Matematika

Véges matematika

Munkatankönyv

v1.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

Matematika

Véges matematika

Munkatankönyv

v1.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu

2022

szmg.hu

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

TARTALOMJEGYZÉK

Logika - Bevezetés **9**

I. Kvantorok – bevezetés 9

1) Kvantorok 9

2) Legalább/legfeljebb 9

3) Töltsd ki a táblázatot 10

II. Kijelentés, állítás, ítélet 10

1) Kijelentés, állítás – „prédikátum” 10

2) Egy állítás tagadása - egyváltozós logikai művelet 11

III. Kétváltozós logikai műveletek 13

1) A Konjunkció – Diszjunkció – Antivalencia 13

2) Az implikáció – avagy a matematikai „ígéret”. *„Ha te háromszög leszel, akkor körbeírható leszel”* 19

Halmazelmélet - Alapozás **24**

I. Definíció, jelek, halmazok megadása 24

1) Fogalomalkotás a halmazokról 24

2) Halmazok számossága először (Később: 11. osztály, emelt szintű képzés) 25

3) Halmazok ábrázolása - Venn-diagrammal 25

II. Részhalmaz 26

1) Definíció 26

2) Triviális részhalmazok 26

3) A „részhalmazság” mint reláció 26

4) Halmaz részhalmazai 26

III. Halmazok egyenlősége - a bizonyítások két módszere 27

1) A két ekvivalens definíció 27

2) A két definíció sok esetben: a bizonyítások két módszere 27

3) Állítás: $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A \Rightarrow A=B=C$ 28

4) A halmazoknál a „része” reláció: 28

IV. Halmazok ekvivalenciája és a (többféle-)végtelen számosságú halmazok 28

1) Két halmaz ekvivalenciájának definíciója 28

2) A számolás alapja 29

Számelmélet - Oszthatóság **31**

I. Osztó, oszthatóság 31

1) Az oszthatóság bevezetése 31

2) Az oszthatóság definíciója 31

3) Oszthatósági szabályok 31

4) Összetett oszthatósági szabályok 32

szmg.hu

5) Reláció tulajdonságok 32
6) Egyéb tulajdonságok 33
7) Példák a tulajdonságok alapján 36
II. A teljes hatványok, a Pascal Δ , nevezetes szorzattá-alakítások (ismétlés…) 37
1) Teljes köb 37
2) Másod - harmad - negyed fok, stb. 38
3) Azonos kitevőjű hatványok különbsége 38
4) Azonos páratlan kitevőjű hatványok összege: $a^{2k+1}+b^{2k+1}= (a+b)(\ldots)$ 39
5) Három v. több tag összegének négyzete, illetve két nehezebb szorzattá alakítás 39
6) A hatványozás és szorzattá-alakítás gyakorlása 40
7) Emlékeztető két nagyon fontos ismeretre 43
8) A szorzattá alakítás – jegyezzük meg – a számelmélet egyik legerősebb eszköze 43
9) Szorzattá alakítás, relatív prímek, egymást követő számok 45
III. Számrendszerek 47
1) Számrendszerek és átírások (ismétlés) 47
2) Műveletek számrendszerekben (https://decimal-to-binary.com/sum-of-numbers.html) 49

Számelmélet – LNKO és LKKT 50
I. A számelmélet alaptétele 50
1) Az egység 50
2) A prímek kezdő definíciója, és az összetett számok 50
3) A számelmélet alaptétele – és a kanonikus alak 50
4) Osztók keresése, osztók száma 51
5) Osztók tulajdonságai 51
6) Osztókkal kapcsolatos gyakorlások 52
7) Oszthatósági szabályok – elemi oszthatóságok 54
8) Négyzetszámok - köbszámok stb. 55
9) Osztók és a relatív prímek a Számelmélet alaptétele alapján 55
10) Oszthatósági szabályok - összetett oszthatósági szabályok 56
II. A lineáris kombináció és az LNKO - (a;b) előállítása x_0a+y_0b alakban 57
1) LNKO megtalálása a Számelmélet alaptétele felhasználásával 57
2) Az Euklideszi algoritmus alapja – számok távolsága 58
3) A lineáris kombináció 59
4) A közös osztók „lélekvándorlása” vagyis átadása 61
5) Hasznuk algebrai törtek egyszerűsíthetőségénél 62
6) Egyéb gyakorlópéldák (Az *a* és *b* változók természetes számok) 64
III. Legkisebb közös többszörös: Least Common Multiple 65
1) Definíciók; példa 65

szmg.hu

2) Tételek ... 65
3) Példák ... 66

Számelmélet – A maradékok világa az egész számoknál - olvasmány ... 69

I. Számok osztási maradéka ... 69
1) Bevezetés 7-tel ... 69
2) Gyakorlás más számokkal ... 71
II. Definíció és tulajdonságok ... 71
1) Kongruencia definíció ... 71
2) Tulajdonságok (a szereplő számok egészek, természetesek) ... 72
III. Számelméleti hasznuk - gyakorlás ... 74

Kombinatorika ... 76

I. Gondolkodási módszerek ... 76
1) Bevezetés ... 76
2) Skatulya elv ... 78
3) Az ábrázolás sok esetben segít ... 82
4) A komplementer esemény – első közelítésben ... 83
II. Néhány alapismeret, gondolat ... 83
1) A faktoriális ... 83
2) Egy kis valószínűségszámítás ... 84
III. Permutációk - a sorrendek összeszámlálása: számít a sorrend – minden elem szerepel ... 85
1) Ismétlés nélküli Permutáció – különböző elemek maradéktalan sorba állítása ... 85
2) Az ismétléses permutáció – minden elemet sorba állítok – lehetnek azonos elemek is ... 88
3) Ciklikus permutációk – Arthur király kerekasztala ... 90
IV. Variáció – számít a sorrend – nem minden elem szerepel ... 91
1) Az Ismétlés Nélküli Variáció – egy elem csak egyszer szerepelhet ... 91
2) Az ismétléses variáció – számít a sorrend – egy elem akárhányszor felhasználható ... 93
V. Kombináció – nem minden elem szerepel – nem számít a sorrend ... 95
1) Ismétlés nélküli kombináció ... 95
2) Az ismétléses kombináció – a sorrend nem számít - nem minden elem szerepel – egy elem akár többször is ... 99
VI. Egy kis összefoglaló ... 100
1) Összefoglaló táblázat – elemi kombinatorika ... 100
2) Vegyes példák ... 101
VII. A binomiális együtthatók, a binomiális tétel, a Pascal-háromszög ... 102
1) A szimmetria tulajdonság és két összegtulajdonság ... 102
2) A binomiális tétel ... 102
3) A binomiális együtthatók összege ... 103

szmg.hu

4) A binomiális együtthatók és a prímek ... 103
VIII. Összetettebb feladatok, gyakorlás ... 104
IX. Invariáns feladatok ... 108

Számelmélet – Prímek – Diofantikus egyenletek – Polinomok ... 109

I. A prímek ... 109
1) Definíció ... 109
2) Az Eratoszthenész féle szita ... 109
3) A prímek száma, típusa ... 109
4) Prímek sűrűsége ... 110
5) Néhány kérdés és érdekesség a prímekkel kapcsolatban ... 110
II. Az egyértelmű prímfelbontás és következményei ... 111
1) A számelmélet alaptétele (újra) ... 111
2) Egy szám osztói ... 111
3) Racionális-irracionális számok ... 112
4) Az egyértelmű prímfelbontásra, kanonikus alakra épülő feladatok ... 113
III. Diofantoszi egyenletek és egyéb számelméleti feladatok ... 113
1) Diofantikus feladatok ... 113
2) Egyéb számelméleti feladatok ... 115
IV. Polinomok ... 116
1) Definíciók ... 116
2) Egészegyütthatós polinomok gyökei ... 117
3) Polinomok osztása ... 117

Halmazelmélet – Műveletek halmazokkal ... 120

I. Hatványhalmaz ... 120
1) A hatványhalmaz léte axióma ... 120
2) Halmaz részhalmazainak száma – vagyis a hatványhalmaz számossága ... 120
II. Halmazműveletek ... 121
1) Halmazok Uniója – a „vagy” művelet: $p \vee q$ ... 121
2) Halmazok Metszete – az „és” művelet : $p \wedge q$ ... 121
3) Tulajdonságok, összefüggések ... 121
4) Halmazok különbsége ... 122
5) Szimmetrikus differencia – a „kizáró vagy” – antivalencia művelet: $p \oplus q$ ... 122
6) A Komplementer halmaz – „Tagadás” ... 123
7) A Descartes szorzat ... 124
III. A Logikai szita – Halmazok uniójának számossága ... 125
1) Bevezető ... 125
2) Általában ... 125

szmg.hu

3) Gyakorlásuk 126
IV. Vegyes gyakorlópéldák – érdemes rajzolni 127

Gráfelmélet 129

I. Definíciók - fogalmak 129
1) Gráf 129
2) Fogalmak 129
II. Gráfok tulajdonságai 131
1) Az izomorfia vizsgálata 131
2) Élszámok, fokszámok 131
3) Komplementer gráfok 133
4) A gráf bejárása 133
III. Gyakorlás 135
1) Térképből gráf 135
2) Főbb kritériumok fokszámokra egyszerű gráfokban 135

https://numbergenerator.org/permutations-and-combinations/permutations

www.dcode.fr

szmg.hu

szmg.hu

Logika - Bevezetés

I. Kvantorok – bevezetés

1) Kvantorok

A. Univerzális kvantor: ∀: minden, bármely, tetszőleges, akármelyik, bármikor

B. Egzisztenciális kvantor: ∃: létezik, van, legalább egy olyan … van; van olyan, található olyan, ∄ nincs olyan, nem létezik

Az eltévedt pilóta leszáll Skóciában, és lát egy fekete birkát. Melyik állítása lehet igaz:

- Skóciában feketék a birkák.
- Skóciában van fekete birka.
- Skóciában a birkák egyik fele fekete.
- Skóciában legalább egy olyan birka van, melynek legalább egyik fele fekete.

2) Legalább/legfeljebb

a) Pótold ki az alábbi mondatban a hiányzó részeket a következővel: legalább/legfeljebb:

A spanyol nyelvi csoport akkor indul, ha …… 12 diák jelentkezik, de …… 20 fős lehet a csoport.

Az egyáltalán nem igaz, hogy tegnap …… ötezren lépték át a határt, mert én magam …… hatezret számoltam.

b) Öt család fiú és lány gyerekeinek számát táblázatba írtuk.

Betűjellel írd az állítások mellé, melyekre igaz az állítás:

Család	**Fiú**	**Lány**
Almásy	3	1
Bocskai	4	0
Csanády	3	3
Dessewffy	0	4
Esterházy	3	4

A családban:

minden gyerek lány –

van fiú gyerek –

nem igaz, hogy minden gyerek lány –

nem igaz, hogy van fiú gyerek –

legfeljebb 1 fiú van –

legalább 2 lány van –

nem igaz, hogy legfeljebb 2 fiú van –

bármely gyerek fiú –

egyértelműen létezik lány –

van olyan gyermek, amelyik fiú

szmg.hu

3) Töltsd ki a táblázatot

„Hamis/Igaz/Lehet”

A: legalább 3 zebra van a karámban

B: legalább egy zebra van a karámban

C: van zebra a karámban

D: nincs zebra a karámban

E: legfeljebb 2 zebra van a karámban

F: legfeljebb 4 zebra van a karámban

Ha A igaz akkor B is.		Ha B igaz, akkor A hamis	
Ha A igaz, akkor B hamis.		Ha B hamis, akkor A igaz.	
Ha B hamis, akkor A hamis.		Ha B igaz, akkor A is.	
Ha B igaz, akkor C is.		Ha C igaz, akkor A is.	
Ha D igaz, akkor C hamis		Ha D hamis, akkor B igaz	
Ha E igaz, akkor F igaz		Ha F igaz, akkor E igaz	
Ha D igaz, akkor E igaz		Ha E hamis, akkor D hamis	
Ha F igaz, akkor C igaz		Ha A hamis, akkor E igaz	

II. Kijelentés, állítás, ítélet

1) Kijelentés, állítás – „prédikátum”

Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről *egyértelműen* eldönthetjük, hogy logikai értékük vagy igaz, vagy hamis, kijelentéseknek, vagy állításoknak nevezzük.

Ha p egy tetszőleges kijelentés, akkor ennek logikai értékét |p| jelöli, és így olvassuk: „p logikai értéke”. Ez lehet igaz v. hamis. i vagy h.

Válasszuk ki, hogy az az alábbiak közül melyik állítás, melyik nem állítás:

A: A 2 prímszám.

B: Van derékszögű háromszög.

C: Az osztály szőke diákja okos.

D: Délben finom ebédünk lesz.

E: A 91 prímszám.

F: Moziba megyek.

G: A dobostorta finom..

H: Itt most fúj a szél.

I: Esernyőt viszek magammal.

J: Ma délután úszni megyek.

K: Ma délután teniszezni megyek.

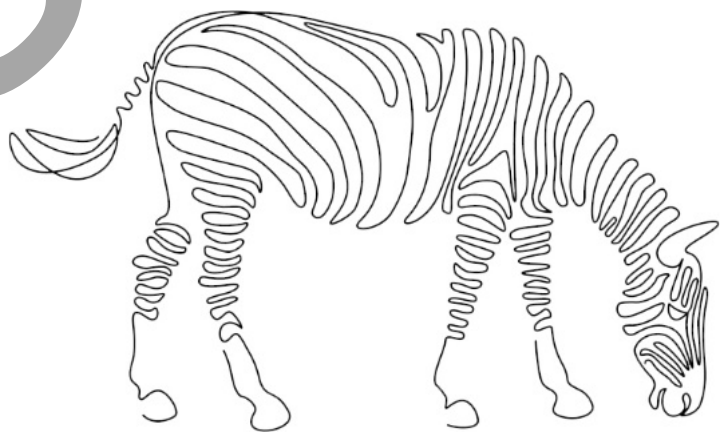
L: Aladár okosabb Bélánál

Néhány értékelése:

|A 91 prímszám| = h, |A 2 prímszám|= i.

A D mondat, logikai értelemben, nem állítás: nem eldönthető.

Az L sem eldönthető. C: Nem állítás, mert nem vonatkozik individuumra.



szmg.hu

2) Egy állítás tagadása - egyváltozós logikai művelet

a) Egy állítás tagadása az összes olyan állítás összessége, amire nem igaz az eredeti állítás.

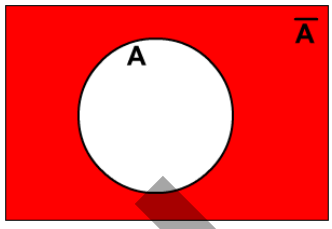
Jelöljön **P** egy logikai állítást. A tagadását **¬P** –vel jelöljük. A **¬P** állítás logikai értéke csak akkor igaz, ha **P** állítás logikai értéke hamis.

Negáció: tagadás

Jele: NEM, NOT, ¬. A halmazelméletben: $\overline{A}$.

Például: P: „Béla évvégén kitűnő lett”

ekkor **¬P** = ”Bélának év végén legalább egy nem 5-ös jegye lett” vagy egyszerűbben „Béla évvégén nem lett kitűnő”



b) Egy állítás tagadása az összes olyan állítás összessége, amire nem igaz az eredeti állítás.

Alapállás: Egy állítás tagadásának tagadása az eredeti állítás.

P: Minden bőrönd sárga.

Tagadása: **¬P** = „nem minden bőrönd sárga”, v. „van nem sárga bőrönd”

A tagadásnak nem lesz jó az az állítás, hogy „Van kék bőrönd”

Bár igaz az, hogyha „van kék bőrönd”, akkor már nem lehet igaz P.

Mégis: ha van nem sárga bőrönd (ez az állítás tagadása), az még nem egyenértékű azzal, hogy „van kék bőrönd”.

Vagy: Ha tagadom azt, hogy „Van kék bőrönd”, akkor nem lesz igaz az eredeti állítás, vagyis hogy „Minden bőrönd sárga”. Így a tagadás tagadása nem lesz az eredeti állítás.

c) Tagadd a következő állításokat!

A 7 prímszám.

Van olyan prím, amely páros.

Legalább 100 db. ikerprím létezik.

Minden kocka kék.

Az iskola tanulói legfeljebb 20 évesek..

Az 5 prímszám

Nem teljesül, hogy az 5 prímszám

Az 5 nem prím

Mindenki szereti a matekot

Nem igaz, hogy mindenki szereti a matekot.

Nem mindenki szereti a matekot.

Van olyan, aki nem szereti a matekot.

szmg.hu

d) A p kijelentés negációjának logikai értékét így definiáljuk:

$|\neg p| := \begin{cases} i, & ha \ |p| = h \\ \text{h, ha} & |p| = i \end{cases}$ Vagyis ha p igaz, akkor nem p hamis és fordítva.

Értéktáblázattal:

p : Hugó őszinte ember	**¬p :Hugó nem őszinte: Hugó hazug**	**¬¬p**	**¬¬¬p**
igaz			
hamis			

p	**¬*p***	**¬¬*p***	**¬¬¬p**
i			
h			

Egy *p* állítás tagadása minden olyan q állítás összessége, amely esetén nem teljesül a p állítás – melyek együttes tagadása az eseménytéren belül az eredeti állítás maga.

Alaphelyzet: Egy osztályba csak fiúk járnak, 32-en.

p: „Az osztályban minden tanuló fiú”

Az alábbiak közül melyik ennek az állításnak a tagadása, vagyis: $\neg p$

A: Az osztályban nincs fiú tanuló

C: van pontosan egy lány tanuló

D: van olyan tanuló, amelyik nem fiú

E: Az osztályban 0 v 1 v 2 v 3 v … v 31 tanuló fiú.

F: Az osztályban van lány tanuló

G: Az osztályban legfeljebb 31 fiútanuló van.

H: Az osztályban legalább egy lány tanuló van.

I: Az osztályban 32 lánytanuló van

Érdekesség a magyar nyelvben: „Nem láttam semmit” nem azt jelenti, hogy igenis, láttam valamit, hanem azt jelenti, tényleg nem láttam semmit ☺, vagyis hogy a semmit láttam, vagy nem láttam valamit. A lényeg, hogy semmit sem láttam ☺

(Járj utána, kik tagadnak még hasonlóképpen duplán)

szmg.hu

e) Egy állítás tagadásáról újra

p = „Minden óra digitális”.

Ennek a tagadása nyilván, hogy van nem digitális óra.

A p-nek mely helyzetben a tagadása az, hogy van analóg óra?

Nyilván akkor, ha csak kétféle óra van: Digitális és Analóg.

Ebben az esetben az, hogy „van nem digitális óra” egyenértékű azzal, hogy van analóg óra.

De ha van Digitális, Analóg és Napóra, akkor az, hogy „van analóg óra” már nem tagadása annak, hogy „van digitális óra”

Hiszen akkor a „van digitális” óra tagadása, ami egy **állítás**, nem volna egyértelmű, merthogy akkor most „analóg óra van”, vagy „napóra van”, vagy akár mindkettő. Az nem lehet, hogy nem egyértelműn eldönthető az állítás tagadásának igazsága.

Így ebben az esetben a „van digitális” óra tagadása az az, hogy „van analóg óra vagy napóra”.

Hasonlóképp: tegyük fel, hogy csak négyféle szemszín létezik: barna, kék, zöld, piros. Adott osztály, 28 fős.

Tagadjuk a következő állításokat:

Az osztályban minden diák kékszemű.

Az osztályban minden diák kék vagy barna szemű.

Az osztályban minden diák kék vagy barna vagy zöld szemű.

III. Kétváltozós logikai műveletek

1) A Konjunkció – Diszjunkció – Antivalencia

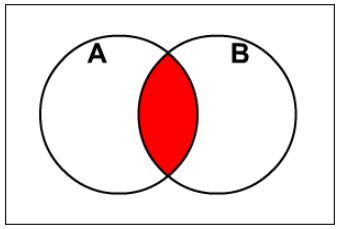
a) Definíciójuk

(i) Konjunkció (logikai szorzás)

Logikai *és* (*AND*)

Jele $\wedge$ (Esetleg: $*$). $p \wedge q$

Kétváltozós logikai művelet, az eredménye csak akkor **igaz**, ha p igaz és q **igaz**. „*p* is és *q* is igaz”, vagyis mindkét „tagja” igaz.



A művelet „kommutatív”, vagyis: $A \wedge B = B \wedge A$

Halmazelméletben a $\cap$-nek felel meg.

„Moziba megyek és uszodába”

Ez csak akkor igaz, ha mindkét helyre elmegyek. Ha valamelyikbe nem, vagy egyikbe sem, akkor már nem igaz.

szmg.hu

Gyakoroljuk:

- Tegnap Matekból 5-öst kaptam és Biológiából 4-est.
  Mondj olyan állítást, melyre a fenti egyik fele sem igaz.

  Mondj olyan állítást, melyre a fenti nem igaz – de az egyik fele igaz!

- Melyek azok az x számok, melyekre igaz a következő állítás:
  $4x-12<0 \quad \wedge \quad 5x \geq 0$

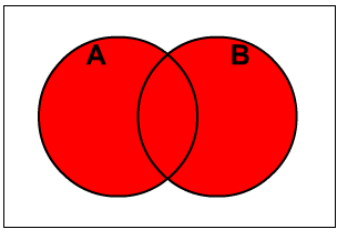
- Egy karámban 20 kacsa és 15 tyúk éldegél.
  Igaz-e: „A karámban legalább 15 kacsa él és legfeljebb 20 tyúk”

  Fogalmazz még ilyen konjunkciót tartalmazó állítást, felhasználva a „legalább” és „legfeljebb” szavakat – igazat is, hamisat is.

(ii) Diszjunkció (logikai összeadás)

Logikai vagy (megengedő vagy) (OR).
Jele: $\vee$ (Esetleg: +) $p \vee q$
A vagy akkor igaz, ha legalább az egyik tagja igaz (de lehet mindkét tag is igaz). Vagyis művelet akkor hamis ha mindkét részállítás hamis. A többi esetben viszont igaz.
Kétváltozós logikai művelet, akkor **igaz**, **ha *A* vagy *B*** *vagy* **A *és* B igaz**.
A művelet „kommutatív”, vagyis: $A \vee B = B \vee A$

Halmazelméletben az $\cup$-nak felel meg.
„Moziba megyek vagy uszodába”
Ez igaz, ha csak az egyik helyre megye, vagy akár mindkettőre. Akkor hamis, ha vagy egyikbe sem.



Vegyük észre, ez a mondat alatt a magyar nyelvben nem ezt értjük, nem a „logikai vagy”-ot, hanem a következő pontban látható műveletet:

szmg.hu

(iii) Antivalencia

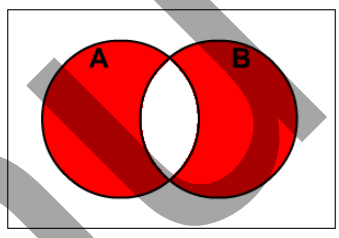
Logikai *kizáró vagy* (XOR)

Jele: $\oplus$ (Esetleg: $\neq$ illetve Δ) A *kizáró vagy* művelet abban különbözik a diszjunkciótól, hogy nem engedi meg, hogy a két állítás logikai értéke egyszerre igaz legyen. A művelet eredménye akkor hamis, ha mindkét állítás logikai értéke megegyezik. Kétváltozós logikai művelet, az eredménye akkor **igaz**, **ha (*A* igaz és B hamis)** *vagy* (**A hamis *és* B igaz)**.

A művelet „kommutatív”, vagyis: $A \oplus B = B \oplus A$

Halmazelméletben az Δ-nak (szimmetrikus differencia) felel meg.

A magyar nyelvben a „vagy” kötőszó legtöbbször a „kizáró vagy”. „Moziba megyek, vagy uszodába” a nyelvünkben ugyanolyan logikájú, mint az, hogy „a gyermek, ha megszületik akkor fiú lesz vagy lány”.



Gyakoroljuk:

- Péter vagy magyar, vagy tud angolul.
  Sorold fel azt a három esetet, melyre igaz az állítás.

  Írd le azt az esetet, amelyre nem igaz az állítás.

  Írd le azokat az eseteket, melyekre antivalenciaként értelmezve a fenti állítást, igaz lesz az.

  Írd le azokat az eseteket, melyekre antivalenciaként értelmezve a fenti állítást, nem lesz az igaz.

- Melyek azok az x számok, melyekre igaz a következő állítás:
  $4x-12<0 \quad \vee \quad 5x \leq 0$

szmg.hu

- Egy karámban legalább 20 kacsa vagy legfeljebb 15 tyúk éldegél.
  Írj olyan állítást, melyre a diszjunkció igaz, de a kapcsolat egyik fele nem igaz!

  Írj olyan állítást, melyre a diszjunkció hamis!

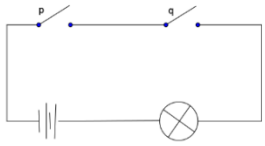
  Írj olyan állítást, melyre a diszjunkció igaz, és a kapcsolat mindkét fele igaz.

  Ha – hibásan – antivalenciának értelmeznénk az állítást, írj olyan állítást, melyre igaz az antivalencia!

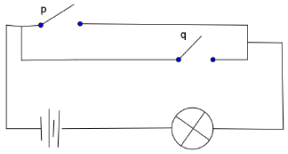
  Ha – hibásan – antivalenciának értelmeznénk az állítást, írj olyan állítást, melyre nem igaz az antivalencia!

b) Szemléltetésük

A *konjunkció* szemléltetése logikai áramkörrel

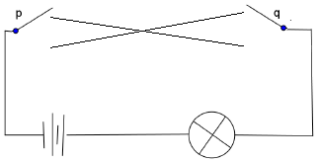


Legyen p, q értéke i akkor, ha p, q kapcsoló bekapcsolt állapotban van, egyébként értéke: 0. Ekkor a lámpa világításának feltételét a következő módon írható fel egyszerű formában: $p \wedge q$.



A *diszjunkciót* is szemléltethetjük logikai áramkörrel.

Könnyen belátható, hogy a $p \vee q$-nak olyan áramkör felel meg, amelyben a megfelelő kapcsolók párhuzamos kapcsolásban vannak.



Antivalencia: (Itt a fenti állás az igaz, a lenti a hamis.)

Úgy képzeljük el, mint egy szobában egy lámpát mindkét helyen fel lehet kapcsolni, de úgy kötötte be a villanyszerelő, hogy épp akkor nem ég a lámpa, ha mindkét kapcsoló „fel van kapcsolva” v. „le van kapcsolva”.

szmg.hu

c) Értéktáblázataik

Vigyázat: a matematikai diszjunkció: **megengedő vagy**.

„Pista most levelet ír vagy zenét hallgat.”: lehet, hogy zenét hallgat, lehetséges, hogy a levél írása közben hallgatja a zenét. A "vagy” kötőszónak ezt a használatát "**megengedő vagy**”-nak nevezzük.

„Jancsi most kerékpározik vagy úszik.” „**kizáró vagy**”-nak nevezzük (a vízikerékpározás még nem úszás…)

A „Holnap, vagy holnapután matematika órán dolgozatot írunk” mondatot „**választóértelemben**” használjuk a magyarban, de ha egy matematika tanár mondja, akkor mert holnap írunk dolgozatot, attól még… ☺.

