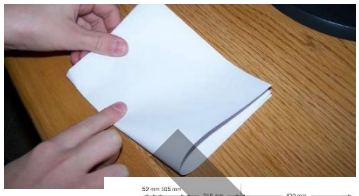


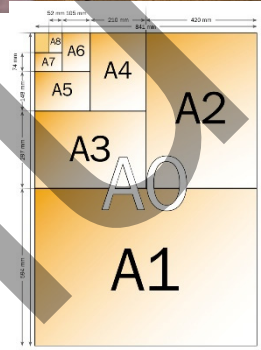
szmg.hu

3) Alakzatok darabolása – és háromszög darabolás

a) Egy téglalap alakú papírlap olyan, hogyha a hosszabbik oldalánál kettéhajtjuk, akkor az eredetihez hasonlót kapunk. Ha a rövidebbik oldala 20 cm, akkor mennyi a hosszabbik? (Vegyük észre, ilyen az A4-es fénymásoló-lap!)

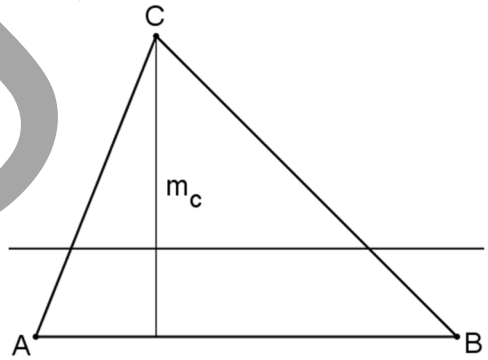






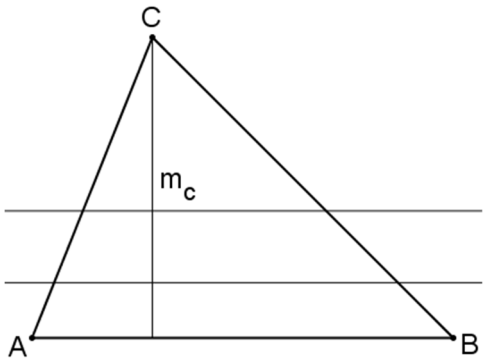
b) Az állatorvosi lovak

(i) Adott egy háromszög: m_c=10 cm. Milyen távol halad az AB alaptól az a párhuzamos egyenest, amely egy olyan trapézt vág le a háromszögből, melynek a területe a fele a háromszögnek?



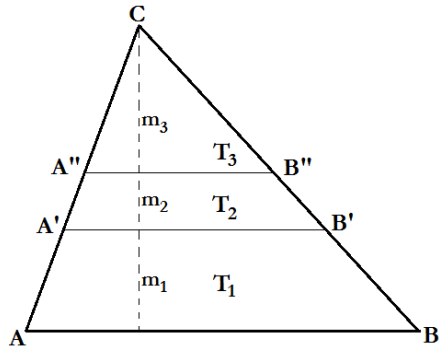
(ii) Adott egy háromszög. Magassága m_c=30 cm. Az AB alappal párhuzamos két egyenessel három egyforma területű alakzatra vágom szét. Mekkora szakaszokra vágom így a magasságot?

Mo.:

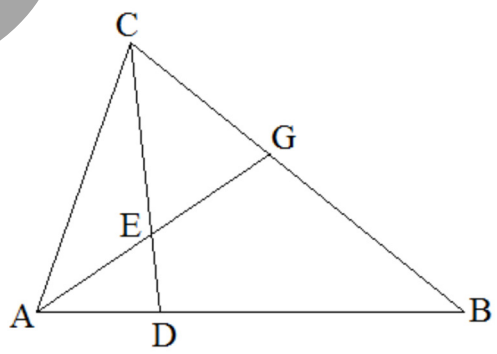


szmg.hu

(iii) Három felé osztott háromszög
$T_1 : T_2 : T_3 = 5 : 2 : 2$
Mekkora szakaszokra osztottam m_c-?
(m_c=10)



(iv) * Adott egy Δ. *D* pont az *AB*-t *A*-hoz közelebb: 3:4 arányban osztja. E a CD-t D-hez közelebb 4:7 arányban osztja. Mekkora a BGED négyszög területe a háromszög területéhez képest?



4) Felület – Térfogat

a) Röviden a köbgyökről:

$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad$ $7^3 = 343 \Rightarrow \sqrt[3]{343} = 7$

$10^3 = 1000 \Rightarrow \sqrt[3]{10^3} = 10$ $\qquad$ $\left(11^4\right)^3 = 11^{12} \Rightarrow \sqrt[3]{11^{12}} = 11^4$

$\sqrt[3]{125} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27} =$

$\sqrt[3]{0{,}125} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} =$

szmg.hu

$\sqrt[3]{0,027} =$

$\sqrt[3]{10} \approx$

$\sqrt[3]{5^{30}} =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2^{15}}} =$

Emeljünk ki:

$\sqrt[3]{6^3 \cdot 5} =$

$\sqrt[3]{2000} =$

$\sqrt[3]{128} =$

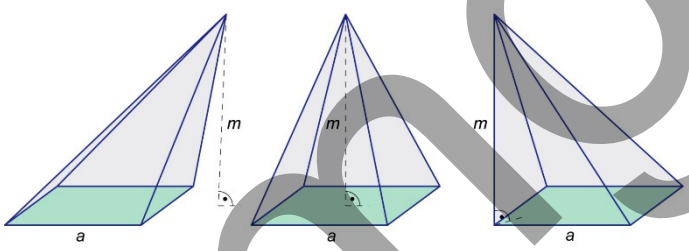
$\sqrt[3]{750} =$

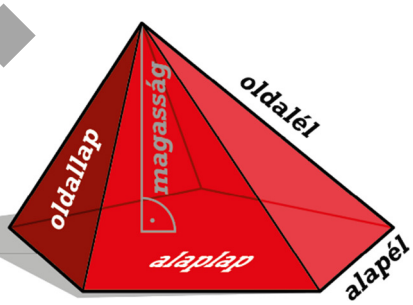
$\sqrt[3]{320} =$

$\sqrt[3]{0,008} =$

b) Néhány test térfogata – illik tudni…
Kocka – $V=a^3$
Téglatest – $V=a\cdot b\cdot c$
Gömb – $V = \frac{4r^3\pi}{3}$
Gúla – $V= \frac{\text{Alapterület} \cdot \textit{magasság}}{3} = \frac{T_{alap} \cdot m}{3}$

Néhány azonos alapú és magasságú négyzet alapú gúla térfogata





c) Tétel: hasonló testek felületének aránya: λ^2, térfogatának aránya λ^3.
Csak egy kis kockánál bizonyítjuk.
Egy kocka éle *a*.
Lapjai területe: $a^2 \Rightarrow$ felülete: $A_{kocka}=6a^2$.
Térfogata: $V_{kocka} = a^3$.

A hasonlóság aránya: λ.
Lapjai területe: $(\lambda\cdot a)^2 \Rightarrow$ felülete: $A_{kocka}=6(\lambda\cdot a)^2 = \lambda^2\cdot 6a^2 = \lambda^2\cdot A_{kocka}$✓
Térfogata: $V_{kocka} = (\lambda\cdot a)^3=\lambda^3\cdot a^3= \lambda^3\cdot V_{kocka}$✓

d) Egy 5 cm élű kockát λ =3 aránnyal felnagyítok. Mekkora lesz a felülete és a térfogata?

szmg.hu

e) A 108 kg tömegű Hókuszpókot egy törp a 3-adára kicsinyíti. Mekkora lesz így a tömege a kicsinyített Hókuszpóknak?
Melyik fázik jobban a hidegben: a nagy Hókuszpók vagy a kicsi?

f) Milyen arányú hasonlóság az, amely egy test térfogatát
(i) 8-szorosára, 1000-szeresére növeli.

(ii) 1/8-adára, 1/27-edére csökkenti

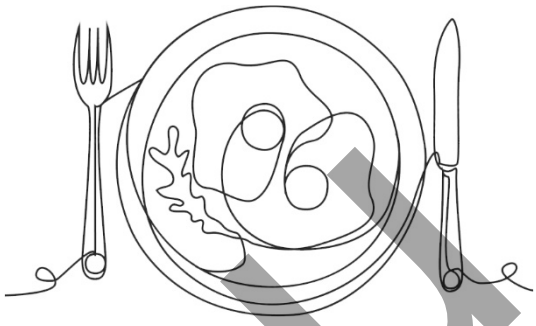
(iii) Hogy változnak ekkor a felületek?

5) Gyakorlás
a) Egy kockát úgy nagyítok fel, hogy a felülete a 49-szerese lett. Hányszorosa lett a térfogata?

b) Egy kocka anyagából 1000 kis kockát készítünk. A felülete így 21 600 egységgel nőtt meg. Mekkora volt az éle?

szmg.hu

c) Egy tyúktojás kb. 5,7 cm magas, egy strucctojás kb. 17,1. Sűrűségük kb. ugyanaz. Alakjuk is. Hány strucctojás kell 810 gyereknek, ha egy gyerek átlagosan 4 tyúktojást eszik meg?



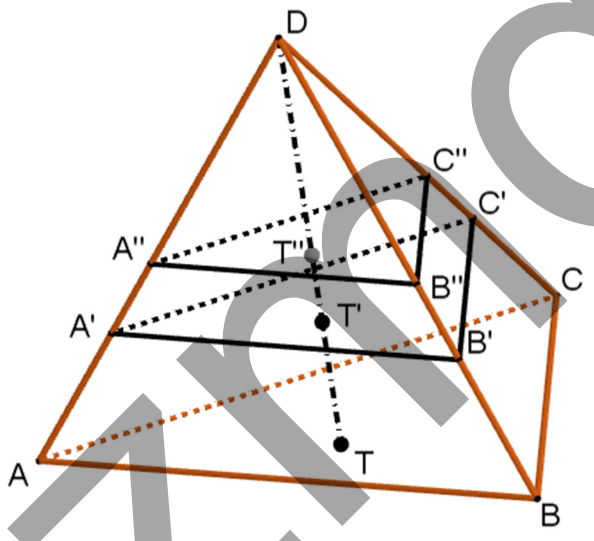
d) Egy 2 m oldalélű kívülről fehérre festett fakockát a lapjaival párhuzamosan kisebb kockákra vágtunk. A feldarabolás után mindent kockát befestettünk fehérre, ahol azok még nem voltak festve. 168 m^2 felületet kellett befesteni. Hány felé vágtuk a kockát?