Értéktáblázat (Előtte olvasd fel a logikai műveletes mondatot!)

mozi	strand	mozi ∧ strand	mozi ∨ strand	mozi ⊕ strand
i	i			
i	h			
h	i			
h	h			

p	q	p∧q	p∨q	p⊕q	q∧p	q∨p

d) Gyakorlásuk

Mely képre igazak a következő állítások:

- Esik az eső és fúj a szél
- Esik az eső vagy fúj a szél
- Nem esik és nem fúj.
- Nem esik vagy nem fúj.

szmg.hu

Rajzold fel az összes olyan négyszöget, amelyekre igaz:

Az ABCD négyszög téglalap vagy rombusz	
Az ABCD négyszög trapéz és deltoid	
Az ABCD négyszög paralelogramma és deltoid	
Az ABCD négyszög téglalap és rombusz	

e) Tagadásuk – a De Morgan azonosságok

A konjunkció („és” kapcsolat) tagadása – példával, majd formálisan táblázattal:

„Esik az eső és fázom” tagadása:
Nem esik vagy nem fázom. (Legalább az egyik tagadás igaz)

„ABC$_{\triangle}$ derékszögű és egyenlőszárú” tagadása:
Nem derékszögű vagy nem egyenlő szárú. (Legalább az egyik tagadás igaz)
Rajzoljunk ilyeneket (mindhárom esetet!)

esik	fázom	esik **és** fázom	**nem igaz**, hogy esik **és** fázom	nem esik	nem fázom	nem esik vagy nem fázom
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

szmg.hu

A diszjunkció („vagy” kapcsolat) tagadása – formálisan táblázattal, majd példával.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

esik	fúj a szél	esik **vagy** fúj	**nem igaz**, hogy esik **vagy** fúj	nem esik	nem fú	nem esik és nem fú
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

„Esik az eső vagy fúj a szél” tagadása:
Nem esik és nem fúj.

„$ABC_{\triangle}$ derékszögű vagy egyenlőszárú” tagadása:
Nem derékszögű és nem egyenlő szárú.
Rajzoljunk ilyen háromszöget

2) Az implikáció – avagy a matematikai „ígéret”. *„Ha te háromszög leszel, akkor körbeírható leszel”*

a) Bevezetés
„Ha esik az eső, akkor vizes az Andrássy út”
De mi van akkor, ha nem esik?
Ha $10|a \rightarrow 5|a$
De mi van akkor, ha $10 \nmid a$?

„Ha esik az eső, akkor meglátogatlak”

Ha esik, akkor egyértelműn eldönthető az implikáció, a „feltételes állítás” igazságtartalma. De mi van akkor, ha nem esik?

Az implikációt, a „feltételes állítást” felfoghatjuk úgy, mint egy „ígéretet”.
Mikor tartom be és mikor nem tartom be az ígéretem, vagyis mikor igaz és mikor hamis az ígéret - mikor igaz, és mikor hamis az implikáció?

szmg.hu

esik	látogatok	Ha esik akkor látogatok $E \rightarrow L$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	
hamis	hamis	

Hogy töltsük ki a táblázat hiányzó celláit?
Tudjuk, hogy egy állítás tagadásának tagadása az állítás.
Tagadjuk az állításunkat, az „ígéretet”, vagyis mikor nem váltjuk be az ígéretet?
Akkor, ha: Esik és nem látogatok.

Majd végül tagadjuk a tagadást: $\neg(\neg(p \rightarrow q)) = p \rightarrow q$
vagyis írjuk fel az implikációt!

Táblázatban:

Esik	Látogatok	Tagadás: $E \wedge \neg L$	Tagadás tagadása: $E \rightarrow L$
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

Kissé fájdalmas, hiszen ha azt mondjuk hogy „Ha esik, akkor meglátogatlak” állítás igaz abban az esetben, amikor nem esik dél, és akár látogatok, akár nem.

De a „Ha esik, akkor meglátogatlak” ígéretet csak akkor nem tartom be, vagyis csak akkor nem igaz, ha esik ugyan, de mégsem látogatlak meg.

Fogalmazzunk meg néhány implikációt és tagadjuk.
Ha Béla siet, akkor odaér.

Ha kopogok, akkor beengedsz.

szmg.hu

b) Az implikáció és tagadásának igazságtáblázata

Ha p akkor q tagadása p és nem q.

$p \rightarrow q$ tagadása $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$

p	**q**	**Az implikáció tagadása $\neg (p \rightarrow q)$ vagyis $p \wedge \neg q$**	**A tagadás tagadása $\neg (p \wedge \neg q)$ vagyis $p \rightarrow q$**
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

c) A szükséges és elégséges feltétel

Az implikáció előtagja a „feltétel” v. „premissza”, az utótagja a „következmény” vagy „konklúzió”.

Az implikáció **utó–** és **előtag**ja – a „szükséges” és az „elégséges” föltétel.

A feltétel igaz volta elégséges a következményhez, a következmény megléte szükséges ahhoz, hogy a feltétel igaz legyen.

Néhány példa

- Ha egy négyszög rombusz $\rightarrow$ szemközti oldalai párhuzamosak
  - Az ABCD négyszög „rombusz”-sága elégséges a szemközti oldalak párhuzamosságához.
  - De nem szükséges, hiszen elegendő lenne, ha az ABCD csak paralelogramma.
  - A szemközti oldalak párhuzamossága szükséges feltétele ahhoz, hogy az ABCD négyszög rombusz legyen, de nem elegendő.

- Ha esik az eső, akkor vizes a Villányi út.
  - A vizes Villányi út szükséges föltétele az esőnek: mert ha nem igaz, hogy vizes, akkor nem esik.
  - A vizes út nem elegendő feltétele az esőnek: mert lehet úgy is vizes, hogy nem esik: locsoló-autó (vagy egy kóbor kutya ☺)
  - Az eső elégséges feltétele az vizességnek: mert ha esik, akkor mindenképp vizes az út.
  - Az eső nem szükséges feltétele az vizességnek: mert akkor is lehet vizes, ha nem esik: locsolóautó v. a kutya…

szmg.hu

- 6-tal való oszthatóság: $6|a$
  Ennek *szükséges,* de nem elégséges föltétele: $2|a$.
  Ugyanis: $6|a \Rightarrow 2|a$ de $2|a \not\Rightarrow 6|a$ És ha $2 \nmid a \Rightarrow 6 \nmid a$.
  Tehát a 6-tal oszthatósághoz szükséges a 2-vel való oszthatóság.

  A 6-tal való oszthatóság *elégséges,* de nem szükséges föltétele pl.:
  $12|a$ ugyanis: $12|a \Rightarrow 6|a$ de $6|a \not\Rightarrow 12|a$
  És ha $12 \nmid a$ akkor abból nem következik, hogy $6 \nmid a$
  Jellel: $12 \nmid a \not\Rightarrow 6 \nmid a$

  Szükséges és elégséges föltétel: $(2|a \wedge 3|a) \Leftrightarrow 6|a$

d) Gyakorlása

Ha $ABC_{\triangle}$ egyenlő oldalú, akkor egyenlőszárú.
egyenlőoldalú $\Rightarrow$ egyenlőszár
egyenlőszárú $\not\Rightarrow$ egyenlőoldalú

Az „……ság” elégséges föltétele az „……ságnak”.

Az „……ság” szükséges föltétele az „……ságnak”.

Ahol van élet, akkor ott van levegő.

Az élet …… föltétele a levegőnek.

A levegő …… föltétele az életnek.

Ha egy négyszög téglalap, akkor az átlói felezik egymást.

A(z) …… elégséges föltétele

annak, hogy a(z) ……

A(z) ……szükséges föltétele

annak, hogy a(z) ……

Akkor esik az eső, ha van felhő az égen.

A(z) …… szükséges föltétele

annak, hogy a(z) ……

A(z) ……elégséges föltétele

annak, hogy a(z) ……

szmg.hu

Ha egy alakzat háromszög, akkor körbeírható.

A(z) …… elégséges föltétele

annak, hogy a(z) ……

A(z) …… szükséges föltétele

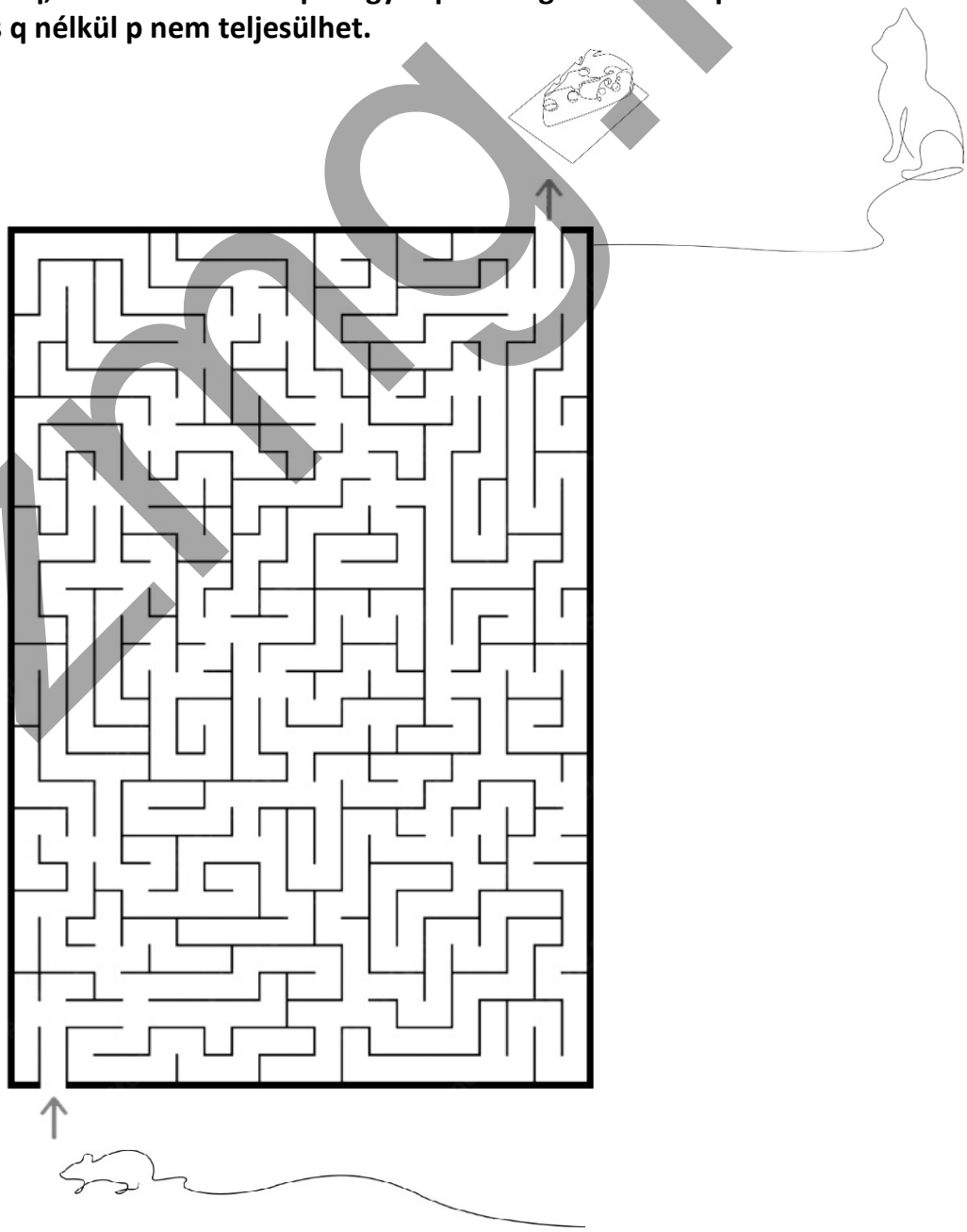
annak, hogy a(z) ……

e) Összesítve:

A következmény …… föltétele a feltételnek.

A feltétel …… föltétele a következménynek.

***p→q* : Ha p, akkor q, tehát p bekövetkezte elegendő q bekövetkeztéhez.**
Ha nem q, akkor biztos nem p: vagyis q szükséges föltétele p-nek.
Vagyis q nélkül p nem teljesülhet.



szmg.hu

Halmazelmélet - Alapozás

I. Definíció, jelek, halmazok megadása

1) Fogalomalkotás a halmazokról

a) Példák

Legyen az iskola az I halmaz, melynek elemei az osztályok.

9.a $\in$ I, 7.a$\in$ I.

Ugyanakkor ebben az esetben:

Tornaterem $\notin$ I, vagy, Igazgató $\notin$ I, ami nem meglepő, de:

Kovács Petike (7.a) $\notin$ I – mert ő nem osztály…

A 10 osztóinak halmaza:

Felsorolással megadva: H={1; –1; 2; –2; 5; –5; 10; –10}

Utasítással: $H = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \begin{matrix} x \\ \hline 10 \end{matrix} \right\}$ }

Okos tanulók halmaza:

Gondban vagyunk, mert nem tudjuk néhány tanulóról eldönteni egyértelműen, hogy okos-e vagy sem. Tehát ilyen halmaz nem létezik.

Azt nem hívhatjuk halmaznak, ha van olyan dolog, amelyről nem dönthető el egyértelműn, hogy hozzátartozik, vagy sem.

b) A halmaz alapfogalom

A halmaz alapfogalom, nincs definíciója. Nincs hova visszavezetni, egyszerűbb fogalmakra.

c) Halmaz megadása

Valami akkor halmaz, ha bármiről el tudom dönteni, hogy eleme-e annak, vagy sem.
Megadható elemek felsorolásával – de ha túl sok az elem, netán ∞ sok, az gond.
Vagy egyértelmű utasítás
Pl.: 2-re végződő természetes számok:

K={2; 12; 22; 32; …}

K={n$\in$ **N**| 10|n-2}

Az utóbbi módszer a „Definíciók elve”: Genus proximum, differentia specifica.
Pl.: „A ló egy olyan állat, melynek négy lába van és nyerít”.
L={x$\in$ Állatok| x-nek négy lába van, és nyerít}

Téglalap: olyan négyszög, mely szögei egyenlők.

Írjuk fel a 100-nál kisebb négyzetszámok halmazát!

Megállapodás: minden elemet csak egyszer számítunk be.
Vagyis: 2022 számjegyeinek halmaza: {0;2}. Más kérdés, hogy a 2-est többször használom fel, de a halmaz akkor is csak 2 elemű.

Írd föl a MATEMATIKA szó betűinek halmazát: H={

szmg.hu

d) Halmaz halmazokból

Halmazokat elemként tartalmazó halmazok.

Korábban már láttuk: Iskola, elemei osztályok; osztálynak elemei tanulók. Ez esetben a tanuló nem eleme az iskolának.

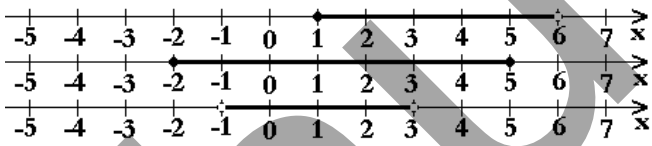
Autóbolt elemei: autók. Autók elemei: kerék, kormány, motor stb.

e) Intervallumok illetve geometriai halmazok

Intervallumok: Valós számok folytonos halmazát intervallumnak szoktuk nevezni. Ezeket számegyenesen is tudjuk jelezni.

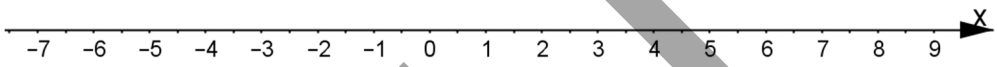
$[a;b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$

Írjuk fel a három intervallumot!



Ábrázold a következő intervallumokat:

A=[–7;–4] B=]–2;2] C=[6;∞[



Így mondjuk: „egy-hat balról zárt jobbról nyílt intervallum” „mínusz egy három nyílt intervallum”

2) Halmazok számossága először (Később: 11. osztály, emelt szintű képzés)

a) Véges halmaz: … hogy egy halmaz véges halmaz, ha elemeinek a számát egy természetes számmal megadhatjuk.

Jelölése: |9.a osztály|=35

$|\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 5\}|=6$

b) Az üres halmaz

Az üres halmaz az a halmaz, melynek nem létezik eleme (számossága 0).

Jele: ∅ v. { }

|∅|=0 (Vagyis az üres halmaz elemeinek a száma, „számossága” egyenlő 0)

Pl: $\{x \in \mathbf{N} \mid x < x\} = \emptyset$

Figyelem

{0}≠∅, mert van már egy eleme: a 0 (ami azonban véletlenül sem üres halmaz).

{∅}≠∅, mert ez szintén egy egyelemű halmaz. Eleme az üres halmaz.

Szemléltetve: egy üres doboz eleme {∅}-nak!

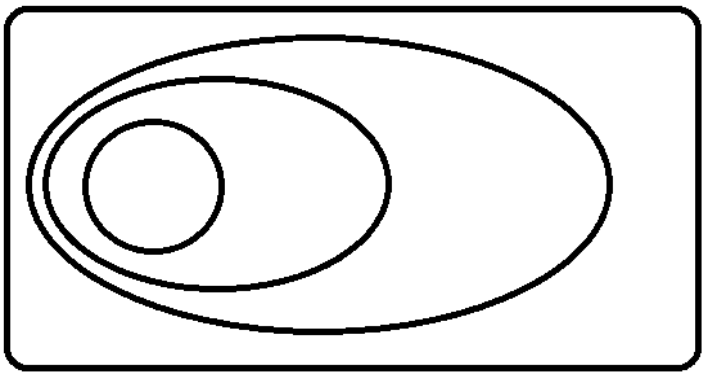
Egyetlen egy üres halmaz létezik a világon.

3) Halmazok ábrázolása - Venn-diagrammal

Pl.: A számok:

R; **Q**, **Q* = R\Q**, **Z**; **N** stb.

Jelöljük, írjunk be számokat!



szmg.hu

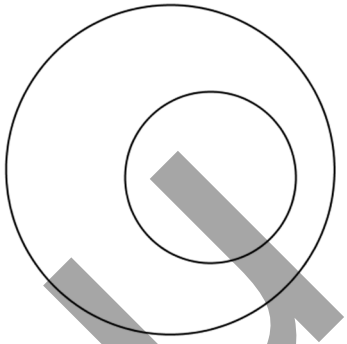
II. Részhalmaz

1) Definíció

… A halmaz része (részhalmaza) B halmaznak, ha A minden eleme eleme B-nek is.
Jelekkel: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

… A halmaz valódi részhalmaza B halmaznak, ha A minden eleme eleme B-nek is – és van olyan eleme B-nek, mely nem eleme A-nak.
Jelekkel: $A \subset B \Leftrightarrow (A \neq B \wedge (\forall x \in A \Rightarrow x \in B))$
Vagyis: $A \subset B \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists x \in B \rightarrow x \notin A))$

Pl.: Prímszámok halmaza $\subset$ Egész számok halmaza



Vigyázat: a rész és elem nem ugyanaz. Ha az osztály elemei a diákok, akkor annak a kékszeműek halmaza nem eleme, csak részhalmaza.

2) Triviális részhalmazok

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza: $\emptyset \subseteq A$ (még akkor is, ha $A=\emptyset$)
$A \subseteq A$ (bármely halmaz részhalmaza önmagának)

3) A „részhalmazság” mint reláció

A relációkról: Geometria 1. munkatankönyv, Vektorok bevezetése

a) Tranzitív reláció: $A \subseteq B$ és $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Biz: $\forall x \in A \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \overset{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$ ✓

Kihagyható rész:
Vigyázat: míg a $\leq$ reláció rendezési reláció volt mondjuk a valós számok testén, addig akad egy kis gond a $\subset$ relációval mondjuk az egész számokból álló halmazok között.
Igaz ugyan a tranzitivitás: $a \leq b$ és $b \leq c \Rightarrow a \leq c$, ugyanígy: $A \subseteq B$ és $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, ugyanakkor: míg az előző reláció a valós számok testének bármely két eleme közt fennáll, addig a $\subseteq$ reláció nem mindig áll fönn két - egész számokból álló - halmaz között.
Így az egész számok köre „rendezett halmaz” a $\leq$ relációra, míg a valós számokból álló halmazok teste csak „részben rendezett halmaz” a $\subseteq$ relációra.

b) Figyelem, a „részhalmazság” reflexív de nem szimmetrikus reláció.

4) Halmaz részhalmazai

Sorold fel (vagyis írd le alájuk) az alábbi halmazok részhalmazait:

A={ } (Egy darab ilyen lesz…)

B={☺} (2 darab ilyen lesz):

C={☺, ◘} (4 darab ilyen lesz…):

D={0; 3; –7} halmaz részhalmazait. (8 db. ilyen lesz…):

szing.hu

Hány részhalmaza van a D={1; ló; ☆, $-\sqrt{2}$ } négyelemű halmaznak?

0 elemű:

1 elemű:

2 elemű:

3 elemű:

4 elemű:

Vegyük észre a kapcsolatot a Pascal háromszöggel!

Vegyük észre, hogy 1 eleműből pont annyi van, mint…

III. Halmazok egyenlősége - a bizonyítások két módszere

1) A két ekvivalens definíció

1. Definíció:

Az A és B halmaz egyenlő, ha A minden eleme eleme B-nek is, és nincs olyan A-beli elem, ami ne lenne B-ben…

Jelekkel: $A = B \Leftrightarrow ((\forall\ x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \notin A \Rightarrow x \notin B))$

2. Definíció: Két halmazt akkor és csak akkor egyenlő, ha egymás részhalmazai.

Jelekkel: $A = B \Leftrightarrow ((\forall\ x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (y \in B \Rightarrow y \in A))$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

Az ekvivalenciát nem bizonyítjuk

2) A két definíció sok esetben: a bizonyítások két módszere

Sok esetben a bizonyítás azt jelenti, hogy megmutatjuk, hogy a két fogalom ugyanazokat a dolgokat fedi.

1. Definícióval: A Thalesz kör mint mértani hely.

$P \in AB_{Thalesz} \Rightarrow PAB\angle = 90°$. (Benne van a 90°-os „látópontok” halmazában.)

$P \notin AB_{Thalesz} \Rightarrow PAB\angle \neq 90°$. (Nincs benne a 90°-os „látópontok” halmazában.)

Vagyis ABThalesz = 90°-os „látópontok” halmaza.

2. Definícióval: A szakaszfelező merőleges, mint mértani hely.

Először megmutattuk: $\forall\ P \in f_{AB}^{\perp} \Rightarrow P \in \{P \in S \mid d(P;A)=d(P;B)\}$

Másodszor megmutattuk: $P \in \{P \in S \mid d(P;A)=d(P;B)\} \Rightarrow P \in f_{AB}^{\perp}$

szmg.hu

3) Állítás: $A \subseteq B \subseteq C \subseteq A \Rightarrow A=B=C$

$A \subseteq B \subseteq C$ miatt: $A \subseteq C$ az előző állítás alapján. Ugyanakkor $C \subseteq A$ is, ezért a fentebbi alapján A=C.

Pl.: Paralelogramma ekvivalens definícióinál:

Átlói felezik egymást $\Rightarrow$ Szemközti oldalak egyenlők $\Rightarrow$ szemközti oldalak párhuzamosak $\Rightarrow$ Átlói felezik egymást.

4) A halmazoknál a „része” reláció:

Reflexív:

Antiszimmetrikus:

Tranzitív:

IV. Halmazok ekvivalenciája és a (többféle-)végtelen számosságú halmazok

1) Két halmaz ekvivalenciájának definíciója

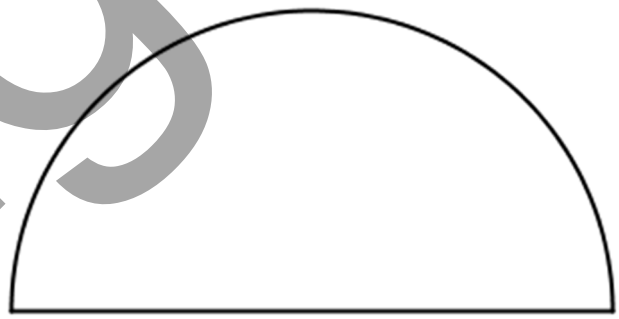
Két halmaz ekvivalens, ha elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Ekkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága megegyezik.

Pl.: {Hüvelykujj; Mutatóujj; Középső ujj} $\Leftrightarrow$ {I; II; III}

Hüvelykujj $\rightarrow$ I ; Mutatóujj $\rightarrow$ II ; Középső $\rightarrow$ III

Teremtsünk ekvivalenciát egy szakasz és egy ráemelt félkör pontjainak halmazai közt.



Tehát a pontjaik számossága megegyezik. (Pedig a körív hosszabb… ☹)

Mutassuk meg, hogy a Természetesek és a Páros természetesek számossága megegyezik, ugyanannyian vannak, vagyis keressünk közöttük ekvivalenciát:

$f(\ ): \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}'$; $n \mapsto$

Ez ekvivalens megfeleltetés:

szmg.hu

2) A számolás alapja

a) Az ekvivalencia alapvetőbb fogalom, mint a számolás

Logikailag hamarabb jön két számosság egyenlősége, mint maga a számolás. Hiszen egy számolni nem tudó is könnyen meg tudja állapítani, hogy egy osztályban fiúból vagy lányból van több, hiszen egyszerűen párba állítja őket, és amelyikből kimarad, abból vannak többen.

Sőt: igazából a számolás is gyakorlatilag ilyen párbaállításon alapul: „gyermekkorunkban" ha volt néhány alma az asztalon, akkor az ujjainkhoz rendeltük őket: ha négy ujjunkhoz, akkor a négy ujjunkat mutattuk.

Sőt, még itt volt egy párbaállítás: ujjak hangképekhez: hüvelykujjhoz: „egy", mutató-ujj: „kettő" stb.

b) Állítsuk párba a természetes számokat és a négyzetszámokat!

c) A végtelen és a véges halmaz

1. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy halmaz végtelen halmaz, ha ekvivalens valamely részhalmazával.

1. Definíció: Egy halmaz végtelen számosságú halmaz, ha elemeinek száma nem adható meg egy természetes számmal.

Véges halmaz az, amely nem végtelen…

Figyelem: sokféle végtelen van!

$|\mathbf{N}|=\infty \neq |[1;5[|=\infty$

Ez a kettő féle végtelen egyáltalán nem egyenlő végtelen. Megmutatható, hogy nem teremthető közöttük ekvivalencia.

Figyelem! A „végtelen" nem egy szám. Gondolj egy végtelen hosszú, egy fasorból álló (egymás mellet álló fák) erdőre. Minden fa olyan magas (méterben), ahányadik sorszámú. Bármilyen magasra fel tudsz mászni? Végtelen magasra fel tudsz mászni?

d) Gondok a végtelen számossággal - Olvasmány

$|\mathbf{N}|\neq|[1;5[|$. Úgyhogy: veszélyes jel a ∞ jel, és még lesz mit rendbe tenni.

Bizonyítható tétel: Egy halmaz számossága végtelen $\Leftrightarrow \exists$ ***valódi*** *részhalmaza, amellyel ekvivalens számosságú (párba-állítható). Ez ellent mond az Arisztotelészi logikának!*

Megszámolni csak végest tudunk, ezért a végtelen valami új gondolatra épül.

szmg.hu

Az alábbi halmazok egyenlő számosságúak.

N={0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7…}

A= {4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11…} (Az első 4 híján a természetesek)

B={0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14…} (Páros természetesek)

C={2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19…} (Prímek)

Z={0; 1; –1; 2; –2; 3; –3; 4…}

Állítsuk párba a természetes számokat és az egész számokat - **N**↔**Z**

Ez a párba állítás nem is olyan nagyon különbözik az ujjainktól. Sőt:
Ha meggondoljuk: az asztalon található 4 alma és a 4 ujjunk, vagy a 4 ujjunk és a „négy” hangkép között talán nagyobb a különbség, mint a **N** és **Z** halmazok között.