e) Adott az ABC_{Δ}. $c=20$, $m_c=12$. A c oldallal párhuzamosan, tőle 2 egységre elszelem a háromszöget. A maradék háromszöget szintén az eredeti *c* oldallal párhuzamosan 4 egyforma magasságú részre osztom. Mekkora a megmaradt háromszög alatti első négyszög területe?

szimg.hu

f) Egy tetraédert egy – az alappal párhuzamos – síkkal 2:3 térfogatarányú tetraéderre és csonkagúlára osztom (a levágott tetraéder térfogata a kisebb). Milyen arányban vágtam így el az alaphoz tartozó magasságot?

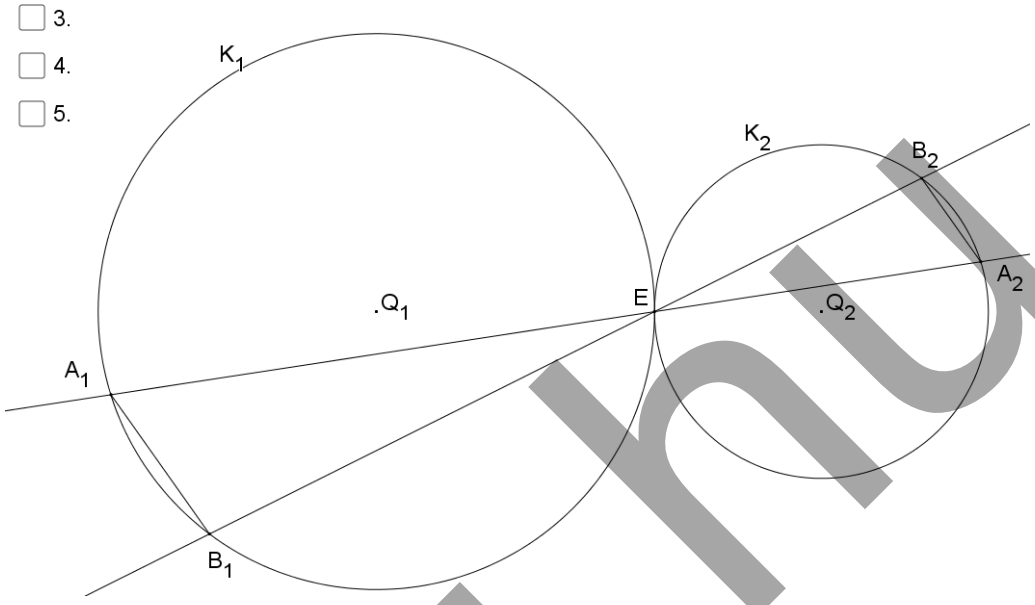
g) Egy tetraédert az ABC alapjával párhuzamos síkkal elvágom úgy, hogy a levágott tetraéder térfogatának az aránya a keletkezet csonka-gúláéhoz 2:3 legyen. Majd a maradék tetraédert az A'B'C' szemközti D csúcsból elvágom 2 cm-nyire az alappal párhuzamos síkkal, és így épp felezem a térfogatát. Mekkora volt az eredeti tetraéder magassága?
Mo:



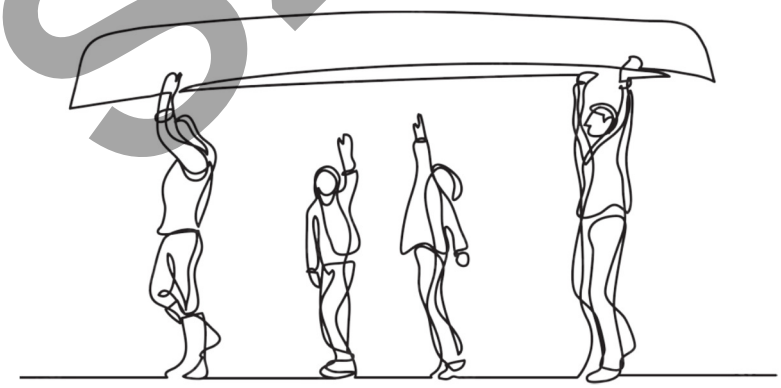
szmg.hu

h) Két kör egymást kívülről *E*-ben érinti. d(Q_1;Q_2)= 36 cm. *E*-n keresztül húzunk két közös szelőt, mely a két kört még A_1 és B_1-ben, a másikat A_2 és B_2-ben metszi. $T_{A_1B_1E}$: $T_{A_2B_2E}$ =16:25. Mekkora a két sugár.

☐ 1.
☐ 2.
☐ 3.
☐ 4.
☐ 5.



Kit fúj el könnyebben a szél: apát vagy fiát?



Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

szmg.hu