És ha azoknál jó volt a párba állítás, akkor itt is jó lesz.
És lám, valóban párba tudjuk állítani a fenti 5 halmazból bármely két halmaz elemeit.

Vegyük észre tehát, hogy a fenti öt halmaz számossága megegyezik, pedig:

A⊂**N**, és **N**⊂**Z** , De: **N** ⊄ A és **Z**⊄**N**

Sok kérdés megválaszolatlan még a jelenlegi tudásunk alapján:
Valóban van-e végtelen halmaz? Csak egyféle végtelen halmaz van, vagy van többféle is? Annyiféle végtelen halmaz van, mint a természetes számok számossága (vagyis megszámlálhatón végtelen), vagy több?

Gondolkodtató:
Van egy végtelen hosszú szálloda, a szobái 0;1;2;3… sorszámúak. Minden szobában lakik valaki. A portásnak egy hangosbemondó-rendszere van, mellyel egyszerre tud minden szobának üzenni.

- Érkezik egy új vendég. Mit üzenjen a portás a szobákba, hogy mindenkit elszállásolhasson?

- Ha 10 új vendég érkezik, akkor mi tegyen?

- Ha egy ugyanilyen szállodát renoválnak, és mindenki átjön ide – akkor mit üzenjen?

- Ha azt tudni, hogy jön egy egymáshoz ragaszkodó csapat, akik egymás mellett akarnak lakni, de nem tudni hányan jönnek, és előre el kell készíteni a helyet, akkor mit üzenjen?

szmg.hu

Számelmélet - Oszthatóság

I. Osztó, oszthatóság

1) Az oszthatóság bevezetése

–3|18, mert van olyan egész, amellyel megszorozva a –3-at 18-at kapunk, ez pedig a –6, vagyis –6·3=18

6∤55, mert nincs olyan egész szám, amivel megszorozva 6-ot 55-öt kapnánk.

6|24, mert…

72|–72

1|19

7|0, mert

0∤7 mert

0|0, mert

Vegyük észre: „oszthatóság” ≠ „osztás”

2) Az oszthatóság definíciója

Legyen $a;b\in\mathbf{Z}$. $a|b \Leftrightarrow \exists q\in\mathbf{Z} \rightarrow q\cdot a=b$.

Szavakkal: „a” osztja „b”-t akkor és csak akkor, ha van olyan egész, amellyel megszorozva „a”-t „b”- kapjuk.

Vigyázat: más az „osztás” és más az „oszthatóság” fogalma.
0-val nem osztunk, de 0|0.

3) Oszthatósági szabályok

2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 8-cal, 9-cel, 10-zel, 11-gyel, 25-tel való oszthatóság szabályai:

2-vel: melyek 2-vel oszthatóra végződnek - 20, 56

3-mal: amely számjegyeinek összege osztható 3-mal - 168.

4-gyel: melynek a két utolsó jegyéből alkotott szám osztható 4-gyel - 504, 5700, 992.

5-tel: amely 0-ra vagy 5-re végződik (5-tel oszthatóra végződik) – 100, 125

6-tal: amely páros és osztható hárommal (FIGYELEM, EZ „ÖSSZETETT OSZTHATÓSÁGI SZABÁLY!)

8-cal: melynek utolsó három jegyéből alkotott szám osztható nyolccal – 1056, 2600

9-cel: amely számjegyeinek összege osztható 9-cel – 108

10-zel: amelyik 0-ra végződik. (FIGYELEM, EZ „ÖSSZETETT OSZT. SZAB.”!)

11-gyel: melynek páros helyiértéken álló számjegyeinek összegéből kivonva a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegét, 11-gyel osztható számot kapunk (ami lehet nyilván 0 is!) – 2563, 80817

25-tel: melynek a két utolsó jegyéből alkotott szám osztható 25-tel – 300, 575.

szmg.hu

4) Összetett oszthatósági szabályok

Tétel: Ha két relatív prím oszt egy számot, akkor a szorzatuk is osztja. Amennyiben nem relatív prímek, úgy nem biztos az oszthatóság.

Jelekkel: ha ((a;b)=1 és a|c és b|c) $\Rightarrow$ a·b|c

Pl.: 3|36 és 4|36 és (3;4)=1 $\Rightarrow$ 12|36

5|80 és 10|80 $\not\Rightarrow$ 50|80 - tudniillik (5;10)≠1…

Mondjuk ki a 36-tal történő oszthatóság szabályát:

Mondjuk ki a 12-vel történő oszthatóság szabályát:

Mondjuk ki a 24-gyel való oszthatóság szabályát:

Mondjuk ki a 45-gyel való oszthatóság szabályát:

5) Reláció tulajdonságok

a) a|a Ez a tulajdonság a *reflexív* tulajdonsága az oszthatóságnak

Biz: 1·a=a

Def.: Reflexív reláció (kapcsolat)

Az A halmazon értelmezett ~ reláció reflexív, ha bármely a $\in$ A esetén ha a~a.

Ilyen pl.: a valós számokon a = reláció (1,3=1,3) , a ≤ reláció (5≤5).

Halmazokon a $\subseteq$ reláció, ugyanis: H$\subseteq$H

Geometriában az $\cong$. Egy háromszög egybevágó önmagával.

Az egész számokon az „oszthatóság” relációja: 5|5.

Nem ilyen pl: a $\perp$-esség reláció a sík egyeneseinek halmazán: egy egyenes nem merőleges önmagára.

Nem ilyen a < reláció a valós számokon: $\sqrt{3}$ nem kisebb önmagánál…

b) Általában nem szimmetrikus az oszthatóság: a|b $\not\Rightarrow$ b|a

Az oszthatóság a *természetes számok körében* „antiszimmetrikus” tulajdonság.

Természetes számok körében: a|b és b|a $\Rightarrow$ a=b (egyébként a=±b). Ez az oszthatóság - mint reláció - *antiszimmetrikus* tulajdonsága.

Vagyis ha két természetes osztja egymást, akkor egyenlők.

Def.: Antiszimmetrikus reláció

Az A halmazon értelmezett ~ reláció antiszimmetrikus, ha bármely a,b $\in$ A esetén ha a ~b és b~a egyszerre teljesül, akkor a=b

Ilyen pl.: a valós számokon a ≤ reláció.: ha a≤b és b≤a, akkor a=b!

(triviálisan az = reláció is)

Halmazokon a $\subseteq$ kapcsolat: A $\subseteq$ B és B $\subseteq$ A, akkor A=B

szmg.hu

Def.: Szimmetrikus reláció:

Az A halmazon értelmezett ~ reláció szimmetrikus, ha bármely a,b $\in$ A esetén ha a~b, akkor b~a.

Ilyen pl.: a valós számokon az „=” reláció vagy a „reciproka”.

Síkban az egyeneseknél: $\perp$-esség: $e \perp f \Rightarrow f \perp e$

Vagy: t tengelyre vett tükörkép. Ha $A \equiv t(B) \Rightarrow B \equiv t(A)$

c) $a|b$ és $b|c \Rightarrow a|c$ Ez az oszthatóság „*tranzitív*” tulajdonsága.

pl: $7|28$ és $28|84 \Rightarrow 7|84$.

Biz.:

Def.: Tranzitív reláció:

Az A halmazon értelmezett $\sim$ reláció tranzitív, ha bármely a,b,c $\in$ A esetén ha $a \sim b$ és $b \sim c$ egyszerre teljesül, akkor $a \sim c$ is teljesül.

Ilyen pl.: a valós számokon az „=” reláció, a $\leq$ reláció

Ha $a=b$ és $b=c$, akkor $a \leq c$

Ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$

Egészeknél: $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.

Geometriában az egybevágóság.

$ABC_{\triangle} \cong A'B'C'_{\triangle}$ és $A'B'C'_{\triangle} \cong A''B''C''_{\triangle} \Rightarrow ABC_{\triangle} \cong A''B''C''_{\triangle}$

Halmazoknál a $\subseteq$.

N (természetesek) $\subseteq$ **Z** és **Z** $\subseteq$ **R** akkor: **N** $\subseteq$ **R**.

Nem ilyen pl: a $\perp$-esség reláció a sík egyeneseinek halmazán.

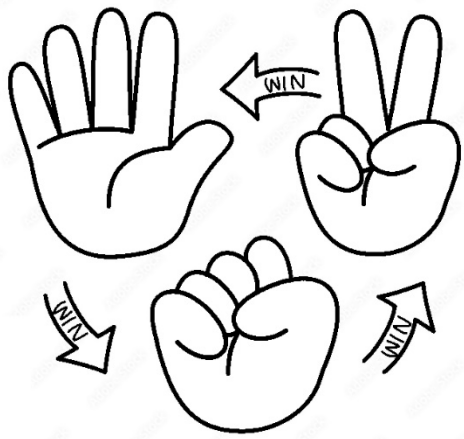
Vagy a „kő, papír, olló” játéknál az erősebb reláció.

6) Egyéb tulajdonságok

a) $a|b$ és $c|d \Rightarrow ac|bd$ Vagyis „az osztók szorzata osztja az oszthatók szorzatát”

Pl: $8|16$ és $5|15 \Rightarrow 8 \cdot 5|16 \cdot 15$.

Biz:



szmg.hu

b) A lineáris kombináció (Lineáris kombinációt a vektoroknál láttunk!)

$a|b$ és $a|c \Rightarrow a|(k\cdot b + n\cdot c)$ ahol k és n egész.

Szavakkal: „az osztó osztja az általa oszthatók lineáris kombinációját is”

Például:

7|14 és 7|35 $\Rightarrow$ 7|20·14–3·35=280–105-t: 175 is.

12|24 és 12|84 $\Rightarrow$ 12|5·24 + 3·84 =120+252-t: 372-t is

13|260 és 13|13 $\Rightarrow$ 13|10·260 + 3·13 =2600+39-et: 2639-t is

Biz:

Mutassuk meg, hogyha $3|7n^3–24n+42$, akkor $3|n^3$

c) A lineáris kombináció egy izgalmas alkalmazása:

Nézzük a 24-et és a 35-öt:

11·35–16·24 = 1.

Ez azt jelenti, hogy ha volna egy olyan *a* szám, amire: a|24 és a|35,

akkor $a|11\cdot35–16\cdot24=1$ vagyis $a|1$

De hát szám csak egy van: a=1.

Vagyis: 24-nek és 35-nek az 1-en kívül nincs közös osztója. Vagyis *„relatív prímek”*. Ezt most úgy találtuk ki, hogy nem bontottuk prímtényezőkre!!!!

Következmény: ha $\exists\, x_0;y_0 \in Z \rightarrow x_0\cdot a+y_0\cdot b=1 \Rightarrow (a;b)=1$.

Vagyis ha két számnak van olyan lineáris kombinációja, amelynek az eredménye 1, akkor az a két szám relatív prím. Pl. az előbbi 24 és 35.

Hiszen a (d|a és d|b) $\Rightarrow$d| $x_0\cdot a+y_0\cdot b=1$ De ekkor d csakis 1 lehet…

Nagyon fontos kérdés lesz: ha $(a;b)=1$, abból következik-e, hogy $\exists$ ilyen $x_0;y_0$.

$(7^{100}; 7^{100}+1)=?$

$(7^{100}; 7^{100}+5)=?$

$(7^{100}; 4\cdot7^{100}+12)=?$

$(120^{100}; 5\cdot120^{100}+168)=?$

szmg.hu

A lineáris kombináció segítségével könnyen meg tudunk vizsgálni oszthatóságokat
Pl.: $7|1512$?

Állítás: ha $a|b \wedge a\nmid c \Rightarrow a\nmid (b\pm c)$.

Például: ha egy 7-tel oszthatóhoz 7-tel nem oszthatót adunk, akkor…

Konkrét példán: $7|1512$ és $7\nmid 100 \Rightarrow 7\nmid 1612$

Fordítva érdekesebb: Igaz-e, hogy $7|2021$? Ehhez nem kell osztanunk!

Az állítás bizonyítása:

Vigyázat: két 12-vel nem osztható szám összegét-különbségét, szorzatát simán oszthatja a 12.

Pl.:

d) Egység, valódi és nem valódi osztók.

$a|1 \Rightarrow a=\pm 1$

Az egységet csak egység osztja.

(Vigyázat, oszthatóságnál a –1 is „egység” mert mindent oszt!)

Már láttuk: $a|b$ és $b|a \Rightarrow a=\pm b$

Valódi, nem valódi osztók – legjobb csak a természeteseknél figyelni…

Egy szám nem valódi osztói: az egység és önmaga. Ők a „triviális osztók”.

A többi valódi – „valódi osztók”.s

24 valódi pozitív osztói:

24 nem valódi pozitív osztói:

Add meg a 36 valódi pozitív osztóit:

szimg.hu

7) Példák a tulajdonságok alapján

a) Igaz-e: $6|(a+b) \Leftrightarrow (6|a \wedge 6|b)$

b) Állítás: $15|2a$ akkor $15|6a–45$

c) Állítás: $17|3a+b$ akkor $17|37a–16b$

Biz.: $A:=3a+b$ és $B:=37a–16b$
Ha B-hez 17-tel oszthatókat adva bizonyíthatón 17-tel oszthatók kapok, akkor…

Valójában a cél az volt, hogy el kellett tüntetni…

Sőt, ekkor látszik, ha a végeredmény 17-tel nem egyértelműn osztható, akkor…

Nyilván, ha a 3a+b-hez úgy tudok 17-tel osztható dolgokat adni és levonni, hogy 37a–16b- kapjak, akkor is igaz az állítás.

De a legjobb módszer a következő:
Ha az A=3a+b és a B=37a–16b-nek csinálok egy olyan jó lineáris kombinációját, (és a lináris kombinációban a B=(37a–16b) együtthatója relatív prím a 17-tel) ahol eltűnik az „a”, akkor borzasztó egyszerű: ha 17 osztja a lineáris kombinációt, akkor a 37a–16b is osztható volt 17-tel, egyébként nem.

Egy jó lineáris kombináció: $37(3a+b)–3(37a–16b)= 37b+48b= 85b$. És $17|85b$ ✓

Mert ekkor: $37(3a+b)– 85b = 3(37a–16b)$. És mivel a 17 osztja a bal oldalt, és a jobb oldalnál (17;3) (az együttható a 3) relatív prím, ezért $17|(37a–16b)$
(17 azért osztja a bal oldalt, mert osztja a 3a+b-t (ez volt a föltétel) és a 85-öt is.)

szmg.hu

d) * Bizonyítsuk be, hogyha $13|(2a+b) \Rightarrow 13|\ 17a^2+4ab-6a+b^2-16b$.

e) Áll.: $11 \,\Big|\, \overline{aabb}$

Namármost, érdemes tudni, hogy az 1001 éjszaka meséinek száma, az $1001=7\cdot11\cdot13$.

A 168 óra pedig egy hét: $7\cdot24$ óra.

A 2021 prímfelbontása pedig: $43\cdot47$ $2022=2\cdot3\cdot337$; $2023=7\cdot17^2$

f) Állítás: $7|(2a-4b)=B \Rightarrow 7|10a+b+42=A$

II. A teljes hatványok, a Pascal Δ, nevezetes szorzattá-alakítások (ismétlés…)

Hasznos segítség: *symbolab.com* és *wolframalpha.com*

1) Teljes köb

Végezd el az alábbi műveleteket, két lépésben, zárójelfelbontással!

$(a+b)^3=$

$(a-b)^3=$

$(x+2)^3=$

$(x-1)^3=$

$(3x+2)^3=$

$(2x-3)^3=$

szmg.hu

2) Másod - harmad - negyed fok, stb.

a) A Pascal-háromszög: Teljes négyzet, teljes köb stb.

Fontos: az „első sor” a 0. sor – $(a+b)^0=1$

1. sor: $(a+b)^1 = 1a+1b$

2. sor: $(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$

3. sor: $(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

4. sor: $(a+b)^3 = 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$

0 0 1 0 0

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Vegyük észre:

- a tagok fokszáma (a két tényező fokszámának összege) mindig a hatványozás fokszámával egyenlő
- illetve a tagokban a tényezők fokszáma: az egyiké a hatványozás fokszámától csökken egyesével a 0-ig, a másiké a 0-tól nő egyesével a hatványozás fokáig.
- $(a–b)^n$ esetén az $(a+(–b))^n$-t figyelve amikor a (–b) kitevője páratlan (1, 3, 5 stb), akkor negatív lesz az együttható:

  $(a–b)^5=a^5–5a^4b+10a^3b^2–10a^2b^3+5ab^4–b^5$

b) A Teljes hatványozás gyakorlása a Pascal-háromszöggel (*symbolab.com*)

$(a–b)^3=$ $(a–b)^4=$

$(a–b)^6=$

$(a+2)^3=$ $(2x–1)^4=$

$(5a–3)^3=$ $(2a–3b)^3=$

$(3a–5)^4=$

$(2x+3)^5=$

3) Azonos kitevőjű hatványok különbsége

a) $a^n–b^n=(a–b)(a^{n–1}+a^{n–2}b^1+ a^{n–3}b^2+…+ a^{n–k}b^{k–1}+…+ ab^{n–2}+b^{n–1})$

Vedd észre: a hosszú tényezőben a kitevők összeg mindig:
Az „a” kitevője egyesével …… 0-ig, a „b” kitevője egyesével …… 0-tól.

Ellenőrzésképp bonts fel a zárójelet:

$a^2–b^2=(a–b)(a+b)=$

$a^3–b^3=(a–b)(a^2+ab+b^2)=$

$a^4–b^4=(a–b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$

szmg.hu

b) Alakítsd szorzattá!

$a^3-1=$

$x^4-1=$

Figyelem: „In medio stat virtus” $x^4-1=$

$x^7-128=$

$243x^5 - 32 =$

4) Azonos páratlan kitevőjű hatványok összege: $a^{2k+1}+b^{2k+1}= (a+b)(\ldots)$

a) $a^{2k+1} + b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b^1+ a^{2k-2}b^2- a^{2k-3}b^3+ -\ldots \ldots + a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k})$

Ellenőrzésképp bonts fel a zárójelet:
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=$

Rögtön egy „gyakorlati” haszon – mutasd meg, hogy $\nexists\, n\in \mathbf{N} \rightarrow n^3+8=$prím.

b) Alakítsd szorzattá!

$a^3 + 1=$

$x^5 + 32=$

$8x^3+27=$

5) Három v. több tag összegének négyzete, illetve két nehezebb szorzattá alakítás

a) Több tag összegének négyzete
$(a+b+c)^2= a^2+ b^2+ c^2+2ab+2bc+2ca$
Minden tag négyzete, majd mindegyik mindegyikkel és még kettővel megszorozva.
$(a+b+c+d)^2= a^2+ b^2+ c^2+ d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$
Minden tag négyzete, majd mindegyik mindegyikkel és még kettővel megszorozva.
Végezd el:

$(x^2+3x-5)^2=$

b) Egyéb, ravaszabb szorzattá alakítások

$a^4+4=$

$a^4+4b^4=$

$a^4+a^2+1=$

szmg.hu

Ötlet: $a^4+a^2+1=\frac{a^6-1}{a^2-1}=$

6) A hatványozás és szorzattá-alakítás gyakorlása

$(2x^2-3)(5x^2+2)=$

$(x^3-1)(8x^3+1)=$

$(3x-1)^3=$

$(2x-5)^3=$

$(x^3-3)(x^2+5)=$

$(5x+3y-4)(5x+3y+4)=$

$(2x+1)(x-3)(2x-1)(x+3)=$

$(3x-2y)^3=$

$(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)=$

$x^2-y^2=$

$x^3-y^3=$

$x^3-1=$

$x^3-27=$

$x^4-625=$

$x^5-2^5=$

$125x^3-27=$

$32x^5-1=$

$64x^6-729=$

$x^4+y^4=$ nincs szokásos

$x^5+y^5=$

$32x^5+3125=$

$2x^3+54=$

$2ax+5y+10x+ay=$

$ab+3b-2a-6=$

$15ax-10ay+6bx-4by=$

$-88x+16x^2+121=$

szmg.hu

$3a+a^2-6ab-2a^2b=$

$8x^3+27=$

$3x^6-48x^2=$

$5x^6-40x^4+80x^2=$

$4x^4-13x^2-12=$

$x^3+x^2+x+1=$

$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=$

$9x^2-30x+25=$

$x^6-16x^3+64=$

$6a^4-9a^3+3a^2=$

$20bx^2+a^2-4x^2-5a^2b=$

$3x^4+12x^3+12x^2=$

$x^2-y-x-y^2=$

$6x^2-x-15=$

$4x^5+32x^2-8-x^3=$

$8x^{10}-8x^4+x^7-x=$

$1-x^{12}=$

$8x^3-12x^2+6x-1=$

$x^5-x^3+x^2-1=$

szmg.hu

$9a^2–25–24ab+16b^2=$

$3x^6–75x^4+3x^3–75x=$

$x^4+2x^2–24=$

$27x^4+x=$

$x^{15}+1=$

$4x^4 –101x^2+25=$

$2x^3–15–10x^2+3x=$

$9x^5–4x^3+72x^2–32=$

$8x^3–12x^2+6x–1=$

$8x^5–32x^3+x^2–4=$

$4x^4–37x^2+9=$

$15x^2+11x–12=$

$8a^3–36a^2+54a–27=$

$a^4+2a^3–a^2–2a=$

$6x^2+11x–10=$

$x^5+ x^4+x^3+2x^2+2x+2=$

$x^5+2x^4+x^3–x^2–2x–1=$

$x^5–5x^4+6x^3–x^2+5x–6=$

szmg.hu

7) Emlékeztető két nagyon fontos ismeretre

a) Relatív prímekkel való oszthatóság:

Ha $a|c \wedge b|c \wedge (a;b)=1 \Rightarrow ab|c$. Egyébként a következés nem biztos.
Ha két relatív prím oszt egy számot, akkor a szorzatuk is osztja.

Pl: $3\left|7752 \wedge 4\right|7752 \overset{(3;4)=1}{\Rightarrow} 12\left|7752\right.$

Pl.: összetett oszthatósági szabályoknál: 6-tal, vagy 22-vel, vagy 12-vel vagy 45-tel való oszthatósági szabály.

b) Egymást követő számok

Állítás: 5 egymást követő szám közt van 5-tel osztható.

Állítás: n db. egymást követő szám közt van n-nel osztható

Melyik az a legnagyobb természetes, amely biztosan osztja: n^3-n-t ($n \in \mathbf{N}$)

8) A szorzattá alakítás – jegyezzük meg – a számelmélet egyik legerősebb eszköze
A számelméleti, oszthatósági feladatoknál nagyon sokat segít a szorzattá alakítás.

a) Adjunk meg minél több osztóját a $7^{28}-3^{28}$-nak!

szmg.hu

b) Keressünk az $A=2^{30}+1$-hez osztókat.

Vegyük észre: $a^{pt}+1$-ből kiemelhető $a+1$, vagyis nem prím.

Olyan Fermat-számok, amelyek prímek; tehát $F_n=2^{2^n}+1$ alakú prímszámok. Öt ismert: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$

De sajnos: $641 \mid 2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297$

Sőt: lehet, hogy nincs is több ilyen prím.

c) * Keress a 61^4+4-hez osztót!

d) Alappélda: Állítás: $8 \mid 3^{200}+7$ (Jobbaknak-vagy-gyöngébbeknek: $8 \mid 3^{2n}+7$)

e) Állítás: ha $7 \nmid a \Rightarrow$ a következő számok közt van 7-tel osztható: a^2-2; a^2-1; a^2+3;

Alapötlet:

f) Állítás: $13 \mid 4^{200}-9^{50}$

szmg.hu

g) Alappélda: Mutasd meg, hogy ha ($k \in \mathbf{N}^+$): $2^k - 1 \Rightarrow$ k=prím

Ez ún. indirekt bizonyítás volt: felteszem, hogy nem igaz az állítás, és ekkor ellentmondásra jutok.
Édesapád – édesanyád szokta használni: „Szülő: Fiam, te egy lusta valami vagy. Gyerek: Drága szülém, bizonyítsd be! Szülő: ha nem volnál lusta, akkor nem buktál volna meg. De megbuktál…”

Vagyis vegyük észre, hogy a $2^k - 1$ csak akkor lehet prím, ha k prím.
A 31 (prím) = 32 – 1 = $2^5 - 1$, és 5 szintén prím, ezért a 31 egy Mersenne-prím;
Hasonlóképp: $2^3 - 1 = 7$. A 7 prím, ezért ő Mersenne-prím.
De sajnos a $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$ nem Mersenne-prím: $2047 = 23 \cdot 89$

9) Szorzattá alakítás, relatív prímek, egymást követő számok

a) Állítás: $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 4 | n^4 - 2n^3 + n^2 = K$

b) Állítás: $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 15 | n^5 - n = N$

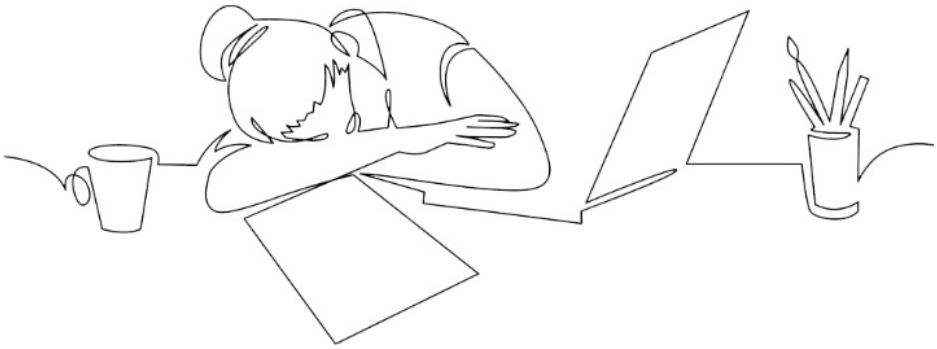
c) Állítás: $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 14 | n^7 - n = A$

szmg.hu

d) Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 6 | n^3+5n$

e) * Milyen $n \in \mathbf{N}$ esetén lesz igaz: $120 | n^6+2n^5 - n^2 - 2n = K$

szmg.hu



III. Számrendszerek

1) Számrendszerek és átírások (ismétlés)

a) Helyiértékek – számok alaki, helyi és valódi értéke – valódi értékek összege

Valódi értéke 0-9-ig van a számoknak.

A 10-es számrendszer helyiértékei pl. 5 jegyű számnál: $\overset{10000}{a}\ \overset{1000}{b}\ \overset{100}{c}\ \overset{10}{d}\ \overset{1}{e}$

Az *a* áll a 10 000-ek (tízezresek helyén) a *b* az 1000-ek (ezresek helyén) stb.

A tízes számrendszerben a helyiértékek a következők:

10^n, 10^{n-1}, … 10^3; 10^2; 10^1; 10^0.

Nézzük a 60 315-öt:

Ebben a számban tehát a 6 alaki értéke 6, de a 10000-esek helyén áll, vagyis a helyi értéke 10 000, így valójában a „Valódi értéke”: 60000.

A 3 a százasok helyén áll, alaki értéke 3, de a százasok helyén áll, ezért a helyiértéke száz, így a valódi értéke: 300.

Szám valódi értéke: alaki érték · helyiérték

Így tevődik össze az eredeti szám: a valódi értékek összegeként.

Pl: 60315= $\overset{10^4}{6}\ \overset{10^3}{0}\ \overset{10^2}{3}\ \overset{10^1}{1}\ \overset{10^0}{5}$ $=6\cdot10^4+0\cdot10^3+3\cdot10^2+1\cdot10^1+5\cdot10^0=$

$=6\cdot10000+0\cdot1000+3\cdot100+1\cdot10+5\cdot1=60315$

b) Egyéb számrendszerben a helyiértékek

Az 5-ös számrendszer helyiértékei egy 6 jegyű számnál:

5^5; 5^4; 5^3; 5^2; 5^1; 5^0 -

vagyis: 3125-ösök, 625-ösök, 125-ösök, 25-ösök, 5-ösök és 1-esek.

Így a 20143_5 számrendszerbeli szám a következőt éri:

$\overset{5^4}{2}\ \overset{5^3}{0}\ \overset{5^2}{1}\ \overset{5^1}{4}\ \overset{5^0}{3}$ $=2\cdot625+0\cdot125+1\cdot25+4\cdot5+3\cdot1=1298_{10}$.

Vegyük észre, hogy 5-ös számjegy nincs (ahogy a 10-es számrendszerben 10-es), mivel ha 5 db. 125-öst vennék, az 1 db 625-ös…)

Emlékezzünk: „5-ös kaszinó”, ahol a zsetonok értéke: 1$, 5$, 25$, 125$, 625$ stb.

Ha beviszem a halom dollárt a kaszinóba, akkor a lehető legkevesebb zsetont akarom a zsebembe zsúfítani:

ezért pl. 677 $ esetében nem 5 db. 125-öst teszek zsebre, és még mást.

Hanem eleve 1 db. 625-ös zsetont, marad még 52 dollár.

Ebből 125-ös zsetont nem tudok venni. Vagyis megvan még az 52 $.

52 $-ból nem 10 db. 5 $-os zsetont veszek, hanem 2 db 25-öst, és még marad 2$.

Ebből nem tudok venni 5 $-os zseton,

de veszek még 2 db 1 $-os zsetont.

Vagyis: $677_{10} = 10202_5$

szmg.hu

c) Átírások

Írjuk át tízes számrendszerbe a 4032_5-öt

Írjuk át hatos számrendszerbe a 1107_{10}-et.
Kétféleképp is lehet – az első módszer az érthetőbb, a másik egy algoritmus, hogy lásd azt is:
1. Mo.:

2. Mo.: A második – algoritmikus – módszer, de könnyebben elfelejthető, mint a Kaszinós módszer.

szmg.hu

Írd át az 101101_2-et 10-es számrendszerbe.

Írd át az 50-et 2-es számrendszerbe.

2) Műveletek számrendszerekben (https://decimal-to-binary.com/sum-of-numbers.html)

a) Mely számrendszerre igaz: $22_x \cdot 114_x = 2552_x$

Mo:
Van néhány segítő megkötés:

b) $771_x = 24_x \cdot 31_x + 5_x$ (24_x-gyel osztva 31_x a hányados és 5 a maradék)

c) $2002_x = 1026$

Mo.: $2x^3+2=1026$
$x^3 = 512$
$x=8$

d) ** $1226_{11}=3101_x$. x=?
(Mo.: (x–8) kiemelhető…

szmg.hu

Számelmélet – LNKO és LKKT

LNKO=Greatest Common Divisor LKKT= Least Common Multiple

I. A számelmélet alaptétele

1) Az egység

Ha egy szám minden számnak osztója, akkor azt a számot *egység*nek nevezzük.
Vegyük észre, hogy az egész számok körében az egység: ± 1.

Érdekesség: nézzük a „páros-országot”, ahol csak páros számok vannak. Aki páratlan számot ír le, annak levágják 2 ujját (kevesebbet nem lehet, mert az páratlan lenne…)
Itt nincs egység, hiszen $2|12$, de $2\nmid 10$. (Miért?)
Sőt, nagyobb disznóság is van még itt. Tudnillik: $2\nmid 2$.

2) A prímek kezdő definíciója, és az összetett számok

Def.: $p\in N\setminus\{0;1\}$. Ekkor *p* prím akkor és csak akkor, ha csak az 1 és önmaga az osztója.

Összetett számok: azok az egynél nagyobb egészek, melyeknek 2-nél több osztójuk van.

3) A számelmélet alaptétele – és a kanonikus alak

Bármely egynél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható fel prímek szorzatára a tényezők sorrendjétől eltekintve (– *bármilyen módon végzem is el a fölbontást).*

Minden 1-nél nagyobb természetes szám egyértelműn felírható:

$n= p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot p_3^{r_3}\cdot p_4^{r_4}\cdot\ldots\cdot p_n^{r_n} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}$ alakban, ahol: az alapok (p_1; … p_n) szigorún monoton növekvő (tehát különböző) sorozatban álló prímek, és $r_i\in N^+$.

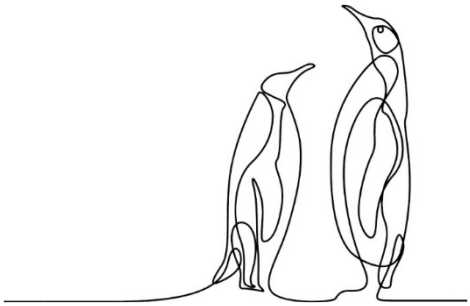
Ezt az előállítás az n szám „**kanonikus alakjának**” nevezzük.

Fordítva: ha két szám kanonikus alakja megegyezik, akkor a két szám megegyezik; és ha két szám kanonikus alakja különböző prímek vannak, vagy legalább egy prím egy hatványkitevőben különbözik a két számban, akkor az a két szám nem lehet egyenlő.

Adjuk meg a 3 240 000 kanonikus alakját!

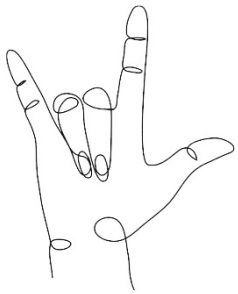
Egyenlő-e: $10^2\cdot 19^4$ és $11^6\cdot 8^5$

illetve $15\cdot 128\cdot 84\cdot 72$ és $20\cdot 28\cdot 27\cdot 24\cdot 32$



szmg.hu

Érdekesség: „páros - ország”: bontsa föl mindenki a 60-at szorzattá addig, amíg lehet.
(Ábra: A fűrésztelep vezetője még öt sört rendel.)



Úgynevezett „felbonthatatlan” számokig jutottunk, de nem úgy tűnnek, mintha prímek lennének…

Vagy pl.: $(2\cdot3\cdot5)\cdot(2\cdot7)=30\cdot14=420$ Ugyanakkor: $(2\cdot3)\cdot(2\cdot5\cdot7)=6\cdot70=420$, sőt: $10\cdot42$ is…

4) Osztók keresése, osztók száma

Keressük ki az 180 osztóit párba állítással!

Tovább nem megyek, vagyis a 14-et már nem vizsgálom meg. Miért?

Mi van, ha összeszorzom az összes osztót? Mennyit kapok????

Lehetne-e ezt általánosítani?

5) Osztók tulajdonságai

a) Keressük ki a 360 osztói a kanonikus alakjából: $360=2^3\cdot3^2\cdot5$

Először kanonikus alakban írjunk le olyan számokat, melyek valamely ok miatt nem lehetnek a 360 osztói. Ne csak egyprímes kanonikus alakot írjunk, és a különböző számok különböző okok miatt ne osszák a 360-at!

szmg.hu

Írjunk most le kanonikus alakban olyan számokat, melyek osztják a 360-at.

b) Mik lehetnek az osztók általában? (A természetes számok körében vagyunk!)

A számelmélet alaptétele miatt: egy N szám osztói azok és csak azok az *m* számok, - vagyis $m|N$ - melyek kanonikus alakjában csak az N szám prímtényezői szerepelnek, és legfeljebb az N-ben szereplő hatványon.

Így a $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$összes osztóját a következőképp lehet „felírni”:

$\mathbf{2^{0-3}\cdot 3^{0-2}\cdot 5^{0-1}}$

c) Írjuk fel a 360 osztóit fa-struktúrával:

d) Az osztók száma

Tétel: Ha egy összetett szám prímtényezős felbontása:
a= $p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot p_3^{r_3}\cdot p_4^{r_4}\cdot\ldots\cdot p_n^{r_n}$, akkor osztóinak száma: $(r_1+1)\cdot(r_2+1)\cdot(r_3+1)\cdot\ldots\cdot(r_n+1)$

Számelméleti függvény:
$d(\ ):N\rightarrow N$; $d(n)=n$ pozitív osztóinak száma.

Adjuk meg a d(98 000)-et, vagyis a 98 000 osztóinak a számát!

6) Osztókkal kapcsolatos gyakorlások

a) Melyik az a legkisebb természetes, melynek 8 db osztója van?

szmg.hu

b) 125! hány 0-ra végződik?

Olvasmány:

Legendre-formula: $e_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$

Vagyis az n! kanonikus alakjában a p prím kitevője az adott summával (a törtek egészrészének összege) egyenlő, illetve azzal a törttel, mely számlálójában n az adott szám, $S_p(n)$ az n szám p alapú számrendszerbeli alakjában a jegyek összege, a nevezőben pedig p-1 áll.

c) Mely számoknak van páratlan osztója?

Osztók párba állításából:

A kanonikus alakkal kiszámolt osztók számából:

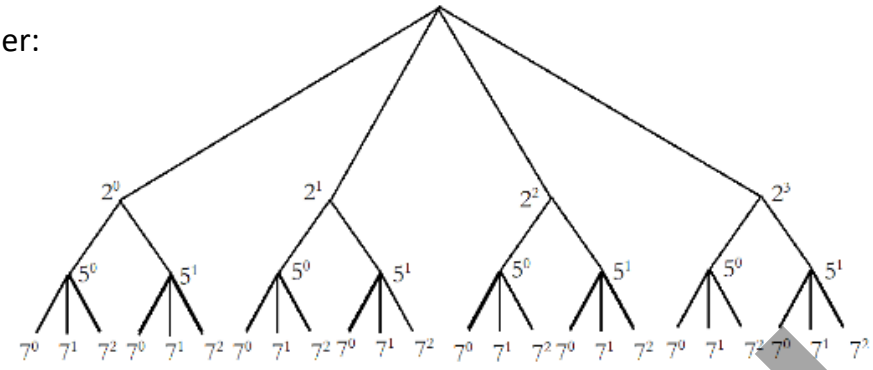
d) Egy számot 3. hatványra emeltem, majd a végeredmény prímtényezőinek a kitevőit összeszoroztam, és 18-at kaptam. Mi lehetett az eredeti szám, ha az a legkisebb.

e) Melyik az a legkisebb szám, amellyel meg kell szorozni a 600-at, hogy teljes négyzet és teljes köb is legyen?

szmg.hu

f) 1960-nak hány olyan osztója van, mely nem osztható 20-szal?

Kőbaltás módszer:



Ötletesen:

7) Oszthatósági szabályok – elemi oszthatóságok

a) 3-mal, 9-cel, 5-tel, 4-gyel, 8-cal stb..

Mondjuk ki a szabályokat!

b) 36|2_70_ (öt jegyű szám). Mit írjunk a vonalak helyére, hogy a szám a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb legyen?

Mo.: Tudjuk? ☺ Nem tudjuk, tehát tudjuk: x és y.

c) Bizonyítsuk be a 4-gyel való oszthatóság szabályát.

szmg.hu

8) Négyzetszámok - köbszámok stb.

a) Tétel: a négyzetszámok osztóinak a száma páratlan (már bizonyítottuk)

b) Tétel: egy szám n-edik hatványának kanonikus alakjában a kitevők:

c) Lehet-e négyzetszám: 125457?

Megtalált szabály:

d) Lehet-e négyzetszám az A= 1 212 612 621?

e) Írjunk fel egy olyan számot, aminek a 20-szorosa négyzetszám is és köbszám is

9) Osztók és a relatív prímek a Számelmélet alaptétele alapján

a) $n=2^5\cdot 3^7\cdot 5^{10}\cdot 11\cdot 13^2$

Igaz-e: $2^3\cdot 7 \mid n$ $\quad$ $b=2^5\cdot 5^3 \mid n$ $\quad$ $c=2^3\cdot 3^9\cdot 5^2$

Igaz-e, hogy az alábbi számok osztják *n*-t?

$a=2^3\cdot 3^5$	$b=2^2\cdot 5^5\cdot 11$	$c= 5^8.$	$d=2^4\cdot 5^8\cdot 11$
$e=3^5\cdot 5^{10}$	$f=2^4\cdot 11$	$g=3^6$	$i=2^3\cdot 5^3\cdot 11\cdot 13$
$k=3^5\cdot 13^2$	$m=\cdot 5^7\cdot 11\cdot 13$	$n=2^5$	$o=3^7\cdot 5^{10}\cdot$

Igaz-e, hogy az előbbiek közül $b\cdot i \mid n$

Nyilván számolni kellett a kitevőket.
Mely számokról lehet *ránézésre tudni*, hogy a szorzatuk biztos osztja az n-t?
Mondj közülük ilye párokat!

Hogy hívjuk ezeket a számpárokat?

szmg.hu

b) A relatív prímek

A számelmélet alaptételéből következik, hogy ha *a* és *b* relatív prímek – vagyis (a;b)=1, – akkor a kanonikus alakjukban nincs közös prím.

Állítás:

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot p_4^{r_4} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ Ekkor ha $a|n$ és $b|n$ esetén akkor mondhatjuk biztosan, hogy $ab|n$, ha nincs közös prímtényezőjük, vagyis relatív prímek!

$10|1050$ és $21|1050 \Rightarrow 210|1050$ mert:

$100|A$ és $101|A \Rightarrow 10100|A$ mert:

Feladat: két természetes szám – *a* és *b* – összege 80, LNKO-juk 4. Mik lehetnek ezek a számok?

Gondold át: $\left(\frac{a}{(a;b)};\frac{b}{(a;b)}\right)=1$

10) Oszthatósági szabályok - összetett oszthatósági szabályok

a) Mondjunk összetett oszthatósági szabályokat: 6-tal, 12-vel, 24-gyel stb.

b) Igaz-e, hogy ami osztható 15-tel és 6-tal, az osztható 6·15-tel, vagyis 90-nel?

c) Oszthatósági szabályok: 45-tel illetve 72-vel való oszthatóság.

d) Mivel való oszthatóságot kell akkor figyelni, ha valamit 360-nal kell tudni osztani?

e) Milyen számjegyet kell x helyére írni, hogy a tört értéke egész legyen: $\frac{53x4}{36}$

Vegyük észre, egyáltalán nem egyértelmű, hogy mindig lehet megoldás…

szmg.hu

II. A lineáris kombináció és az LNKO - (a;b) előállítása x_0a+y_0b alakban

1) LNKO megtalálása a Számelmélet alaptétele felhasználásával

a) Definíciók

Közös osztó: két vagy több szám közös osztója az a szám, mely mindegyiknek osztója.

LNKO: a közös osztók közül a legnagyobb (ha van ilyen).

Triviálisan:	(*a*;0)=	Pl: (12;0)=12
Illetve:	(a;1)=	Pl.: (51;1)=

Kitüntetetett közös osztó: az a közös osztó, melynek minden egyéb közös osztó osztója (ha van ilyen).

„Páros országban" nincs ilyen: (180;300) =30 (ez a legnagyobb), de mondjuk a 6 is közös osztó, csak éppen nem osztja a 30-at.

Bizonyítható hogy az egész számok körében az LNKO egyben Kitüntetett közös osztó is!

b) Az LNKO és a közös osztók megtalálása a Számelmélet alaptétele felhasználásával

(4200;4680)=? Mo.: $4200=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7$; $4680=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot13$

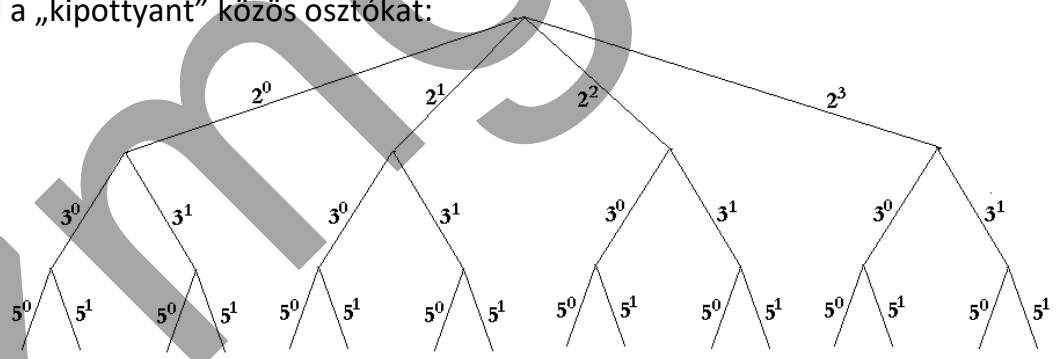
(4200;4680)= $2^3\cdot3\cdot5$ = 120.

Ezt minden közös osztó osztja, hiszen a közös osztókban a kitevők a következők lehetnek: $2^{0-3}\cdot3^{0-1}\cdot5^{0-1}$.

Tehát a közös osztók száma az lnko osztóinak a száma.

Közös osztók: $2^{0-3}\cdot3^{0-1}\cdot5^{0-1}$ vagyis: 16 ilyen van.

Írjuk föl a „kipottyant" közös osztókat:



$d(2^3\cdot3^1\cdot5^1)=(3+1)(1+1)(1+1)=16$ db. osztó.

Megállapíthatjuk: két v. több szám közös osztói az lnko-juk osztói, így a közös osztók száma a lnko osztóinak a száma.

LNKO a számelmélet alaptétele szerint:

Két (vagy több) szám LNKO-ját előállíthatjuk úgy, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Hiszen két vagy több szám közös osztója *csakis olyan szám lehet*, melynek *prímtényezős felbontásában csakis olyan prím szerepel, amelyik mindegyik szám kanonikus alakjában megvan, és csakis olyan hatványon*, amelyik hatvány még mindegyikben szerepel.

szmg.hu

A tétel segítségével belátható, hogy az LNKO egyben kitüntetett közös osztó is, vagyis minden közös osztó osztja.

Vegyük észre, hogy a páros számok körében az lnko nem kitüntetett közös osztó: Pl: (36;24)=6, ugyanakkor pl: 2 közös osztó, de $2 \nmid 6$.

Gondoljuk át: ha két számot leosztok az LNKO-jukkal, mit kapunk?
(Segítség: a közös prímekből kell kiindulni!)

c) Gyakorló-feladatok:

(i) Keressük meg a 45000 és a 3500 összes közös osztóját!

$45000=2^3 5^4 3^3$; $3500=2^2 5^3 7^1$.

(ii) Állíts elő három páronként nem relatív prímet, melyek együtt már relatív prímek!

(iii) Állíts elő három olyan számot, melyeknek az LNKO-ja: 28.

2) Az Euklideszi algoritmus alapja – számok távolsága

a) (14000;14001)=?

Segítség: $14\,000=2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ $14\,001=3 \cdot 13 \cdot 359$

De valójában nincs szükség a prímtényezős fölbontásra!

Ha $d|14000$ és $d|14001$ akkor:

Érdekes észrevétel: két egymást követő szám mindig relatív prím

szmg.hu

b) Számok távolsága és a közös osztók

(i) Adott a 453 025 és a 453 032. Mi lehet az LNKO?

(ii) Adott két szám: A=33 535 800 és a B=33 535 809 Mely számok lehetnek a közös osztóik?

Ha $d|A$ és $d|B \Rightarrow$

Hasonlóképp A=105 091 028 és B=105 091 042 közös osztói:

És mivel: $.....|A \Rightarrow$

(iii) (5053;5051)=?

3) A lineáris kombináció

a) Adott egész szám: a és b. Ekkor egy lineáris kombinációjuk:
x_0a+y_0b, ahol x_0 és y_0 is egész.

Pl.: 42 és 30, ekkor egy lineáris kombinációjuk: $6\cdot42-8\cdot30=12$
Vagyis a 12 előáll a 42 és a 30 egy lineáris kombinációjaként.

Ha $d|42$ és $d|30$, akkor $d|6\cdot42-8\cdot30=12$ Kiírva: $d|12$
Vagyis a 42 és a 30 bármelyik közös osztója osztja a 12-is.
A 12 osztói: 12, 6, 4, 3, 2, 1.
Ezek közül a legnagyobb, ami még osztja a 42-t és a 30-at is: a 6.

Nyilván, ha van az a-nak és a b-nek egy közös osztója: d,
vagyis $d|a$ és $d|b \Rightarrow d \mid x_0a+y_0b$.

szmg.hu

Így például: ha d|2335 és d|1000 (vagyis d egy közös osztó) akkor:
d|2335–2·1000=335.
Tehát a közös osztók a 335 osztói lehetnek csak.

De még jobb:
ha d|2335 és d|1000 (vagyis d egy közös osztó) akkor:
d|3·2335–7·1000=7005–7000=5.
Vagyis ami osztja a 2335-öt és az 1000-et, az osztja az 5-öt is.
Másképp: a közös osztók (így a legnagyobb is): osztja az 5-öt

Márpedig az 5 osztja mindkettőt, ezért az 5 a legnagyobb közös osztó.

Nézzük az 1400-at és a 3501-et.
Ha d|1400 és d|3501-et: akkor d|2·3501–5·1400=7002–7000=2
Vagyis a közös osztók osztják a 2-őt: d|2.
Az ilyen közös osztó csak az 1 és a 2 lehet.
De a 2 nem osztja a 3501-et: ezért a legnagyobb közös osztó az 1, vagyis:
(1400;3501)=1 – relatív prímek.

Nézzük a 242-őt és az 55-öt.
Ha d|242 és d|55-et: akkor d|242–4·55=22
Vagyis a közös osztók osztják a 22-őt: d|22.
Az ilyen közös osztó az 1; 2; és a 11 lehet.
2 nem osztja 55-öt, de a 11 igen és a 242-őt is: vagyis 11 a legnagyobb közös osztó.

b) A lineáris kombináció haszna

Nézzük meg a 175 és a 117 egy lineáris kombinációját: 3·117 – 2·175 =1
Mire következtethetünk?

Vegyük észre: ha $\exists\, x_0;\ y_0 \rightarrow x_0 \cdot a + y_0 \cdot b = 1 \Rightarrow (a;b)=1$

Vagyis ha található olyan lineáris kombináció, amelyre 1 lesz a végeredmény: akkor az a két szám relatív prím.

Pl.: 4·16–7·9= 1. Vagyis: (9;16)=1.

Vigyázat: ha $\exists\, x_0;\ y_0 \rightarrow x_0 \cdot a + y_0 \cdot b = c \not\Rightarrow c$ az lnko. Pl.: (15;42)=3,
és mégis: 6·15–2·42=6, de a 6 nem közös osztó!
Csak annyi biztos, hogy a közös osztó osztani fogja a 6-ot is
hiszen ha d|15 és d|42 ⇒ d |6·15–2·42, vagyis d|6
Lásd korábban: d|a és d|b ⇒ d | x_0a+y_0b.

szmg.hu

c) $(3a\ ;\ 6a+1)=?$

4) A közös osztók „lélekvándorlása” vagyis átadása

a) (273;798)

Ha d|273 és d|798, akkor: d|798-2·273=252, vagyis d|252

Miért a kétszeresét vontam ki a 273-nak, miért nem csak simán: 798–273

Tehát az eredeti két szám bármely közös osztója osztja a 252-őt is.
d|798 és d|273 és d|252.
Vagyis a közös osztók ugyanazok, ezért elég a két kisebb szám közös osztóit (legnagyobb közös osztóját) keresni: (273;252)

Ha d|273 és d|252, akkor: d|273-1·252=21, vagyis d|21

A közös osztók – d – vándorolnak tehát egyre kisebb számokba.
d|798 és d|273 és d|252 és d|21.
Vagyis a közös osztók ugyanazok, ezért elég a két kisebb szám közös osztóit (legnagyobb közös osztóját) keresni: (252;21)
Ha d|252 és d|21, akkor: d|252-12·21=0, vagyis d|0 de valójában ez azt jelenti, hogy 21|252-őt.
Így a (273;798)=(252;21)=21

b) Jelekkel:

d|a és d|b $\Rightarrow$ d|b és d|(a–k·b)
d|b és d|(a–k·b) $\Rightarrow$ d|a és d|b (hiszen a=a–kb+kb)

VAGYIS: a és b közös osztói ugyanazok, mint b és a–kb közös osztói – sőt akkor a legnagyobb közös osztó is ugyanaz.

Nyilván úgy érdemes csinálni a dolgot, hogy a lineáris kombináció eredménye mindkét számnál kisebb legyen…

Vegyük észre, hogy az első sorban az „a–k·b” helyett írhattuk volna lineáris kombinációjukat is, és az néha nagyon mohón kicsi szám lesz.

szmg.hu

5) Hasznuk algebrai törtek egyszerűsíthetőségénél

a) Mely a-ra lehet egyszerűsíteni: a $\frac{2a+1}{5a+6}$ törtet?

Mo: A feladat majdnem a $(2a+1;5a+6)$ megtalálásával egyenrangú

$(2a+1;5a+6)$ közös osztói a $(2a+1;a+4)$ közös osztói
(Kivontam 5a+6-ból a 2a+1 kétszeresét: 5a+6 – 2(2a+1)=a+4)

$(2a+1;a+4)$ közös osztói a $(-7;a+4)$ közös osztói:
Hiszen: $d|2a+1$ és $d|a+4 \Rightarrow d|(2a+1)-2(a+4)=-7$

Vagyis a két kifejezés közös osztója csakis a 7 lehet, vagy a 7-nek osztói.

Akkor lesz a 7 az LNKO, ha $a+4=k\cdot 7$, vagyis: $a=7k-4$ alakú.
pl: $a=7\cdot 3-4=17$.

Nézzük meg: $\frac{2\cdot 17+1}{5\cdot 17+6}=\frac{35}{91}$ És ez valóban egyszerűsíthető 7-tel!

b) Mennyi lehet a $(5b-3;7b+1)$, illetve hogyan lehet egyszerűsíteni: $\frac{7b+1}{5b-3}$ -t

Mo.: A feladat majdnem a $(2b+1;5b-3)$ megtalálásával egyenrangú

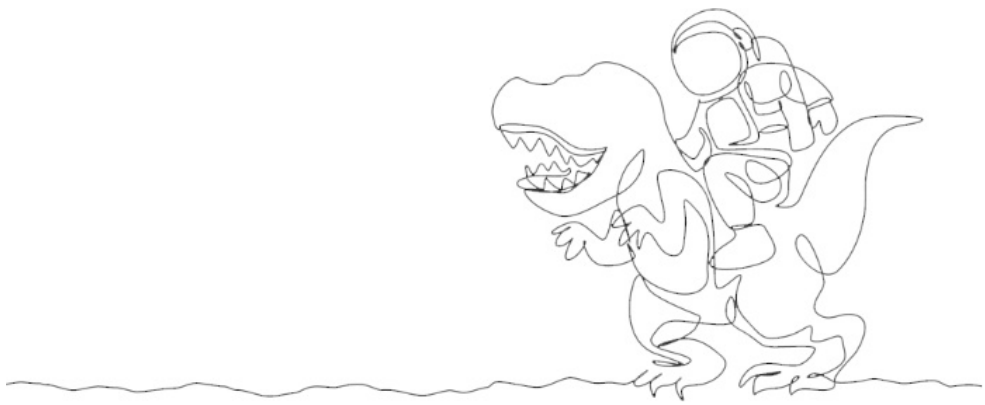
c) Határozd meg (a;a+6) lehetséges értékeit

szmg.hu

d) Áll.: $(7^a-2;7^a+2)=1$

e) Áll.: $(a;b)=1 \Rightarrow (11a+2b;18a+5b)=19$ v. 1.

f) Mutassuk meg, ha $37 \mid \overline{abc}$ akkor $37 \mid \overline{bca}$ és $37 \mid \overline{cab}$.



szmg.hu

6) Egyéb gyakorlópéldák (Az *a* és *b* változók természetes számok)

a) $a^2 – b^2 = 14580$; (a;b)=18. Mi az „a” és a „b”?

b) Áll.: $24 | a^4+2a^3–a^2–2a=A$

c) $a^2 – b^2=960$. (a;b)=8 Mennyi az „a” és a „b”?

szmg.hu

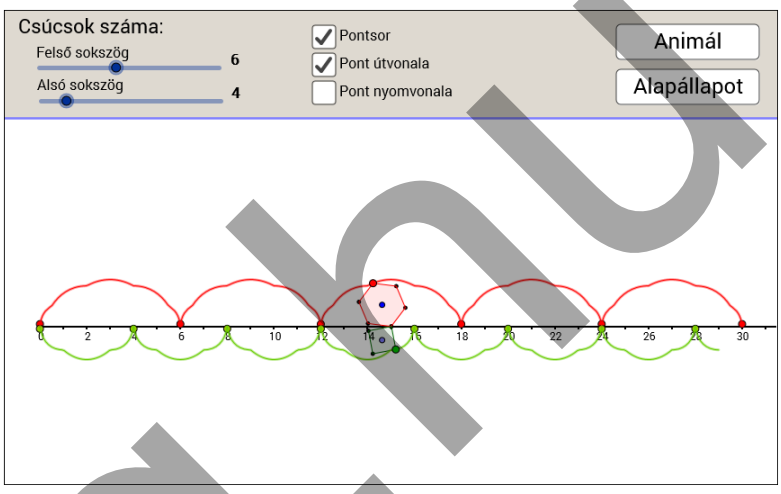
III. Legkisebb közös többszörös: Least Common Multiple

1) Definíciók; példa

Legyenek $a_1, a_2 \ldots a_n \in Z\setminus\{0\}$.
Ekkor $D \in Z$ közös többszörösük, ha mindegyik osztója D-nek.
Ekkor $D \in Z$ a legkisebb közös többszörös, ha $\forall C$ közös többszörösük esetén: $|D| \leq |C|$.

Pl.: [4;6]=12

Vagyis $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$



http://tananyag.geomatech.hu/b/145580#material/144980

https://www.geogebra.org/m/wwcFCUuj#material/G9qjs81v

2) Tételek

a) A legkisebb közös többszörös megkeresése a Számelmélet alaptétele segítségével

Elég két számra megvizsgálni, utána általánosíthatunk
Vizsgáljuk meg, mi a szükséges feltétele annak, hogy a|M-t, a kanonikus alakot tekintve.

$a|M \Rightarrow \exists k \in Z \rightarrow k \cdot a = M$. Vagyis az M szám prímtényezői mindenképp szerepelnie kell annak, ami megtalálható az *a*-ban, és legalább akkora hatványkitevővel kell rendelkeznie, mint az *a*-ban.

Konkrét példán:
$[5500;29\,400]=[2^2 \cdot 5^3 \cdot 11;\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2]=M$
Hogy 5500|M-t, azért M-ben szerepelnie kell: $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11$
Hogy 29 400|M-t, azért M-ben szerepelnie kell: $2^3 \cdot 7^2$.

A legkisebb ilyen, melyre mindkettő igaz: M=

Több, vagy magasabb hatványkitevő pedig ne legyen, mert akkor M nem a legkisebb.

szmg.hu

Vagyis a „módszer” [a;b] keresésére: vesszük a számok kanonikus alakjában előforduló összes prímtényezőt a szereplő legmagasabb hatványon, és összeszorozzuk őket.

Gyakorlása:
[45;12]=

[1500;5000]=

b) Tétel: A legkisebb közös többszörös egyben *kitüntetett közös többszörös*

A legkisebb közös többszörös kitüntetett közös többszörös, tehát minden közös többszöröst oszt.
A kanonikus alakokkal belátható.

c) Tétel: relatív prímek legkisebb közös többszöröse a szorzatuk!

A bizonyítás a kanonikus alakkal nagyon egyszerű: hiszen két relatív prímben nincs közös prímtényező, vagyis az LKKT-be bekerül mindkettő tag összes prímtényezője, a bennük szereplő hatványon, tehát az LKKT a szorzatuk.

Pl.: $[2^2 \cdot 13 \cdot 17^4;\ 3^2 \cdot 5 \cdot 23^7] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17^4 \cdot 23^7$ ✓

d) Az LNKO és az LKKT kapcsolata

Tétel: $[a;b] = \dfrac{a \cdot b}{(a;b)}$

Nem bizonyítjuk.

3) Példák

a) [a;200]=3000. Mi lehet az *a*?

b) 2-en elindulnak egy kör alakú pályán, az egyik 10, a másik 14 percenként tesz meg egy kört. Mikor lesznek a kezdőponton egymás mellett újra?

szmg.hu

c) 1-200-ig ábrázoljuk Venn-diagramon azokat a számokat, amelyek 10-zel oszthatók, illetve azokat, amelyek 6-tal oszthatók.

$H=\{1; 2; 3... 200\}$

$A=\{x\in H|\ 10|x\}$; $B=\{x\in H|\ 6|x\}$

Mit állapítunk meg a közös részről? $A\cap B$

Ábrázoljuk Venn-diagramon C és D halmazt, írjunk mindenhová számot

$H=\{1; 2; 3... 200\}$

$C=\{x\in H|\ 90|x\}$;

$D=\{x\in H|\ 20|x\}$;

Mit állapítunk meg a közös részről? $A\cap B$

d) Ábrázoljuk a következő halmazokat Venn-diagrammal

$H=\{1; 2; 3; 4; ... 200\}$

$A=\{x\in H|\ 5|x\}$

$B=\{x\in H|\ 10|x\}$

$C=\{x\in H|\ 15|x\}$

szmg.hu

e) $A=\{x\in \mathbf{N} \mid 14|x\}$; $B=\{x\in \mathbf{N} \mid 21|x\}$; $C=\{x\in \mathbf{N} \mid 10|x\}$
Ábrázoljuk mindezt Venn-diagramon. Alaphalmaz: **N**.
Mit állapítunk meg a közös részről? $A\cap B\cap C$

Hogyan kellene okosan felrajzolni a következő halmazokat? $H=\{1; 2; 3... 200\}$
$D=\{x\in H \mid 2|x\}$
$E=\{x\in H \mid 10|x\}$;
$F=\{x\in H \mid 3|x\}$;

f) Két relatív prím szorzata: 540. Mi lehet a két szám?

g) Melyik az a legkisebb természetes szám, melyet 12-vel, 13-mal és 14-gyel osztva mindig 10 a maradék?

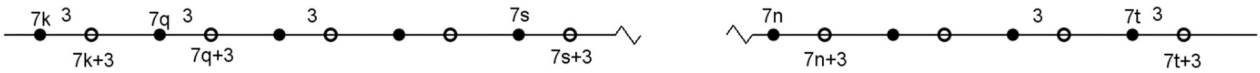
szmg.hu

Számelmélet – A maradékok világa az egész számoknál - olvasmány

I. Számok osztási maradéka

1) Bevezetés 7-tel

a) „Baráti számok” és „Baráti körök” a 7-tel adott maradékok világában.

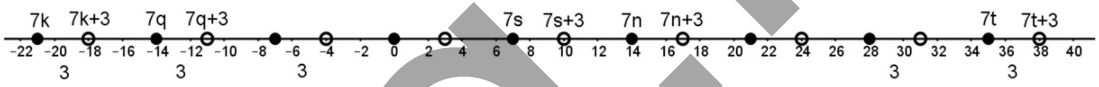


A „bumszlik” a 7-tel osztható számok.
Tőlük jobbra vannak 3-mal az „üreskarikás” számok.
Miket állapíthatunk meg róluk?

Nevezzük őket a „7 szerinti baráti számoknak”, „7 szerinti baráti társaságnak”

Érdekes felfedezést teszünk a 7-tel adott „maradékokkal” kapcsolatban:

17=7×2 + 3 a maradék 38= 7×5 + 3 a maradék



De mennyi a –11-nek a maradéka 7-tel osztva?

És a –18-nak?

Két szám „a” és „b” akkor „7 szerinti baráti szám”, ha:

A „két szám 7 szerinti ugyanolyan osztási maradéka” helyett érdemes inkább a következőt mondanunk:
Az „a” és „b” szám „7 szerinti baráti szám”, ha 7|a–b

c=7k+5 d=7m+5. Pl. k= m=

Ekkor 7|(7k+5)–(7m+5)

Ezentúl a „7 szerinti baráti számokat” a következőképp jelöljük:

a ≡ b mod 7 és azt mondjuk, hogy *„a” kongruens „b” mod(ulo) 7*.

És ez azzal „ekvivalens”, egyenértékű, hogy 7|(a–b)

Vagyis: a ≡ b mod 7 ⇔ 7|(a–b)

szmg.hu

b) A 7-tel adott „baráti társaságok”, azaz „kongruencia osztályok mod 7”

Két szám akkor „7 szerinti baráti szám”, ha különbségüket osztja a 7, de ez azzal egyenértékű, hogy a maradékuk ugyanaz 7-tel osztva.

Nyilván a 7n+3 alakú baráti számok:

–67; –60; … –32; –25; –18; –11; –4; 3; 10; 17 … 73; 80; 87, … 14003; 14010 …

n;k $\in$ Z, ekkor 7n+3 és 7k+3 baráti, vagyis 7|(7n+3)–(7k+3)=

Ezek a számok egy „baráti társaságba” tartoznak, ugyanabba a „kongruencia osztályba mod 7”

A 7n+5 alakú baráti számok:

–65; –58; … –30; –23; –16; –9; –2; 5; 12; 19 … 75; 82; 89, … 14005; 14012 …

n;k $\in$ Z, ekkor 7n+5 és 7k+5 baráti, vagyis 7|(7n+5)–(7k+5)=

Ezek a számok egy másik „baráti társaságba” tartoznak, egy másik „kongruencia osztályba mod 7” tartoznak mind.

A 7 szerint milyen alakú különböző „baráti” társaságok vannak, pontosan hányan vannak?

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10			
–7	–6	–5	–4			
14	15					
–14	–13					

Nyilván bármelyik számot választva egy oszlopból, az egyértelműn képviseli azt a „baráti társaságot”, azt a „kongruencia osztályt mod 7”, azt az oszlopot.

A vastagon szedett sort hívjuk a „legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszernek”, mivel mind különböző osztályba tartozik, az összes „baráti társaságot”, vagyis „maradékosztályt” képviselik, és a legkisebb de még nem negatív számok.

szmg.hu

2) Gyakorlás más számokkal

Más „modulussal” létrehozott kongruenciák, maradékosztályok, „legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszerek”

Írj a vonalakra különböző számokat: egyjegyűt, kétjegyűt és háromjegyűt!

___ ≡ 5 mod 7 ___ ≡ 5 mod 7 ___ ≡ 5 mod 7

___ ≡ 5 mod 12 ___ ≡ 5 mod 12 ___ ≡ 5 mod 12

Írj a vonalakra különböző számokat: egyjegyűt, kétjegyűt és egy negatívot!

___ ≡ 25 mod 10 ___ ≡ 66 mod 10 ___ ≡ 75 mod 10

___ ≡ 25 mod 4 ___ ≡ 66 mod 4 ___ ≡ 75 mod 4

Add meg a legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszert mod 3 és mod 5!

mod 3

mod 5

II. Definíció és tulajdonságok

1) Kongruencia definíció

Adott $m \in \mathbf{N} \setminus \{0;1\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy $a;b \in \mathbf{Z}$, ekkor $a \equiv b \bmod m \Leftrightarrow m \mid (a-b)$.

Vagyis ha adott egy 1-nél nagyobb természetes modulus, akkor két egész szám kongruens mod m, ha m osztja a különbségüket.

Hány különböző „baráti társaság”, maradékosztály van a következő modulusokkal, vagyis hány tagú a „legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszer” mod m? Írjuk fel néhány „baráti társaságot”, vagyis „maradékosztályt” néhány elemmel, és általános alakban is. Adjuk meg a *legkisebb nemnegatív maradékrendszert* is”

m=2

m=4

m=11

szmg.hu

2) Tulajdonságok (a szereplő számok egészek, természetesek)

a) Műveletek

- $a \equiv b \bmod m \Leftrightarrow a+k \equiv b+k \bmod m$
  Nyilván: $m \mid (a+k)-(b+k)=(a-b)$ ✓
  Pl.: 10-et adunk hozzá:
  Pl: $16 \equiv 37 \bmod 7 \quad \Leftrightarrow 26 \equiv 47 \bmod 7$
  A kongruenciaosztályok nyilván „átalakulnak”

$a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	mod 7
$a+5 \equiv$	5	6	0	1	2	3	4	mod 7

- $a \equiv b \bmod m \Rightarrow k \cdot a \equiv k \cdot b \bmod m$
  Nyilván: $m \mid ka-kb=k(a-b)$ ✓
  Pl.:
  Pl: $16 \equiv 37 \bmod 7 \quad \Leftrightarrow 32 \equiv 74 \bmod 7$

A kongruenciaosztályok „átalakulnak” 2-vel szorozva

$a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	mod 7
$2a \equiv$	0							mod 7

Sőt, valamelyik el is tűnhet

$b \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	mod 6
$4b \equiv$								mod 6

Sőt, teljesen is eltűnhetnek, egy maradékosztályba csoportosulhat az összes végeredmény. Például modulo 5 esetén mennyivel kell szorozni?

b) Maradékosztályok képviselőinek szorzata

- $a \equiv b \bmod m$
  $c \equiv d \bmod m \Rightarrow$
  $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
  Biz: Azt kell belássuk, hogy $m \mid (ac-bd)=(ac-bc+bc-bd) = c(a-b) + b(c-d)$.
  Az m pedig osztja $c(a-b)$-t is, $b(c-d)$-t is, vagyis a különbségüket is. ☠✓
  Pl.: $37 \equiv 2 \bmod 7$ és $74 \equiv 4 \bmod 7$.
  Ez azt jelenti „közönségesebben”, hogy mivel a 37 az 2-őt, a 74 pedig 4-et ad maradékul 7-tel osztva. Ezért:
  a $37 \cdot 74$ maradékát elég úgy megállapítani, hogy a $2 \cdot 4=8$ maradékát nézzük meg, ami 1- lesz.
  Vagyis: $37 \cdot 74 \equiv 2 \cdot 4=8 \equiv 1 \bmod m$

  Korábban a modulo 10 kongruenciánál ezt pontosan ismertük: hiszen a 10 modulusú legkisebb nemnegatív maradékrendszer a 10-zel adott osztási maradékok: a számok végződése. És tudtuk, hogy egy 7-re és egy 4-re végződő szám szorzata mindig 8-ra végződik:
  $17 \cdot 34 \equiv 507 \cdot 234 \equiv 7 \cdot 4 = 28 \equiv 8 \bmod 10$

szmg.hu

- Érdekes haszna ennek a tulajdonságnak
  - Hatványozás
    $k \equiv 1 \bmod 6$ Megszorozzuk mindkét oldalt önmagával:
    $k^2 \equiv 1^2 \bmod 6$ Megszorozzuk mindkét oldalt önmagával:
    $k^3 \equiv 1 \bmod 6$ stb

    $k^{100} \equiv 1 \bmod 6$.

    Így például: 19^{50} 6-tal osztva maradékul 1-et ad:
    $19^{50} \equiv 1^{50} \bmod 6$

  - Lehet-e négyzetszám a $35n^2+3$?
    Nézzük meg, hogy 5-tel milyen maradékosztályok vannak – célszerű a l.n.t.m.r-t nézni:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	mod 5
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	mod 5

    Vagyis nincs olyan szám, melynek négyzete 2-vel v. 3-mal lenne kongruens mod 5, vagyis:
    Ha azt kell megvizsgálnunk, hogy a $35n^2+3$ lehet-e négyzetszám, akkor láthatjuk, hogy:

    Ne feledjük, hogy nem mindig hasznos a módszer.
    Pl.: $49n^2+10n+2$-nél ez nem válik be, de egy másik ötlet igen:

c) Maradékosztályok képviselőinek lineáris kombinációja illetve szorzata

- $a \equiv b \bmod m$
  $c \equiv d \bmod m \Rightarrow$
  $x_0 \cdot a + y_0 \cdot c \equiv x_0 \cdot b + y_0 \cdot d \bmod m$
  Bizonyítás:

  $458 \equiv 2 \bmod 4$
  $-65 \equiv 3 \bmod 4$
  $\Rightarrow 9 \cdot 458 + 3 \cdot (-65) \equiv 9 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \equiv 27 \equiv 3 \bmod 4$

szmg.hu

III. Számelméleti hasznuk - gyakorlás

- Mekkora maradékot ad 1956^{20} 13-mal osztva?

- Mutasd meg, hogy $10|37^{37}–23^{23}$

- Mutasd meg, hogy $6|n^3+5n$ (kongruenciával ill. szorzattá alakítással is!)

- Mutasd meg, hogy $5|n^5–n$ (kongruenciával ill. szorzattá alakítással is!)

szmg.hu

- Mutasd meg, hogy $120 \mid n^6+2n^5-n^2-2n$ (kongruenciával ill. szorzattá alakítással is!)

szmg.hu

Kombinatorika

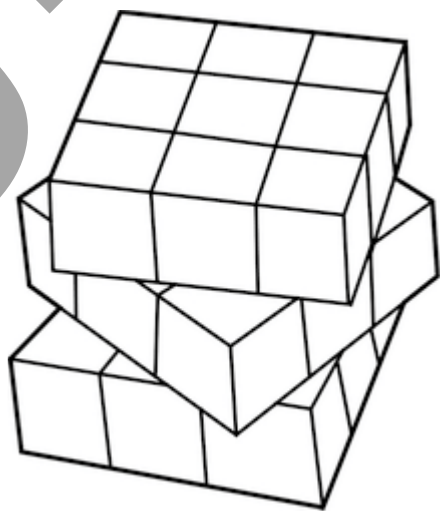
Alapállás: számológép használható. Amennyiben a végeredmény olyan szám, amely kifér a számológép kijelzőjére, akkor azt úgy is le kell írni.

I. Gondolkodási módszerek

1) Bevezetés

a) Lemezből kivágott síkidomok vannak előttünk. Közöttük akad két különböző színű (piros és kék), továbbá van két különböző alakú (háromszög, kör). Mutasd meg, hogy van két olyan síkidom, melyek színben is és alakban is különbözők.

b) Egy 3 egység élhosszúságú kockát piros festékbe mártok, majd 1 egység élhosszú kockákra fűrészelem.

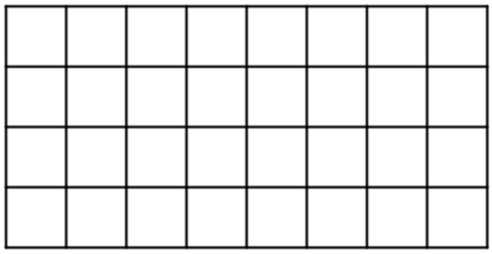


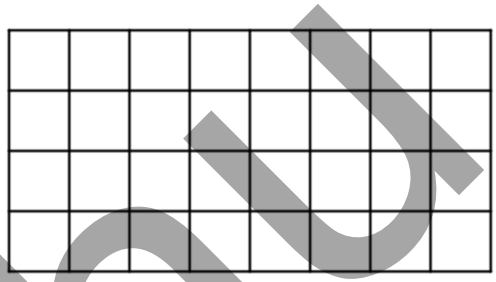
- Legkevesebb hány vágásra van szükség, ha egyszerre csak egy darabot fűrészelhetek (nem rakhatok semmilyen két darabot egymásra)?

- Hány olyan kockát kapok, amelynek 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 piros oldala van?

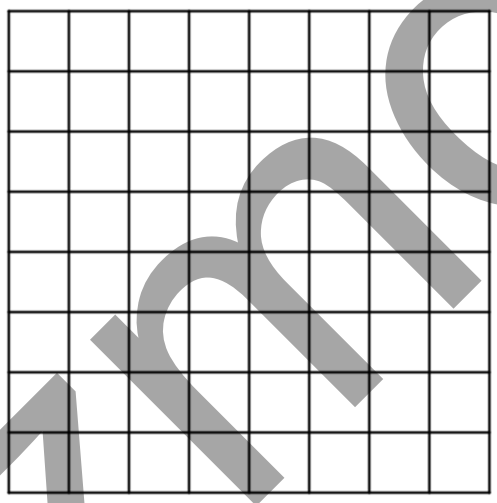
szmg.hu

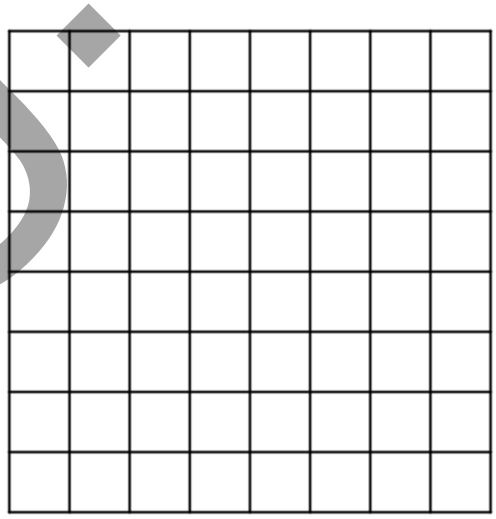
c) Egy 8×4-es négyzetháló bal felső sarkából elindulva eljuthatunk-e a jobb alsó sarokba, ha minden egyes lépés olyan, hogy csak „oldalél-szomszédos” négyzetre ugorhatunk és minden mezőn pontosan egyszer áthaladunk? (Jó-e úgy, hogy „legalább egyszer”?)





d) Egy 8×8-as négyzetrács egymással átlósan szemközti két sarok-négyzetét kivágjuk. Mutassuk meg, hogy a maradék nem fedhető le 2×1-es dominókkal!





e) Igaz-e, hogy egy 10 fős társaságban van két fő, aki ugyanannyi embert ismer?

szmg.hu

2) Skatulya elv

a) Bevezetés

(i) Van egy doboz, benne 4 piros, 7 sárga, 10 kék golyó.:
Hányat kell kihúzni belőlük vakon, hogy biztos legyen köztük:

- sárga
- sárga vagy kék
- piros és kék
- két különböző színű
- két azonos színű

(ii) Van 4 doboz és 5 tárgy (pl: 4 család, 5 koncertjegy):
Áll.: legalább egy olyan doboz van, melyben legalább 2 tárgy van. (Vagyis van olyan család, aki 2 koncertjegyet kap)
Bizonyítás.: Indirekt. Indirekt feltevés: tegyük fel, hogy („tfh”):

Vagyis: cs_1

cs_2

cs_3

cs_4

(iii) Mit mondhatok biztonsággal, ha a dobozokba elhelyezem a tárgyakat:

10 doboz 21 tárgy:

10 doboz 22 tárgy:

10 doboz 30 tárgy:

10 doboz 31 tárgy:

b) A skatulya elv

(i) Áll.: Ha k darab dobozba k-nál több tárgyak tárgyat akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba legalább két tárgyat kell tennünk.

szmg.hu

(ii) Áll.: Ha n darab dobozba k·n+1 v. k·n+2 … v. (k+1)n db. tárgyat akarunk elhelyezni, akkor legalább egy dobozba …… db-nál több tárgyat kell tennünk..
Biz.: Indirekt. Tfh:

$d_1 \leq$
$d_2 \leq$
...
$d_n \leq$

c) Példák:

(i) Egy fiókban három különböző színű zokni van, mindegyikből elég sok. Hányat kell vaktában kivenni ahhoz, hogy a) legalább egy pár azonos színűt kivegyek b) legyen legalább négy pár azonos színű zoknim?

(ii) Állítás: 37 tanulóból mindig van négy olyan, akiknek a születésnapja azonos hónapban van.

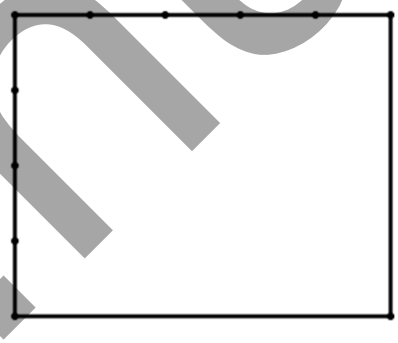
(iii) Bizonyítsd be, hogy 8 db. természetes (lehetne egész is) szám közül mindig létezik 2 olyan, amelyeknek a különbsége osztható 7-tel.

(iv) * Állítás: a racionális számok felírhatók véges, v. végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

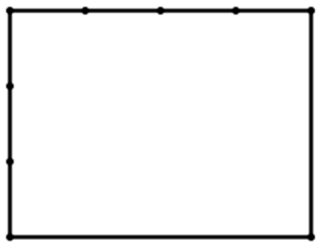
szmg.hu

(v) * Állítás: $a;b;c;d \in \mathbf{Z} \Rightarrow 12 \mid (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

(vi) Adott egy 5 cm x 4 cm-es téglalap. Bizonyítsd be, hogy ha ráül 41 bolha, akkor lesz legalább három olyan, akiket egyszerre le tudok fedni egy 0,75 cm sugarú 5 Ft-ossal.

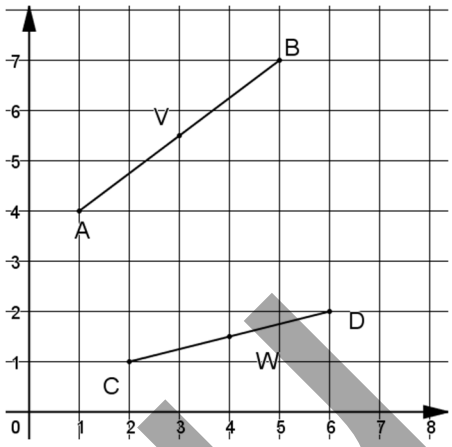


(vii) Egy 3×4-es téglalapban felvettünk 6 db. pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között van kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$.



szmg.hu

(viii) * Hány olyan egész koordinátájú pontot kell felírni, hogy legyen köztük biztosan két olyan, melyek által meghatározott szakasz felezőpontjának koordinátája is egész?



(ix) * 11111…10…00000 és 111…11
Állítás: bármely egész számnak létezik: 111...100...0 alakú többszöröse.

** Mely számoknak létezik 111...11 alakú többszöröse?

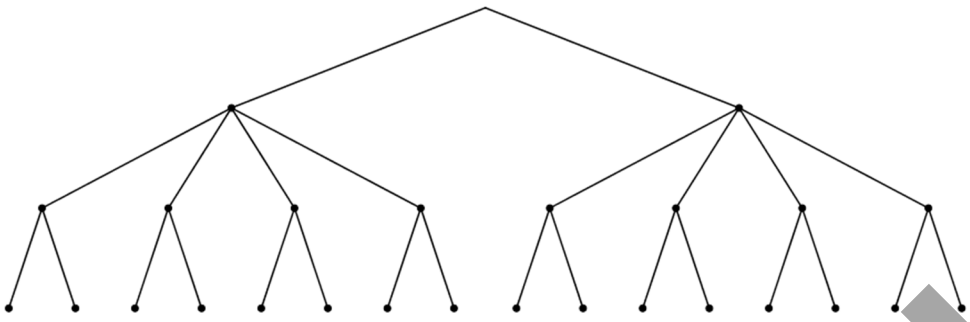
(x) Egyéb gondolkodtató

- (Róka 2000…) 1543: Egységsugarú körlapon 7 pontot helyeztünk el. Igazoljuk, hogy van közöttük kettő, melyek távolsága nem nagyobb 1-nél!
- * (Róka 2000…) 1544: Egységsugarú körlapon 6 pontot helyeztünk el. Igazoljuk, hogy van közöttük kettő, melyek távolsága nem nagyobb 1-nél!
- (Róka 2000…) 1547: Egy 20 x 15-ös téglalapban felvettünk 26 db. pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között van kettő, melyek távolsága legfeljebb 5.
- (Róka 2000…) 1549: Egy 8 x 8-as négyzetben felvettünk 260 db. pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között van kettő, melyek távolsága kisebb 1-nél.
- (Róka 2000…) 1596: Mutassuk meg, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!
- * (Róka 1500…) 1298: Mutassuk meg, hogy hét egész szám között mindig van kettő, melyek összege vagy különbsége osztható 11-gyel!
- * Bizonyítsuk be, hogy 502 természetes szám között mindig találhatunk kettőt, amelyek különbsége vagy összege osztható ezerrel
- Mutasd meg, hogy k db. egész között mindig van néhány, melyek összege osztható k-val! (Egytagú összeget is összegnek tekintünk)

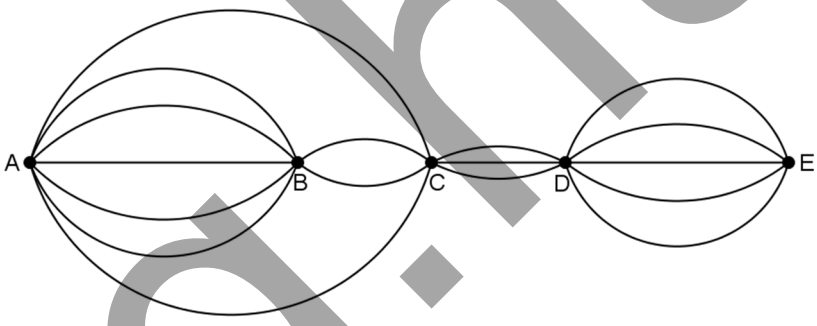
szmg.hu

3) Az ábrázolás sok esetben segít

a) Ábrázolva számoljuk össze és írjuk le a $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ osztóit



b) Az A-ból B-be 5 féle úton lehet menni. B-ből C-be kettő.
A-ból közvetlenül C-be kétféle úton. Stb.



Hányféleképp juthatunk:

C-ből $\rightarrow$ D-be

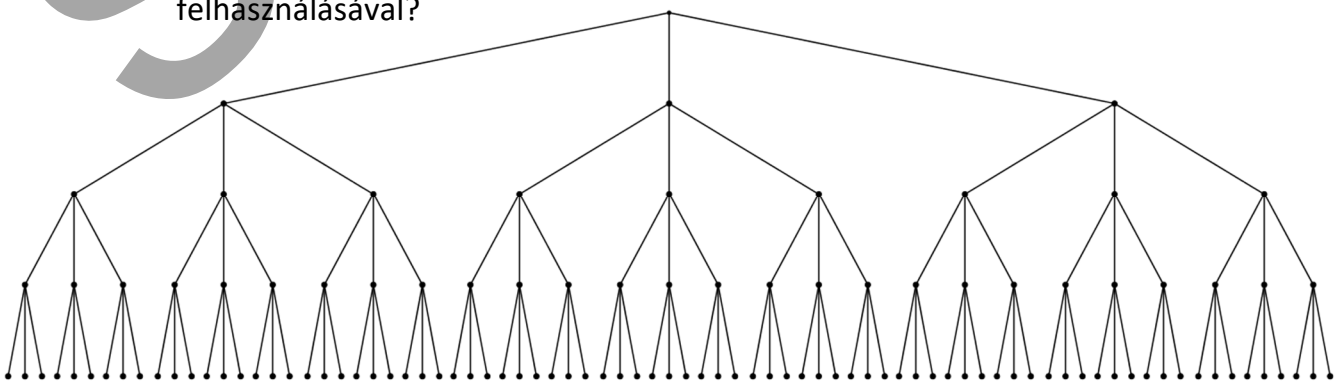
D $\rightarrow$ E

C $\rightarrow$ E

A $\rightarrow$ C

A $\rightarrow$ E

c) Hány négyjegyű számot tudunk leírni a 3;5;8 jegyek – akár többszöri – felhasználásával?



szmg.hu

4) A komplementer esemény – első közelítésben

Ha elölről nem megy, akkor van hátsó ajtó – vagyis ha egy esemény túl sok elemi eseményből áll, akkor a komplementer eseményt érdemes nézni …

- Hány olyan háromjegyű szám van, melyben nincs, vagy 1 v. 2 db. 9-es van?

- 1-1000-ig hány olyan szám van, melyet nem oszt a $2^2 \cdot 5^2$?

- Melyik a több lehetőség: 10 diákból 3-at kiválasztani, vagy 7-et?

II. Néhány alapismeret, gondolat

1) A faktoriális

a) Kétféle definíció és gyakorlása: $n \in \mathbf{N}^+$

Konstruktív: $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ v. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

Rekurzív $0! := 1$ és $n \neq 1 \Rightarrow n! := n \cdot (n-1)!$

Ez utóbbit értelmezzük!

FIGYELEM: Megegyezés alapján: 0! :=1

Számold ki 1-7-ig a számok faktorát!

b) Egyéb számolások faktorral

Ami nagy, azt faktorral fejezd ki, ami nem nagy, azt szorzattal és konkrét értékkel!

$\frac{15!}{15 \cdot 14} =$

$\frac{n!}{(n-3)!} =$

$\frac{20!}{18!} =$

$\frac{(n-2)!}{(n-1)!} - \frac{(n-2)!}{n!} =$

szmg.hu

Áll: Ha $k \in \mathbf{N}$, $k > 4$ és $k \mid (k-1)! \Rightarrow k$ összetett szám.

2) Egy kis valószínűségszámítás

A klasszikus eseménytér, klasszikus képlet: a Laplace modell
A *Laplace-modell* olyan valószínűségi kísérlet, ahol véges sok egyenlően valószínű elemi esemény van. Kedvezőnek nevezzük az olyan elemi eseményeket, amelyek a *B* esemény bekövetkezését eredményezik.

Például a kockadobás

Az elemi események a 1-es, 2-es, 3-as stb. dobása. Ezekre azt tartjuk, hogy egyenlő valószínűséggel következnek be.

Ha olyan eseményre várok, hogy „összetett számot" dobok – nevezzük ezt „B esemény"-nek: ez a B esemény két elemi eseményből áll, a 4 és a 6 dobásából.

Vagyis egy „Esemény": az „elemi események egy halmaza"!)

Legyen H eseménytér elemi eseményeinek száma *n*, és tegyük fel, hogy mindegyik ugyanakkora valószínűséggel következhet be. Ekkor ha egy $B \subseteq H$ esemény pontosan *k* elemi esemény összegére bontható, akkor $P(B)=\frac{k}{n}$.

$$P(B)=\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{lehetséges elemi események száma}} \quad \text{vagy:} \quad \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{lehetséges esetek száma}}$$

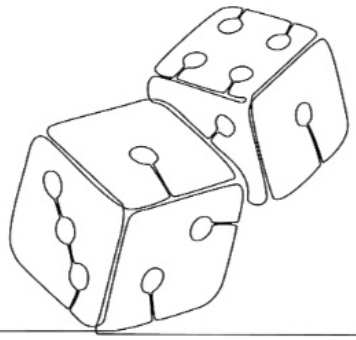
Vagyis: Jelen kockadobásnál esetben P(Összetett szám)= $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333\dot{3} = 33,\dot{3}\%$

Vagy: Magyar kártyából 1 lapot húzunk. Mi annak a valószínűsége, hogy Pirosat húzok?

Az összes elemi esemény: 32 féle. Az ESEMÉNY: „Piros".
A „Piros" esemény akkor következik be, ha PÁsz, PKirály, PFelső, PAlsó PX, PXI, PXIII v. PVII-et húzok, vagyis:
8 elemi eseményből áll a „Piros" húzás eseménye.

P(Piros)= $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ =0.25 =25%

Elgondolkodtató: Egy körben véletlenül választok egy pontot. Lehetetlen-e, hogy a középpontját találom meg? És mi annak a valószínűsége, hogy a középpontját találom meg?



szmg.hu

III. Permutációk - a sorrendek összeszámlálása: számít a sorrend – minden elem szerepel

1) Ismétlés nélküli Permutáció – különböző elemek maradéktalan sorba állítása

a) **Alappélda: „Sorba állítás”** – hányféleképp tudok sorba állítani egy osztálynyi gyereket?

Jelen esetben kevesebbet érdemes nézni – elég csak négy diákot sorba állítani.

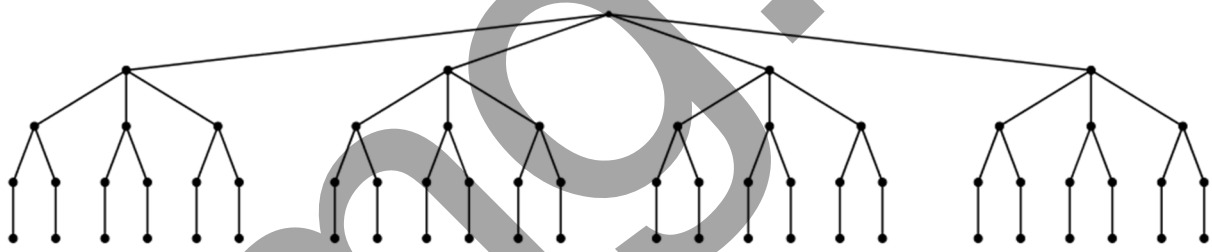
Aliz, Bálint, Cecil, Dezső

Az első helyre 4-féleképpen lehet választani.
Utána már csak 3 ember marad, tehát másodiknak a maradék 3-ból 3-féleképp választhatok, tehát az első kettőt 4·3 féleképp lehet kiválasztani.
Harmadiknak már csak 2-ből választhatok: kétféleképp, vagyis az első három sorrendje 4·3·2 lehet.
Az utolsónak már csak az addig nem választott lehet, tehát 4·3·2·1 az összes lehetséges sorba állítás.

Fa struktúrán nézve: először 4 felé ágazik a fa A B C D, majd alattuk már csak 3 felé, mivel egyet már elhelyeztem. És így tovább…

Vagyis 4! = 24

Töltsük ki az ábrát, az ágak végén a kimenetekkel!



Ha véletlenül állnak sorba, akkor mi a valószínűsége annak, nem pont névsor szerint csökkenő v. növekvő sorban állnak?
Mo.:

$$P(\text{nem növekvő v. csökkenő}) = \frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{lehetséges elemi események száma}}$$

A lehetséges elemi események száma: 4!=24

Kedvező esetek száma?

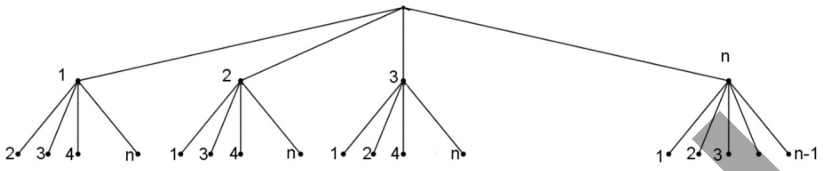
szmg.hu

b) Definíció és tétel:

Def.: ***n* különböző elem egy lehetséges sorrendjét** az elemek egy **permutációjának** nevezzük.

Tétel: *n* különböző elem összes lehetséges sorrendjeinek, vagyis permutációinak a száma: n!. Jele: P_n. Tehát: $P_n=n!$

Biz.: nem hivatalos: Fa struktúra:



Minden lehetséges sorrend „kipottyan”, és egy sincs többször számolva, tehát:

A kimenetek száma: $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$

c) Gyakorlás - https://www.dcode.fr/permutations-generator

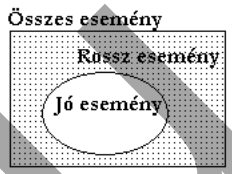
(i) Írd föl az 1,2,3 jegyek összes permutációját!
Ha véletlenül kiválasztok egyet, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy nem növekvő v. csökkenő sorrendben lesznek?

(ii) Hány 4 jegyű számot írhatok le az 1,2,5,9 számjegyek felhasználásával, és ezeknek mennyi az összege?
Ha véletlenül kiválasztok egyet, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy *nem* a legnagyobbat választom?

szmg.hu

(iii) Hány 4 jegyű számot írhatok le az 0,1,2,4 számjegyek maradéktalan felhasználásával? Vigyázat, 0-val nem kezdődhet szám!

1. Mo.:



2. Mo.: Komplementer eseménnyel!

Mit jelent, hogy komplementer esemény?

Ha a *kedvező események* és a *kedvezőtlen események* metszete üres halmaz, és az uniójuk az összes esemény, akkor egymás komplementerei. Ekkor a

|*kedvező események*| = |Összes esemény|–|Kedvezőtlen esemény|

Néha a nem kedvező események számossága egyszerűbb!

(iv) Hány 5-tel osztható 6 jegyű szám állítható elő a 0,1,2,3,4,5 számjegyekből, ha mindegyik csak egyszer szerepelhet?

Illetve mi a valószínűsége annak, hogy 5-tel osztható 6 jegyű számot választok ki, ha véletlenszerű sorrendbe teszem a 0,1,2,3,4,5 számokat?

(v) Hányféleképpen lehet a moziba leültetni 7 főt, Andrást, Bélát, Csongort, Dezsőt, Elemért, Ferencet és Gézát, ha Béla semmiképp sem ül Géza mellé?

Illtetve mi a valószínűsége annak, hogyha véletlenül leülnek, akkor Béla nem ül Géza mellé?

szmg.hu

2) Az ismétléses permutáció – minden elemet sorba állítok – lehetnek azonos elemek is

a) Alappélda: Anagrammák

Huygens felfedezte a Szaturnusz gyűrűjét ↔ Wallis. Huygens rájött:
„Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato”
„Vékony, sík, sehol sem rögzített, az ekliptikával ferde szöget bezáró gyűrű öleli körül.

De így tette közzé, de csak három év után akarta „felfedni”, hogy senki se mondhassa, hogy ő is megtalálta:

„aaaaaaaccccccdeeeeeeghiiiiiiiillllmmnnnnnnnnnnoooooppqrrstttttttuuuuu”

Huygens szerencsétlenségére Wallis rájött – nem a csillagászati tényre, hanem az anagramma megfejtésére – tudniillik azért azt tudta, hogy nagyjából miben mesterkedik Huygens ☺.

„komor – korom – romok – ormok – orkom” *„Kedves Orkom! Korom sötétben az ormok valójában komor romok.”*

Pálinkás Pista, a pásztor sokféle állatra vigyáz. De mivel nevére méltó, így amikor megszámolja őket, mindből az ötszörösét számolja: 10 marhát, 25 birkát, 5 pulit, 45 lovat és 75 libát. Hány állata van összesen?

Hányféleképp lehet sorbatenni a „matematika” szó betűit – hányféle anagrammája létezik?

matematika: aaaeikmmtt.

Adott egy 10 betűből álló jelsorozat, csakhogy most vannak köztük azonosak is: *aaa*, *mm*, és *tt.*
Hányféleképpen rakhatom őket sorrendbe, ha az azonos betűket nem tudom megkülönböztetni?
Ha az azonos betű más színnel lennének írva, akkor alapvetően: $P_{10} = 10!$

Ha az *a* betűk 3 színűek – piros, kék, zöld
az *m* betűk kétszínűek – piros, kék
a *t* betűk kétszínűek – piros, kék

De ha megnézem: *mteaiamkta* sorozatot: ezt a kimenetet valójában P_3-szor számoltam meg:

mteaiamkta mteaiamkta

mteaiamkta mteaiamkta

mteaiamkta mteaiamkta

A három „a” betű miatt minden lehetséges kimenetet $P_3=3!=6$-szor számoltam meg feleslegesen –tehát csak $\frac{P_{10}}{P_3} = \frac{10!}{3!}$ a különböző esemény.

De az *m* betűk miatt még ezeket a helyzeteket is P_2-ször számoltam:

mxx*a*x*a****m***xx*a* -t: egy vagyis már csak $\frac{P_{10}}{P_3 \cdot P_2} = \frac{10!}{3! \cdot 2!}$ különböző esemény van

Végül pedig a *t* betűk miatt mindent szintén P_2-ször számoltam

Mivel minden kimenetet tehát $P_3 \cdot P_2 \cdot P_2$-ször (=24) számoltam meg, ezért a valóban különböző kimenetek száma: $\frac{P_{10}}{P_3 \cdot P_2 \cdot P_2} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$

szmg.hu

Valószínűség:

Mi a valószínűsége annak, hogyha a matematika betűit véletlen szerűn húzom ki egymás után a egy dobozból, akkor a „matematika” szó jön ki?

Egy jó megoldás van: „matematika”, de többféleképp kijöhet… Egyszerűbb, ha minden betűt más színűnek is gondolunk:

Hányféleképp állhat sorba 3 fiú és 2 lány, ha csak azt figyeljük, hogy lány v. fiú az illető? Írjuk is föl az eseteket!

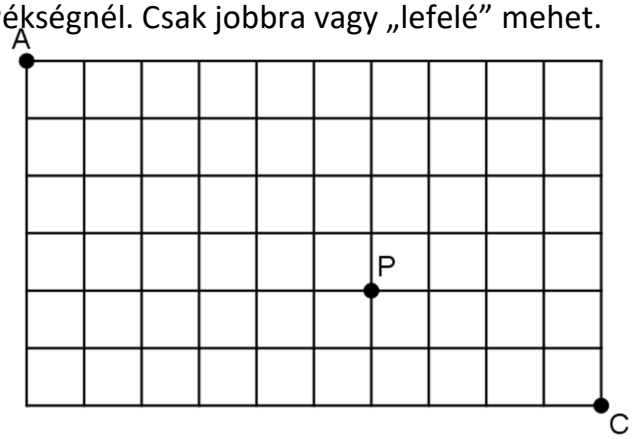
b) Áll.: $P_n^{k_1;k_2;\ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ ($\sum_{i=1}^{m} k_i \leq n$)

Ennyi *n* elem $k_1;k_2\ldots k_m$-ed osztályú, ismétléses permutációinak a száma.

c) Egyéb példák

(i) Hány különböző hatjegyű számot lehet felírni 4,4,3,3,3,3 számjegyek maradéktalan felhasználásával? Írjuk is fel őket!

(ii) Utak a városban: A városban az utakat a vonalak jelentik. Aladár Cecilhez akar eljutni, de előtt meg akar állni a Pékségnél. Csak jobbra vagy „lefelé” mehet.



szmg.hu

(iii) Hányféleképpen mehetünk a számegyenesen: 0-ról a +4-re, ha összesen 12-őt léphetünk jobbra vagy balra.

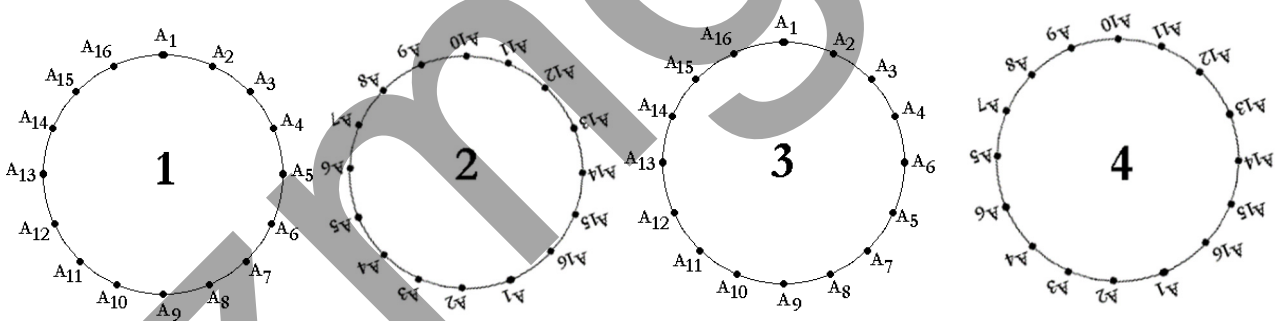
(iv) Hányféle (vagyis hány különböző) 23-mal kezdődő, 8 jegyű szám áll elő: 1,1,2,2,3,3,3,3 számjegyek maradéktalan felhasználásával?:

https://www.dcode.fr/permutations-generator
https://planetcalc.com/4242/

3) Ciklikus permutációk – Arthur király kerekasztala

a) $P_{n;c}=(n-1)!$

n db. különböző elem egy lehetséges sorrendjét, ahol az elrendezés kör alakban történik, és csak a „szomszédság” számít (vagyis az abszolút hely nem), *n* elem ciklikus permutációjának nevezzük.



Nézzük meg a fenti elhelyezéseket. Ha mindegyik ábrán az A_1-ből nézzük a többi elemet, akkor az olyan, mintha mindegyiket úgy fordítanánk, hogy az A_1 legyen felül. Ekkor jól látszik, hogy az 1-es és a 2-es elrendezés ugyanaz, illetve a 3-as és a 4-es is.
Ugyanakkor az 1-es és a 3-as különbözik: éppen a maradék 15 elem permutálása miatt.
Vagyis: $P_{n,c}=(n-1)!$

Másféleképp: 1 elemet leültetek (lefixálok), és a többi helyen permutálom az embereket: (n–1)!

szmg.hu

b) Adott kör alakú asztalhoz 12 ember leül. Hányféleképp lehet ez, ha az egymásba-forgatások nem számítanak (vagyis csak a szomszédságok), de Lancelot, Camelot és Galahad egymás mellé kerül valahogy.

c) 5 házaspár hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz vacsorázni, ha a párok egymás mellett szeretnének ülni, de úgy, hogy egyneműek ne kerüljenek egymás mellé?

d) Különböző gyöngyökből lánc: a „tükörkép”-ség sem különbözik!
Hányféleképp tudok gömb alakú gyöngyökből nyakláncot készíteni, ha van 4 fehér 3 fekete és 2 piros gyöngyöm?

IV. Variáció – számít a sorrend – nem minden elem szerepel

1) Az Ismétlés Nélküli Variáció – egy elem csak egyszer szerepelhet
„Bizonyos elemekből néhány, ismétlődés nélkül, sorrend számít”

a) Alappélda: „Az első három helyezett”: a VB-n

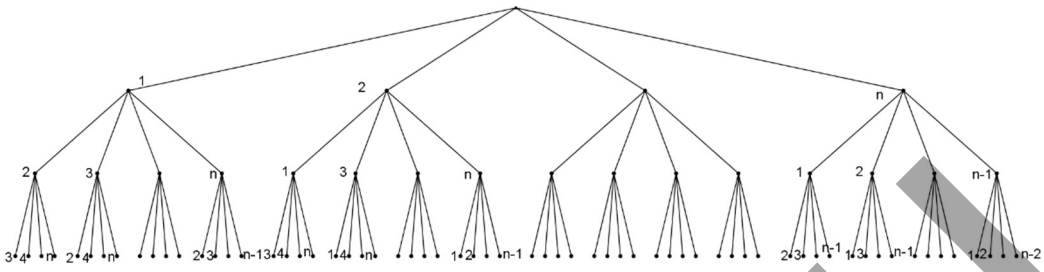
Ha 32-en indulnak, akkor hányféleképpen alakulhat ki az első 3 hely?

szmg.hu

b) Definíció + Tétel

Ha n különböző elemből kiválasztunk k-t, és vesszük ezek egy sorrendjét, akkor ezt az ***n* elem egy *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációjának** nevezzük (**k≤n**).

Áll.: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$



Tehát 32 versenyzőnél az első 3 hely hányféleképp jöhet ki?

„32 elem 3-ad osztályú ismétléses variációinak a száma”:

$V_{32}^3 = \frac{32!}{(32-3)!} = \frac{32!}{29!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\ 760$

c) Gyakorlás

(i) Hány 3 jegyű számot írhatok le az 1,2,3,4,5 számjegyek egyszeri felhasználásával, és ezeknek mennyi az összege?

Mi a valószínűsége annak, hogyha 3 jegyet leírok, ott van köztük a 4-es?

(ii) Hány 4 jegyű számot írhatok le a 0,4,5,6,7,8,9 számjegyek egyszeri felhasználásával?

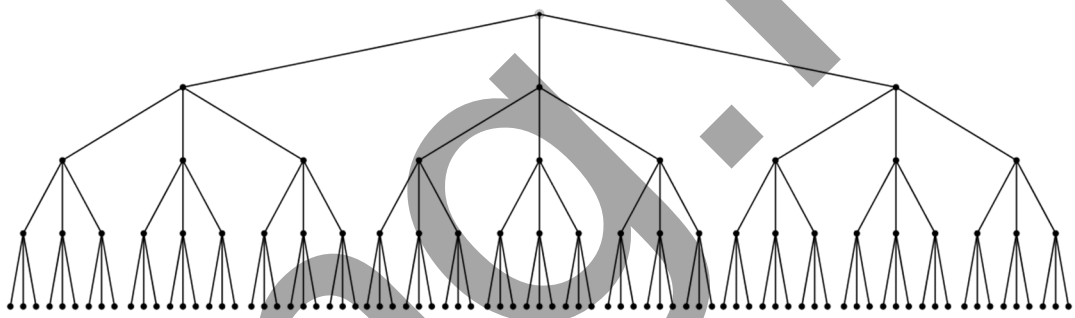
szmg.hu

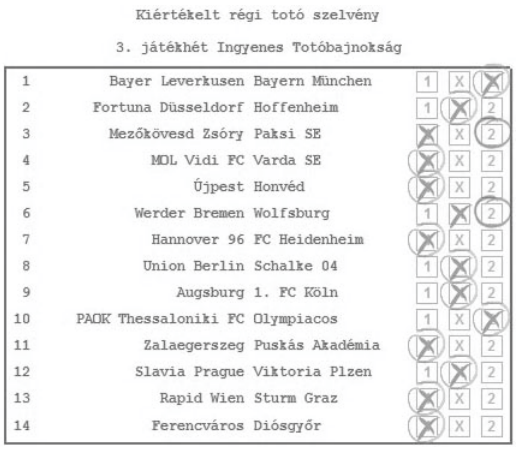
(iii) A 1,2,3,4,5 számjegyekből hány darab olyan háromjegyű páros számot képezhetünk, amelyben minden számjegy csak egyszer használható fel?

Mi a valószínűsége annak az események, véletlenszerűn húzva az 5 jegyből hármat (a sorrend számít), páros számot kapok?

2) Az ismétléses variáció – számít a sorrend – egy elem akárhányszor felhasználható

a) Alappélda: Totó: 3 elem 13 osztály





Kiértékelt régi totó szelvény

3. játékhét Ingyenes Totóbajnokság

1	Bayer Leverkusen	Bayern München	1	X	X
2	Fortuna Düsseldorf	Hoffenheim	1	X	2
3	Mezőkövesd Zsóry	Paksi SE	X	X	2
4	MOL Vidi FC	Varda SE	X	X	2
5	Újpest	Honvéd	X	X	2
6	Werder Bremen	Wolfsburg	1	X	2
7	Hannover 96	FC Heidenheim	X	X	2
8	Union Berlin	Schalke 04	1	X	2
9	Augsburg	1. FC Köln	1	X	2
10	PAOK Thessaloniki FC	Olympiacos	1	X	X
11	Zalaegerszeg	Puskás Akadémia	X	X	2
12	Slavia Prague	Viktoria Plzen	1	X	2
13	Rapid Wien	Sturm Graz	X	X	2
14	Ferencváros	Diósgyőr	X	X	2

b) Definíció + Tétel:

Definíció: Ha *n* különböző elemből kiválasztunk *k*-t úgy, hogy egy elem többször is szerepelhet, és a sorrend is számít, akkor ezt az ***n* elem egy *k*-ad osztályú ismétléses variációjának** hívjuk.

Fontos észrevenni, hogy *k* lehet nagyobb is, mint az *n*.

Tétel: *n* különböző elem *k*-ad-osztályú variációinak a száma: V_n^k (ism)=n^k.

szmg.hu

c) Gyakorlás

(i) 6 sávú lobogót készítünk, a sávok fekete csíkkal vannak elválasztva, és 4 színt használhatunk: Piros, Fehér, Zöld, Kék, ~~Rózsaszín~~. Hányféle lobogót készíthetünk?

(ii) Egy kockával 5-ször dobok. Hány különböző dobássorozatot kaphatok, ahol számít a sorrend is.

(iii) Tizenöt tanuló között hányféleképpen lehet kiosztani öt különböző tárgyat úgy, hogy egy tanuló több tárgyat is kaphat?
Figyelem - ravaszság!

(iv) Hányféleképpen olvasható ki az COVID szó, ha a C-betűből indulva csak jobbra v. lefelé léphetünk?

C	O	V	I	D
O	V	I	D	
V	I	D		
I	D			
D				

Vegyük észre: bármelyik D betűig annyiféleképpen jutok el, amilyen szám áll ott a …… Vagyis a …… megfelelő sorainak összege:

2^0, 2^1, 2^2, 2^3… Vagyis: $P_4^{4,0}+P_4^{3,1}+P_4^{2,2}+P_4^{1,3}+P_4^{0,4}=2^4$.

Később még erre visszatérünk.

szimg.hu

(v) Hány olyan hatjegyű szám van, amely csupa páros számjegyekből áll?

Mi a valószínűsége annak, hogyha egy hatjegyű számot generálok véletlenszerűn, akkor annak a jegyei párosak lesznek?

(vi) A „van legalább” először
Hány olyan totó eredmény lehet, ahol van legalább egy x?

Mi a valószínűsége annak, hogy a totóban van legalább egy x?

V. Kombináció – nem minden elem szerepel – nem számít a sorrend

1) Ismétlés nélküli kombináció
Minden elem különböző – nem minden elem szerepel, nem számít a sorrend – valójában *halmazból részhalmaz* kiválasztási lehetőségek.

a) Lottó – hányféleképpen lehet kitölteni a lottót?

Az ilyen típusú kiválasztást (tehát nem minden elemet használok fel), ahol nem számít a sorrend, kombinációnak nevezzük:

b) Definíció + Tétel

Ha n különböző elemből kiválasztunk k-t, és a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor egy ilyen kiválasztást az *n elem egy k-ad osztályú kombinációjának nevezzük*.
Vagyis: egy n elemű halmaz k-elemű részhalmazát az n elem k-ad osztályú kombinációjának nevezzük.
(Nyilván: halmaz $\Rightarrow$ az elemek különbözők!)

szmg.hu

Két kombinációt akkor nevezünk azonosnak, ha ugyanazokból az elemekből állnak.

Jelölés: *n* különböző elem *k*-ad osztályú kombinációinak a száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$

Az $\binom{n}{k}$ jelölést binomiális együtthatónak is nevezzük. Pl. a lottónál: $C_{90}^5 = \binom{90}{5}$

Tétel: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Bizonyítás

Visszavezetjük a V_n^k-ra: Válasszunk ki *n* elemből *k*-t, úgy hogy ne számítson a sorrend: ezt C_n^k-szor tehetjük meg (még csak így jelöljük, de még nem tudjuk mennyi).

Minden egyes kiválasztott *k* elemű részhalmazt P_k féleképpen tehetjük sorba, s így megkapjuk az *n* elem *k*-ad osztályú variációját. Vagyis: $P_k \cdot C_n^k = V_n^k$

Így: $C_n^k = \dfrac{V_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Alappéldái: Lottó, Küldöttség (ahol nem számít a sorrend a tagok között), Kártyaosztás (ahol nem számít, milyen sorrendben kaptam meg a lapjaim) stb.

Pl: Egy 25 tagú bizottság 3 tagú küldöttséget állít fel:

$$C_{25}^3 = \binom{25}{3} = \frac{25!}{3!\cdot(25-3)!} = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{3!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1} = 2300$$

Figyelem: $\exists \binom{0}{0} = 1$ és $\exists \binom{n}{0} = 1$

Oka: egy *n* elemű halmazból üres halmazt egyféleképpen tudok kiválasztani. Ugyanígy egy üres halmazból is.

De mivel tudjuk, hogy 0!=1, ezért ki is számolhatjuk őket:

c) Példák

(i) A H={1;2;3;4;5} halmaznak hány 3 eleműt részhalmaza van? Írjuk is fel őket!

Mindegyik részhalmazból egy db. reprezentáns számhármast választok ki. A módszere: mindig növekvő sorrendbe rendezem!

szimg.hu

(ii) 10 pont maximum hány egyenest definiál? (Vagyis egyik három sem kollineáris.)

(iii) Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 4-esem lesz a 6-os lottón? (45 / 6)

Figyelem: a legfeljebb/legalább szó sok esetben…

(iv) Hányféleképpen lehet 6 diákból 5-öt kiválasztani, ha nem számít a sorrendjük? Írjuk is fel őket.

(v) A sarki fagylaltosnál csoki-, eper-, feketeribizli-, málna-, erdei-gyümölcs-, áfonya- és szederfagylalt van mindennap. Hányszor vagyunk kénytelenek fagyizni, ha ki akarunk próbálni minden különböző gombócokból álló két-, három-, illetve négygombócos összeállítást (ha a sorrend nem számít)?

szimg.hu

(vi) Mi a valószínűsége annak, hogyha véletlenszerű lépek jobbra-le vagy balra-le, akkor úgy olvasom ki a VAKCINA szót, hogy épp a megjelölt ***A*** betűn Fejezem be?

V	A	K	C	I	N	A
A	K	C	I	N	A	
K	C	I	N	A		
C	I	N	A			
I	N	**A**				
N	A					
A						

(vii) Hány olyan totó eredmény lehet, amelyben van legalább 3 db. x?

(viii) 10 sík hány különböző pontot határoz meg? „Sarokpont” – mint a szoba 3 falának közös sarka – *ahová a pók elbújik* ☺!

(ix) 10 különböző magasságú gyerek van. Egymás után kiszólítok 4-et.
Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan csökkenő magasság-sorrendben szólítom ki őket?

szmg.hu

2) Az ismétléses kombináció – a sorrend nem számít - nem minden elem szerepel – egy elem akár többször is

a) Alappéldái

Kockapóker: egyszerre 5 kockával dobunk - lehet az eredmény: 1,1,1,2,6 stb. (Vagy ötször dobunk egymás után, de nem számít a sorrend)

Cukrászda: 4 típusú sütemény, 7 db. Hányféle összeállítást vehetek? (A,B,C,D)
Pl.: AABBBCD, v. AAAAAAD.

Mihez van ez közel? Nyilván kevés köze van a permutációhoz, illetve a variációhoz is: hiszen az elsőnél 1-1 et számolok, a másodiknál számít a sorrend.

Nyilván: AABBBCD ≡ BBBAADC
Vagyis érdemes „ABC" sorrendbe tenni, hogy ne válasszuk kétszer ugyanazt.

Hogyan lehetne valamely módszert kitalálni, amely megszámlálható, és minden lehetőséget megad, és mindegyiket egyszer.

AABBBCD =␣␣○␣␣␣○␣○␣
AAAAAAD = ␣␣␣␣␣␣○○○␣
BBBBDDD =○␣␣␣␣○○␣␣␣

Az első karika előtt lesznek az A jelek, a második előtt a B-k, a harmadik előtt a C-k és végül a D-k.

Vagyis látható, hogy 1-1-ilyen jelsorozatból egyértelműen visszafejthető egy-egy összeállítás. Sőt: minden jelsorozatnak egyértelműen megfelel egy összeállítás, és minden összeállításhoz egyértelműen tartozik egy jelsorozat.

Vagyis most már csak azt kell megszámolni, hány ilyen jelsorozatom lehet:
Nyilván: A típusszám: 4, ehhez 4–1=3 elválasztó karika kell, és 7 elemet kell szétválasztani: vagyis *összesen 7+4–1 db. helyen kell elhelyezni vagy a 7 elemet, vagy a 3 elválasztót (mindegy…)*

$C_4^{7,i} = \binom{4+7-1}{7}$ Úgy is lehet, hogy az „elválasztókat kell elhelyezni": $\binom{4+7-1}{3}$

b) Definíció + Tétel

Definíció: Ha *n* különböző típusú elemből úgy állítunk össze egy *k* elemű elemcsoportot, hogy abban az egyes típusok többször is szerepelhetnek, akkor az *n* elem egy *k*-ad osztályú **ismétléses kombináció**ját kapjuk.
Vegyük észre, hogy a típusszám (*n*) lehet akár kevesebb is, mint *k* (az elemcsoport száma), hiszen egy típusból bárhány elemem lehet.

Áll: *n* elem *k*-adosztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

szmg.hu

c) Példák

(i) Írjuk fel az A,B,C elemekből álló, 2 osztályú összes ismétléses kombinációját!

(ii) Egy négytagú család telefonja kétszer szólalt meg egy estén. Számítsuk ki, hányféle változatban vehették fel a kagylót, ha ugyanaz a személy kétszer is felvehette, és a sorrendet nem vesszük figyelembe?

Írjuk is föl a lehetséges megoldásokat:

(iii) Ha a lottóhúzáskor vissza lehetne tenni a kihúzott számokat, akkor hányféle kimenet lenne lehetséges?

VI. Egy kis összefoglaló

1) Összefoglaló táblázat – elemi kombinatorika

<table>
<tr><td colspan="6">SZÁMÍT A SORORREND?</td></tr>
<tr><td colspan="4">igen</td><td colspan="2">nem</td></tr>
<tr><td colspan="4">MINDET SORBATESZZÜK?</td><td colspan="2" rowspan="3">Egy elem csak egyszer választható?</td></tr>
<tr><td colspan="2">igen</td><td colspan="2">nem</td></tr>
<tr><td colspan="2">MINDEN ELEM KÜLÖNBÖZŐ?</td><td colspan="2">MINDEN ELEM KÜLÖNBÖZŐ?</td></tr>
<tr><td>igen</td><td>nem</td><td>igen</td><td>nem</td><td>igen</td><td>nem</td></tr>
<tr><td>Ismétlés nélküli permutáció</td><td>Ismétléses permutáció</td><td>Ismétlés nélküli variáció</td><td>Ismétléses variáció</td><td>igen</td><td>nem</td></tr>
<tr><td>Az NBI sorrendje</td><td>Anagrammák</td><td>Az első három helyezett</td><td>TOTO</td><td>LOTTÓ</td><td>CUKRÁSZDA</td></tr>
<tr><td>n!</td><td>$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$</td><td>$\frac{n!}{(n-k)!}$</td><td>$n^k$</td><td>$\binom{n}{k}$</td><td>$\binom{n+k-1}{k}$</td></tr>
</table>

szmg.hu

2) Vegyes példák

a) 12 ember hányféleképp állhat sorba?
Hányféleképp oszthatok ki közöttük 4 tollat, ha:
(i) A tollak különbözők, és mindenki csak egyet kaphat.
(ii) A tollak különbözők, de egy ember többet is kaphat.
(iii) A tollak azonosak, de egy ember csak egyet kaphat.
(iv) A tollak azonosak, és egy ember többet is kaphat.

b) Hány olyan négyjegyű szám van, melyben
(i) különbözők a jegyek? (ii) Lehet azonos jegy is?

c) A tanár 5 lányt és 6 fiút akar leültetni moziban egy sorba, de két fiút nem ültethet egymás mellé. Hányféleképp tudja ezt megtenni, ha csak a „nemet” nézzük, illetve akkor, ha különbséget teszünk lány-lány között és fiú-fiú között?

d) Egy pakli magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 5 lapot úgy, hogy ász is és piros is legyen a kiválasztott lapok között?

szmg.hu

VII. A binomiális együtthatók, a binomiális tétel, a Pascal-háromszög

1) A szimmetria tulajdonság és két összegtulajdonság

a) Áll.: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Pl.: $\binom{90}{5}=\binom{90}{85}$

1. Biz. – Számolással

2. Biz. - Kombinatorikusan

b) Áll.: $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

1. Biz. – Számolással

2. Biz. - Kombinatorikusan

2) A binomiális tétel

A tétel: $a;b\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ és $a+b\neq 0$; $n\in \boldsymbol{N} \Rightarrow$

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$

Biz: $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)(a+b)$, ahol n db tényező van.
A zárójeleket ha egyesével bontom fel, akkor látható, hogy minden zárójelfelbontás 1-gyel növeli a tagok fokszámát (a-val vagy b-vel szorozva). Így minden tag n-ed fokú lesz. Az általános tag: $a^{n-k}\cdot b^k$. Így összesen egy n+1 tagú összeget kapunk.

Hány db. $a^{n-k}\cdot b^k$ tag lesz? $\binom{n}{k}$. Ugyanis az összesen n db. tényezőből k db-ból veszünk ki b-t, a fennmaradó (n–k) db-ból pedig a-t. Tehát annyi ilyen tagunk lesz, ahányféleképpen n tényezőből kiválasztható k.

szmg.hu

Gyakorlása: $(a+b)^5$; $(a+3)^6$; $(2a+5)^7$; $(3a-4b)^7$ Írd föl mindegyikből a 2. és 4. tagot!

3) A binomiális együtthatók összege

Áll.: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

4) A binomiális együtthatók és a prímek

Áll.: $p \,\Big|\, \binom{p}{k}$ Vagyis Így a Pascal háromszögnél a prím „sorszámú” sor minden tagja (kivéve az első és utolsó) osztható a prímsorszámmal…

szmg.hu

VIII. Összetettebb feladatok, gyakorlás

- 6 kártyára a 0,1,2,3,4,5 jegyek vannak fölírva. Ha visszatevés nélkül kihúzok egymás után hármat, és ezeket a húzás sorrendjében leírom, akkor mi a valószínűsége annak, hogy egy háromjegyű, páros számot kapok? (Ne feledd, a 032 az nem háromjegyű…)

  1. MO.: 3.: 0: V_5^2. 3.: 2v.4, ekkor az 1. helyre 4-ből 1-et, majd a 2. helyre is 4-ből egyet:

  Össz: $V_5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 52$ P(3. jegy 0)=$\frac{52}{V_6^3} = \frac{13}{30}$

  2. Mo.: Először a harmadikat húzom, utána az elsőt.

  P(3-adik 0)=$\frac{1}{6}$

  P(3-adik 2 első nem 0)=$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}$ P(3-adik 4 első nem 0)=$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}$

  $P = \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{30}$

- Hány lakosú az az ország, ahol biztos van három azonos fogazatú ember? (32 fogból van - nincs fog)

- Az 1,2,3,4,5,6 számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben az 5-ös előfordul.

- Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben pontosan 2 különböző számjegy szerepel.

szmg.hu

- Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között a) legalább 7 zöld b) legfeljebb 7 zöld

- 9 gyerek 3 csónakba ül (3 személyesek a csónakok) Hányféleképpen lehet, ha nem számít 1-1 csónakban a sorrend, és a csónakok egyformák.

- Van 6 fehér és 3 fekete golyó. Hányféleképpen helyezhetem őket sorba, ha két fekete nem kerülhet egymás mellé?

szmg.hu

- Van 7 piros és 3 fehér, egyébként egyforma golyó. Hányféleképpen lehet őket sorba tenni, hogy ne legyen két fehér egymás mellett?

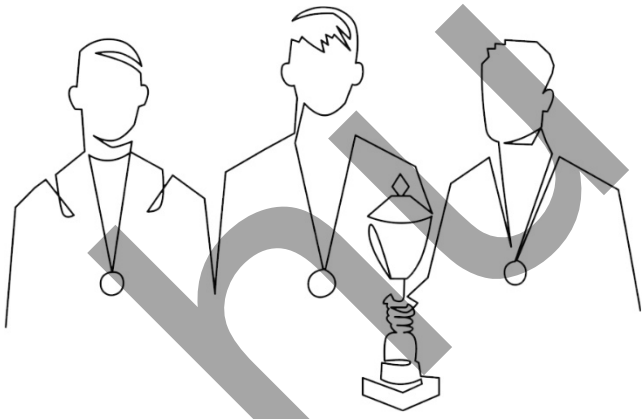
- Állítás: $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\ldots+\binom{100}{2}=\binom{101}{3}$

- Hányféleképpen lehet 15 diákot 5 egyforma, háromszemélyes kenuba beültetni, ha egy csónakon belül nem számít a sorrend?

- Igazoljuk, hogy három egymást követő pozitív egész szám faktoriálisainak összegét úgy is kiszámíthatjuk, hogy a legkisebb szám faktoriálisát megszorozzuk a legnagyobb szám négyzetével!

szmg.hu

- Hány ember indult azon a sportversenyen, ahol az arany-, ezüst-, bronzérmek kiosztása 504-féleképpen történhetne?



- * Egy tesztes versenyen 30 kérdés mindegyikére 5 különböző válaszból választhatunk, egy másik versenyen pedig 4 különbözőből (minden kérdésre csak egy jó válasz van). Maximum hány kérdéses lehet ez utóbbi teszt, ha azt szeretnénk, hogy a kitöltési lehetőségek száma kevesebb legyen, mint a 30 kérdésesé?

szmg.hu

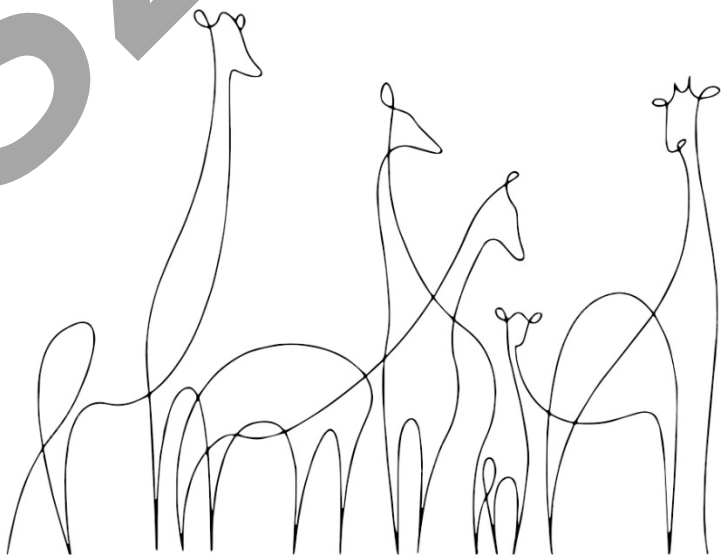
IX. Invariáns feladatok

- Tekintsük az első 30 pozitív egész szám összegét, majd tetszőleges számú tag előjelét változtassuk meg. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy a kapott összeg 300 legyen?

- Egy asztalon van 24 papírlap. Közül néhányat 10 részre vágunk, majd megint néhányat 10 részre vágunk (lehet már vágottat is tovább vágni). Kaphatunk-e 2006 db-ot a végén?

- Egy táblára felírtuk az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk 2 számot, majd felírjuk a különbségét. Ezt kilencszer megtesszük. Lehetséges-e, hogy a fennmaradó szám a 0 legyen?

szmg.hu



Számelmélet – Prímek – Diofantikus egyenletek – Polinomok

I. A prímek

1) Definíció

Igazi definíció: Azt mondjuk, hogy egy $p \in \mathbf{N}$ szám prím, ha $1<p$ és $\forall a;b \in \mathbf{Z} \rightarrow p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$. *Ennek következménye*, hogy p-nek önmagán és az egységen kívül nem létezik osztója!

Iskolai definíció: … $p \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$ prím, ha az egységen és önmagán kívül $\nexists$ osztója.

2) Az Eratoszthenész féle szita

Prímszám vadászat Valójában csak befogás, mert nem lőhetők ☹									
~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3) A prímek száma, típusa

a) Állítás: végtelen sok prímszám létezik.

Biz.: Indirekt: tfh. n db. van: $p_1 \ldots p_n$. Nézzük.: P:=

Ekkor $\nexists k \rightarrow p_k | P$. Így vagy P egy új prím, vagy van az eddigieken kívül prímosztója…

b) Állítás: végtelen sok 4k–1 alakú prím létezik.

Biz.: Ind.: tfh. n db. van. P:=$4 \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i - 1$ –et

Ekkor $\nexists k \rightarrow p_k | P$.

Ugyanakkor van 4k–1 alakú prímosztója,

hiszen ha csak 4k+1 alakú lenne, akkor azok szorzata is 4k+ 1 alakú lenne.

c) Tétel (erős): végtelen sok 4k+1 alakú prím van.

d) Tétel (erős): bármely 1-nél nagyobb természetes szám és kétszerese közt $\exists$ prím.

szmsl.hu

4) Prímek sűrűsége

a) Áll.: Bármely nagy hézag lehet két szomszédos prím között.

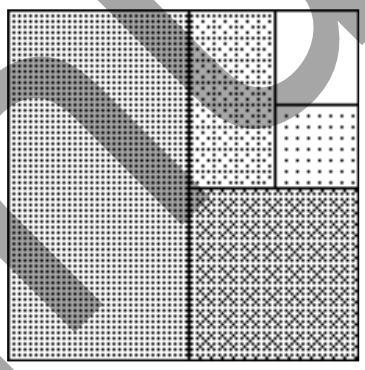
b) Tétel (erős): Prímek reciprokának összege bármilyen számnál nagyobb lehet, ha elegendő prímet (különböző) adunk össze.

Pedig:

Állítás: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$

1. Áll.: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow S_n < 2$.

Bizonyítása: lásd ábra



2. Áll.: $k \in \mathbf{N} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbf{N} \rightarrow S_n > 2 - \frac{1}{k}$

Vagyis a prímek a 2 hatványainál sűrűben vannak

5) Néhány kérdés és érdekesség a prímekkel kapcsolatban

- Ikerprímek:

Def.: a; a+2, ha mindkettő prím, akkor ikerprímeknek hívjuk őket.

Sejtés: ∞ sok ikerprím-pár van.

C. Mersenne-prímnek nevezzük a kettő-hatványnál eggyel kisebb, azaz a $2^n - 1$ alakban felírható prímszámokat, ahol n szintén prímszám.

Kérdéses a végtelen számuk. Mindössze 38 db. Mersenne prím volt ismert 2000-ig. 2008-ban: $2^{43\,112\,609}$-1 eredménye. Ez a szám 12 millió 978 ezer 189 db. számjegyből áll, és Mersenne prím.

2016: $2^{74\,207\,281}$-1, azaz 2 a 74 millió 207 ezer 281-ik hatványon mínusz 1.

2019-ig pedig 51 db. Általában ilyen alakúak a legnagyobb, megtalált prímek.

- Fermat-prímek: Nem tudjuk, hogy létezik-e végtelen sok $2^{2^n}+1$ (Fermat szám) alakú prímszám, sőt azt sem, hogy létezik-e végtelen sok ilyen alakú összetett szám.

Az első néhány Fermat szám: $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65\,537$;

De sajnos: $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$

D. Nem bizonyított az sem, hogy két négyzetszám között mindig van prímszám

E. A számelméletben L. Dirichlet nevezetes tétele azt állítja, hogy minden a, a+q, a+2q, a+3q,… számtani sorozatban végtelen sok prím van, feltéve, hogy a és q>0 relatív prímek

- Figyelem: még nem létezik prímképlet!!!

szmg.hu

II. Az egyértelmű prímfelbontás és következményei

1) A számelmélet alaptétele (újra)

Bármely egynél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható fel prímek szorzatára a tényezők sorrendjétől eltekintve – *bármilyen módon végzem is el a fölbontást.*

Minden 1-nél nagyobb természetes szám egyértelműn felírható:

n= $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3} \cdot p_4^{r_4} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} = \prod_{i=1}^{n} p_i^{r_i}$ alakban, ahol: az alapok (p_1;…p_n) szigorún monoton növekvő (tehát különböző) sorozatban álló prímek, és $r_i \in N^+$.

Ezt az előállítás az n szám „**kanonikus alakjának**” nevezzük.

2) Egy szám osztói

a) Hogyan lehet megállapítani a prímtényezős felbontásból, hogy egy szám páros-e vagy páratlan; hogy osztja-e a 45.

b) LNKO, LKKT: az egyértelmű kanonikus alakkal

c) Osztók száma, a d(n) fv.:

Áll.: k= $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ egész szám osztóinak a száma: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1)$

d) Összeszámlálásuk fa struktúra nélkül: párba-állítással, a gyökig.

Számoljuk össze a 60 osztóit párba állítással!

Meddig kell számolni általában? $\left[\sqrt{n}\right]$-ig.

e) A szultán és a rabok

A börtönben 100 cella van egymás mellett. A zár olyan, hogyha fordítanak egyet rajta, akkor ha zárva volt kinyílik, ha nyitva volt, bezárul. A szultán a következő utasítást adja az őrnek: az első nap menjen végig, és minden záron fordítson egyet. A második nap minden másodikon. A harmadik nap minden harmadikon. És így tovább. A századik nap után az szabadulhat, akinek nyitva a cellája. Kik szabadulnak ki?

szmg.hu

f) Az osztók szorzata: Áll: $n \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow$ az osztóinak szorzata: $n^{\frac{d(n)}{2}}$

g) Gondold át: $\left(\frac{a}{(a;b)};\frac{b}{(a;b)}\right)=1$ Vagyis: ha (a;b)=d, akkor ha a=k·d és b=m·d, akkor (k;m)=1

3) Racionális-irracionális számok

(i) Mutassuk meg, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

(ii) Mutassuk meg, hogy két racionális összege, szorzata racionális

(iii) Milyen számok lehetnek a következők: rac+irrac, rac·irrac, irrac+irrac, irrac·irrac

szmg.hu

4) Az egyértelmű prímfelbontásra, kanonikus alakra épülő feladatok

a) Melyik az a legkisebb n természetes szám, amire n/2 teljes négyzet, n/3 teljes köb, n/5 teljes ötödik hatvány?

b) [a;b]=540. Mi lehet a két szám?

c) 3 futó egyszerre indul egy pályán. Az egyik 6, a másik 9, a harmadik 10 perc alatt fut egy kört. Mikor találkoznak legközelebb a rajtvonalon.

III. Diofantoszi egyenletek és egyéb számelméleti feladatok

1) Diofantikus feladatok

a) Van-e olyan x, y pozitív természetes, hogy: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$

szmg.hu

b) * $2^x+1=3^y$

c) * $5^x-2^y=1$

d) Mely n-nekre lehet egyszerűsíteni és mivel: $\frac{7n-6}{2n+3}$

e) $x,y\in\mathbf{Z}$. Oldd meg: $xy+2x-y=10$

szmg.hu

f) $x,y \in \mathbf{Z}$. $2xy-3x-3y=12$

g) Egy szigeten sárkányok élnek: 7 és 11 fejűek. 118 fejük van. Hányan élnek a szigeten?

h) * Adott $a,b,c \in N$ $a + b + c = abc$. Mennyi az a, b, c?
Alapgondolat: x;y természetesek esetén $x+y< xy$ (a legtöbb esetben).
Lássuk be először ezt: $x+y < xy \Leftrightarrow 0<xy-x-y \Leftrightarrow 0<(x-1)(y-1)-1 \Leftrightarrow 1<(x-1)(y-1)$
Vagyis látható, hogyha x és y közül az egyik legalább egy, a másik legalább 2, akkor már igaz az állítás..
Innen már ügyesebbek tovább tudnak lépni.

2) Egyéb számelméleti feladatok

a) Hány pozitív osztója van annak a legkisebb pozitív egésznek, amelynek tízszerese négyzetszám, 6-szorosa köbszám.

szmg.hu

b) Kell $a \in \mathbf{N} \rightarrow a; a+7; a+17$ prím.

c) Lehet-e négyzetszám a következő: p prím. $k=7p^2+1$

d) Lehet-e négyzetszám: $x^2+2x+18$

e) Lehet-e négyzetszám: $16x^4+105x^2+169$

IV. Polinomok

1) Definíciók

A polinom egy olyan kifejezés, amelyben konstansok, változók és a következő műveletek szerepelhetnek: összeadás, kivonás, szorzás. Általános alakja:

$\sum_{i=n}^{0} a_i x^i$, ahol $n \neq 0$.

Fokszáma egyenlő a benne szereplő legmagasabb fokú nem 0 együtthatójú tag fokszámával. $gr(x^3+2x^2-1)=3$ (gr=grádus)

Helyettesítési érték: A polinom helyettesítési értéke az a szám, melyet úgy kapunk, hogy a változók helyére konkrét értékeket helyettesítünk be és kiszámoljuk a polinom értékét.

A polinom gyöke a benne szereplő változók olyan értéke, amelynél a polinom helyettesítési értéke 0. A polinom gyökeinek száma megegyezik a fokszámával, de nem minden esetben lesz az összes gyök valós szám és előfordulhat, hogy két v. több gyök megegyezik. (kétszeres-többszörös gyök)

szmg.hu

2) Egészegyütthatós polinomok gyökei

Racionális együtthatós polinom: $P(x)=\sum_{i=n}^{0} r_i x^i$, ahol $r \in \mathbf{Q}$. Ez – gyökök vesztése nélkül – átalakítható egész együtthatóssá: $r_i=\frac{p_i}{q_i}$ esetén: $P'(x)=[q_1;q_2;\ldots;q_n]\cdot P(x)$

Primitív egészegyütthatós polinom: Olyan polinom, ahol: $[a_1;a_2;\ldots;a_n]=1$

Tétel: ha egy egészegyütthatós primitív polinomnak $\exists$ racionális gyöke: $\frac{p}{q}$, ahol $(p;q)=1$, akkor annak számlálója osztja a konstans tagot, nevezője pedig a főegyütthatót.

Bizonyítás:

Ha $\frac{p}{q}$ gyök (nyilván relatív prímek), akkor:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\ldots+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^1+a_0=0$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt q^n-nel

$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q^1+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\ldots+a_2p^2q^{n-2}+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$

Mivel az első n tagot osztja $p \Rightarrow p \mid a_0q^n \Rightarrow p \mid a_0$, mert $(p;q)=1$
Mivel az utolsó n tagot osztja $q \Rightarrow q \mid a_np^n \Rightarrow q \mid a_n$, mert $(p;q)=1$

Így például az $x^3-6x^2-x+30=0$ polinomegyenletnek ha van racionális megoldása, az csak egész lehet… Annak pedig akkor osztania kell a 30-at…

3) Polinomok osztása

Polinomok (maradékos) osztása:

$$\frac{2x^3+2x^2+3x+2}{x^2+1}=\frac{2x\left(x^2+1\right)+2x^2+x+2}{x^2+1}=\frac{2x\left(x^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)+x}{x^2+1}=2x+2+\frac{x}{x^2+1}$$

$2x^3+2x^2+3x+2 : (x^2+1)= 2x+2$
$-\quad \underline{(3x^3+2x)}$
$2x^2+x+2$
$-\quad \underline{(2x^2+2)}$
x

Vagyis: $2x^3+2x^2+3x+2 =(x^2+1)(2x+2)+x$

$$\frac{6x^3+13x^2-4}{2x-1}=\frac{3x^2\left(2x-1\right)+16x^2-4}{2x-1}=\frac{3x^2\left(2x-1\right)+8x\left(2x-1\right)+8x-4}{2x-1}=$$

$$\frac{3x^2\left(2x-1\right)+8x\left(2x-1\right)+4\left(2x-1\right)}{2x-1}=(3x^2+8x+4)$$

Vagyis: $(2x-1)(3x^2+8x+4)=6x^3+13x-4$

szmg.hu

Tovább:
$(3x^2+8x+4) : (3x+2) = (x+2)$
$\underline{-(3x^2+2x)}$
$6x+4$
$-(6x+4)$
$0\ 0\ 0$

Így: $6x^3+13x-4 = (2x-1)(3x+2)(x+2)$

Keressük meg: $P(x)=2x^3-x^2-7x+6$ gyökeit.
Mivel: $P(1)=0 \Rightarrow (x-1)$-gyel lehet osztani:

$2x^3-x^2-7x+6 : (x-1)=2x^2+x-6$	$2x^2+x-6 : (x+2)= 2x+3$
$2x^3-2x^2$	$2x^2+4x$
x^2-7x+6	$-3x-6$
$\underline{x^2-x}$	$-3x-6$
$-6x+6$	

Vegyük észre: először érdemes behelyettesíteni, és ha a behelyettesített szám 0-át ad, akkor osztható!
Vigyázat, nem minden polinom irreducibilis, amelynek nincs gyöke: x^4+4.

Milyen maradékot ad $A=16^{101}+8^{101}+4^{101}+2^{101}+1$, ha elosztjuk $2^{100}+1$-gyel?
1. Mo.:
$(2^{100}+1)|2^{400}-1 \Rightarrow (2^{100}+1)|\ 2^{404}-16$
$(2^{100}+1)|2^{300}+1 \Rightarrow (2^{100}+1)|\ 2^{303}+8$
$(2^{100}+1)|2^{200}-1 \Rightarrow (2^{100}+1)|\ 2^{202}-2$
$(2^{100}+1)|2^{100}+1 \Rightarrow (2^{100}+1)|\ 2^{102}+2$
$\Rightarrow A=(2^{404}-16)+ (2^{303}+8)+(2^{202}-2)+(2^{102}+2)+11$. Tehát 11 a maradék:

2. Mo.: Nemes egyszerűséggel osszunk le: $2^{100}+1$-gyel:
Kijön a 11 maradék.

szmg.hu

Milyen n-re lesz $n^5 + n^4 + 1$ prím?
Mo.:

$n = 1 \Rightarrow N = 3$	$= 3$
$n = 2 \Rightarrow N = 49$	$= 7 \cdot 7$
$n = 3 \Rightarrow N = 325$	$= 52 \cdot 13$
$n = 4 \Rightarrow N = 1281$	$= (3 \cdot 7) \cdot 61$
$n = 5 \Rightarrow N =$	$= 112 \cdot 31$

Látható: $n^2 + n + 1$ szerepel mindben.
Próbáljuk meg ez alapján szorzattá alakítani az eredeti polinomot!

szmg.hu

Halmazelmélet – Műveletek halmazokkal

I. Hatványhalmaz

1) A hatványhalmaz léte axióma

$\forall$A halmazhoz $\exists!$ $\mathcal{P}$(A) halmaz $\rightarrow$ x$\in$ $\mathcal{P}$(A)$\Leftrightarrow$x$\subset$A

Fogalmazzuk meg szavakkal, hogy mit is jelent ez a mondat.

Írjuk fel a következő halmazok hatványhalmazát:

A={☺; 4}

Ekkor: $\mathcal{P}$(A)= $\mathcal{P}$({☺; 4}) = {{ } ; {☺} ; {4}; A}

B={2; 5, 💣}

Ekkor $\mathcal{P}$(B)= $\mathcal{P}$({2; 5; 💣})=

2) Halmaz részhalmazainak száma – vagyis a hatványhalmaz számossága

a) Állítás: Egy 10 halmaznak ugyanannyi 6 elemű részhalmaza van, mint ahány 4 elemű.

b) Állítás: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, vagyis egy A halmaz részhalmazainak száma: $2^{|A|}$

Bizonyítását Teljes Indukcióval szokták; A Pascal-háromszöggel is láttuk.
Egy elfogadható gondolatmenet (a T.I. része):

0,1,2,3 elemre láttuk.
Nézzünk egy 4 elemű halmazt - hány részhalmaza van?
Nézzük pl. az első elemét – „a”.
Kétféle részhalmaz van: aminek az „a” eleme, és aminek nem.
Hogy kapom meg ezt a kétféle részhalmaz típust?

- Amiben nincs „a” elem
  Ha kiemelem az „a”, akkor a maradék 3 elemből az összes részhalmazt legyártom, vagyis azok száma 2^3.
- Amiben van „a” elem
  Fogom az „a” elemet, a maradék 3 elemből az összes részhalmazt legyártom, majd mindegyikbe beteszem az „a”t – így a számuk újra 2^3.
- Összesen tehát 2·23=24 a négyelemű halmaz részhalmazainak száma

És ezt a módszert bármeddig csinálhatjuk.

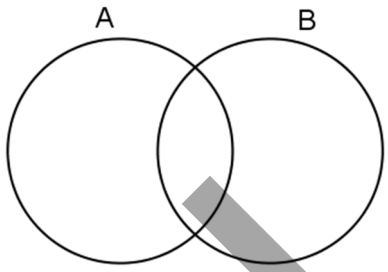
szmg.hu

II. Halmazműveletek

1) Halmazok Uniója – a „vagy” művelet: $p \vee q$

Axióma: $\forall$A és B halmazhoz $\exists!$ $A \cup B$ jelölésű halmaz melyre igaz a következő:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$



Tulajdonságok:

Kommutatív: $A \cup B =$

Asszociatív : $A \cup (B \cup C)=$

$A \cup \emptyset=$

$A \cup A=$

Írd föl: $\{0; 3;5\} \cup \{2;3;5;7\}=$

2) Halmazok Metszete – az „és” művelet : $p \wedge q$

Definíció: $A \cap B:=\{x \in A \mid x \in B\}$

Szavakkal:

Tulajdonságok:

Kommutatív: $A \cap B=$

Asszociatív : $A \cap (B \cap C)=$

$A \cap A=$

$A \cap \emptyset=$

3) Tulajdonságok, összefüggések

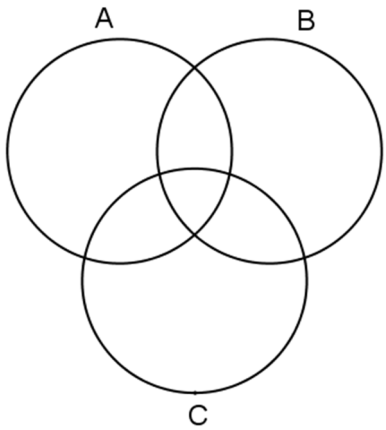
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B=A$

  Szemléltetés

- $(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$

  Szemléltetés

  A bizonyítás elve: két halmaz egyenlő, ha…



Bo. $\subseteq$ Jo.

$x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cap B)$ v. $x \in C$.

1. $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ és $x \in B \Rightarrow$

   $\Rightarrow x \in (A \cup C)$ és $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2. $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup C)$ és $x \in (B \cup C) \Rightarrow$

   $\Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

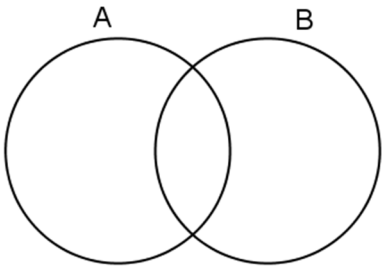
Bo. $\supseteq$ Jo.

$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1. $x \notin C \Rightarrow x \in A$ és $x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$
2. $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$

szmg.hu

4) Halmazok különbsége



Def.: $A\setminus B:=\{x\in A \mid x\notin B\}$

Szavakkal:

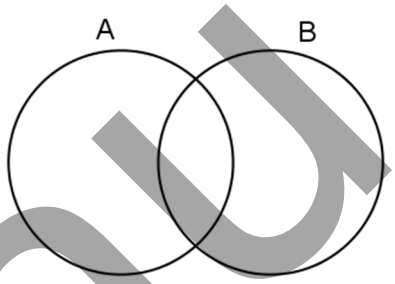
Konkrét példák:

$A:=\{1;2;3;4;5\}$ $B:=\{2;4;6\}$

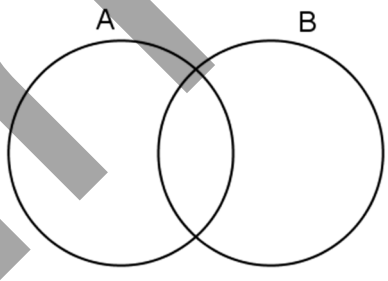
$A\setminus B=$ $B\setminus A=$ $A\setminus A=$

Tulajdonságok

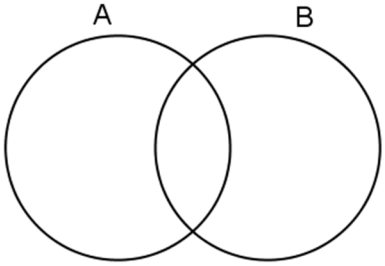
- $A\subseteq B\Rightarrow A\setminus B=\emptyset$



- $A\setminus A=\emptyset$
- $A\setminus\emptyset=A$
- $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$



- $A\setminus B=(A\cup B)\setminus B$



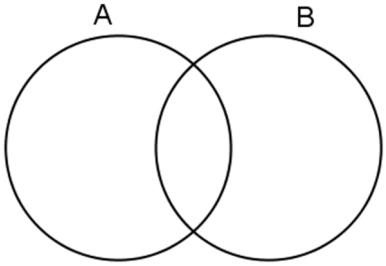
- $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$

5) Szimmetrikus differencia – a „kizáró vagy” – antivalencia művelet: $p\oplus q$

„vagy repülővel utazom vagy hajóval” (de csak az egyikkel)

Def.: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ (Olv.: „A delta B”)

Szavakkal:



A={1-20-ig a 2-vel oszthatók} B={1-20-g a 3-mal oszthatók}

$A\Delta B=$

Tulajdonságok

- $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
- $A\Delta B= B\Delta A$ (kommutatív)
- $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$ (Asszociatív) HF
- $A\Delta A=\emptyset$
- $A\Delta\emptyset= \emptyset\Delta A = A$

szmg.hu

6) A Komplementer halmaz – „Tagadás”

Def.: $A \subseteq H \Rightarrow \overline{A}_H := \{x \in H \mid x \notin A\} = H \setminus A$

Szavakkal:

Példa rá: K={1;2;3;4;5;6;7;8;9;10}, L={2;4;6;8;10}

$\overline{L_K} =$ $\overline{\overline{L}}_K =$

Áll: Általában: $A \subseteq H \Rightarrow \overline{\overline{A}}_H = A$

$\overline{H}_H = \emptyset$ és $\overline{\emptyset}_H = H$

A „De Morgan-azonosságok”

$\overline{A \cup B}_H = \overline{A} \cap \overline{B}_H \quad \leftrightarrow \quad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$

$\overline{A \cap B}_H = \overline{A} \cup \overline{B}_H \quad \leftrightarrow \quad \neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

szmg.hu

7) A Descartes szorzat

a) Definíció

$A\times B := \{(a;b)\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) \mid a\in A \wedge b\in B\}$

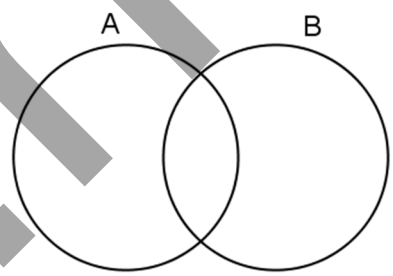
Vagyis az az A×B pontosan azokból a rendezett párokból áll, melyek első tagja az A, a második tajga a B eleme.

Példa rá: A={1;2}; B={1;3;5} A×B=

Táblázattal:

	1	3	5
1			
2			

Ábrából:



b) Üres halmazzal illetve önmagával vett Descartes szorzat
Ha az egyik halmaz üres, akkor a szorzat is üres: $\emptyset\times A=\emptyset$
Lehet tekinteni az A×A halmazt is: Def.: $A^2:=A\times A$

c) Az A×B és a B×A kapcsolata

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow (A\times B) \cap (B\times A)= \emptyset$

$A=B\Rightarrow(A\times B) = (B\times A)$
$A\setminus B=\emptyset$, $B\setminus A\neq\emptyset$.
Szemléltetés: A={1;2}; B={1;2;3}
A×B={(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);}
B×A={(1;1);(1;2);(2;1);(2;2);(3;1);(3;2);}
vagyis: $A\cap B\neq\emptyset$ és egyik sem része a másiknak.

Állítás:
$A\times B=(A\setminus B)\times B \cup (A\cap B)^2 \cup (A\cap B)\times(B\setminus A)$
Bizonyítás: Csak szemléltetjük. De.: Nyilván a 3 halmaz diszjunkt!

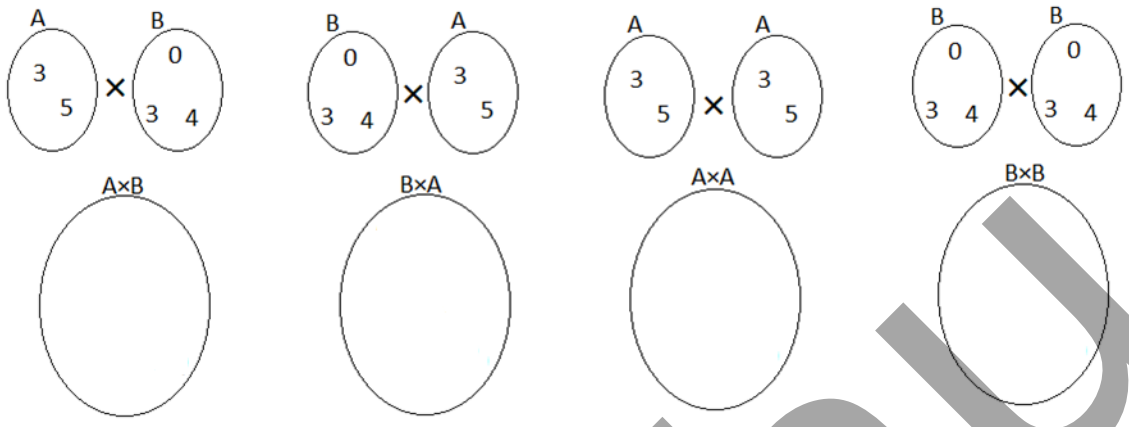
d) A Descartes szorzat számossága

Áll.: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$

szmg.hu

e) Gyakorlás

Töltsd fel a halmazokat az elemekkel
A={3; 5} B={0; 3; 4}



A={–1; 0; 2; 3} B={–1; 3; 5; 7; 9}. A Descartes szorzatok: A×A; B×B, A×B és a B×A
Minek (akár többnek) eleme a következő rendezett pár:

(3;5)∈ (7;0) ∈

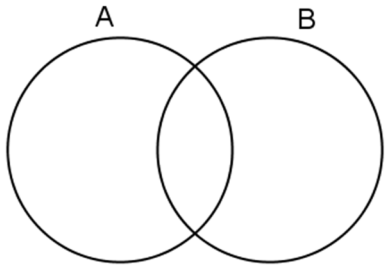
(0;0) ∈ (2;3) ∈

(–1; –1) ∈

III. A Logikai szita – Halmazok uniójának számossága

1) Bevezető

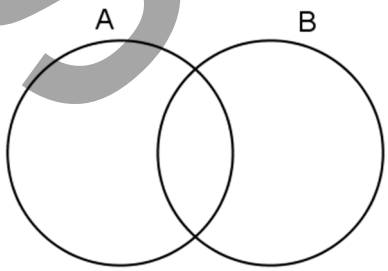
Hány db. 6-tal v. 10-zel osztható 3 jegyű szám van?

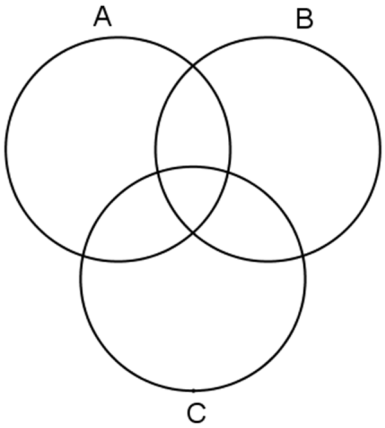


2) Általában

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$





szmg.hu

3) Gyakorlásuk

a) Hány 5-tel v. 6-tal v. 9-cel osztható 3 jegyű természetes szám van?

b) A 32 lapos magyar kártyából hányféleképp lehet kiválasztani 8 lapot (a sorrend nem számít) úgy, hogy legyen köztük ász is és piros is.

szmd.hu

IV. Vegyes gyakorlópéldák – érdemes rajzolni

- Adjon meg az A={10;20;30} halmazhoz olyan B, C és D halmazt, amelyre igazak az alábbi összefüggések!: $A \cup B=\{10;20;30;40;50\}$; $A \cap C=\{20\}$; $A \setminus D=\{\}$

- Határozza meg $A \setminus B$ és a $B \setminus A$ halmazt, ha $A=\{a;b;c;d\}$ $A \cup B=\{a;b;c;d\}$ és $A \cap B=\{a;c\}$

- Bizonyítsuk be, hogy az $A \cup B$; az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazok ismeretében egyértelműen meghatározható az A és a B halmaz.

- Milyen kapcsolat van az A és B halmaz között, ha $A \setminus B=\emptyset$ és $A \cup B=A$

- Határozzuk meg az A halmazt, ha $A \subseteq \overline{A}$

- Áll.: $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

szmg.hu

- $A \cup B=\{1;2;3;4;5;6\}$; $A \setminus B=\{2;4;6\}$ $A \cap B=\{1;3\}$ Kell az A és B halmaz.

- Áll.: $|A \cap B| \leq \frac{1}{2}(|A|+|B|)$

- Egy 30 fős osztályban 3 nyelvet tanulnak: angolt, latint, németet. Angolul 18-an, németül 26-an, latinul 14-en tanulnak. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet és 16-an pontosan kettőt tanulnak. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

- * Hányféleképpen lehet kiolvasni a táblázatból az „embertbarátjáról” gondolatot, ha csak jobbra és lefelé lehet haladni, de „lukra nem léphetünk.

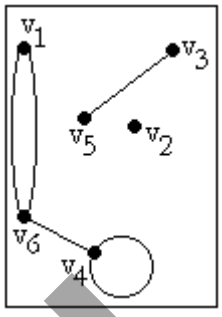
e	m	b	e	r	t	b	a	r	á	t	j
m	b	e	r		b	a	r	á	t	j	á
b	e	r	t	b	a	r	á	t	j	á	r
e	r	t	b	a	r	á		j	á	r	ó
r	t	b	a	r	á	t	j	á	r	ó	l

szmg.hu

Gráfelmélet

I. Definíciók - fogalmak

1) Gráf



A gráf pontok és élek halmaza, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy ∀ élre legalább egy és legfeljebb két pont illeszkedik.

pont = Vertex = szögpont = csúcs

él = Edge

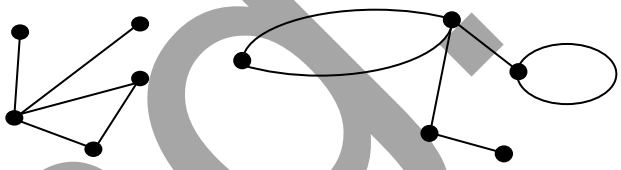
Párhuzamos él: Ha a gráf valamely két csúcsát egynél több él köti össze, akkor azt többszörös élnek nevezzük. Ha G-ben $e_1=(p;q)$ és $e_2=(p;q)$ és $e_1 \neq e_2$, akkor többszörös, párhuzamos élekről beszélünk. Pl.: $(v_1;v_6)$ kétszeres él.

Hurok él: hurokélnek nevezzük az olyan élt, amelynek a két végpontja ugyanaz. $e=(v_4;v_4)$.

Izolált pont: olyan pont, amelybe egyetlen él sem fut be: pl: v_2.

2) Fogalmak

Egyszerű gráf: ∄ párhuzamos és hurokél.



Véges gráf: pontjainak száma véges

Teljes gráf: **egyszerű** és minden pontból minden ponthoz vezet él.

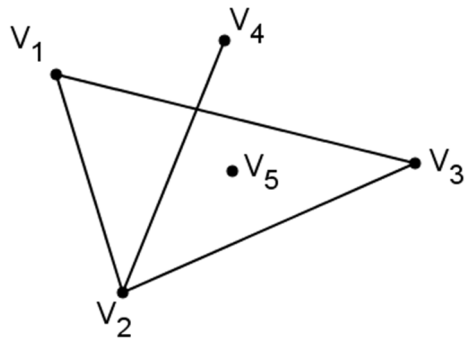
Rajzolj egy négypontú teljes gráfot!

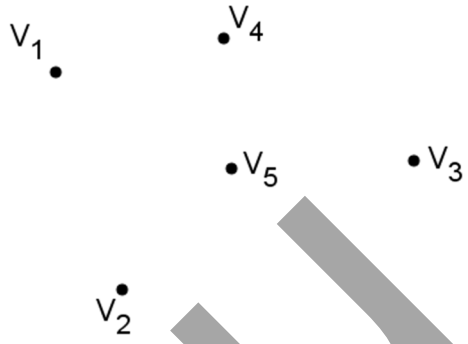
Hány éle van egy n pontú, teljes gráfnak?

szmg.hu

Komplementer gráf: ha egy n pontú **egyszerű G gráfot** kiegészítünk teljes gráffá, majd töröljük G éleit, akkor G gráf $\overline{G}$ komplementer gráfját kapjuk.

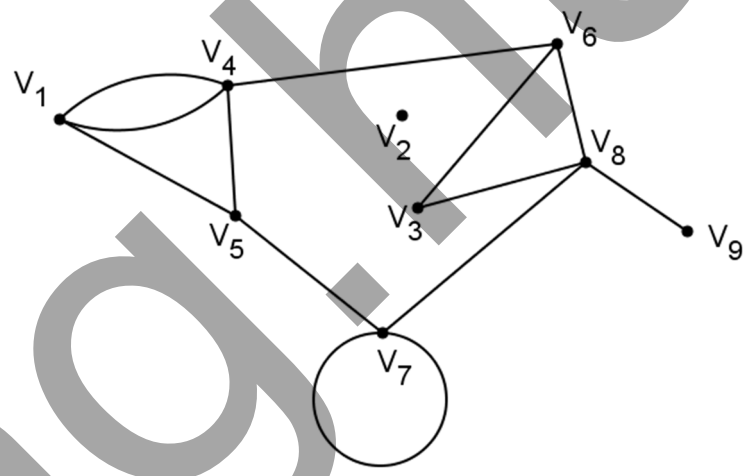
Egészítsd ki színessel teljes gráffá, majd rajzold le mellé csak a komplementerét!





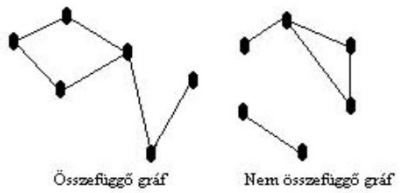
Fokszám, fok: egy *v* ponthoz illeszkedő élvégek φ(*v*) számát a *v* pont fokszámának nevezzük

Írd föl a csúcsokhoz a fokszámokat!

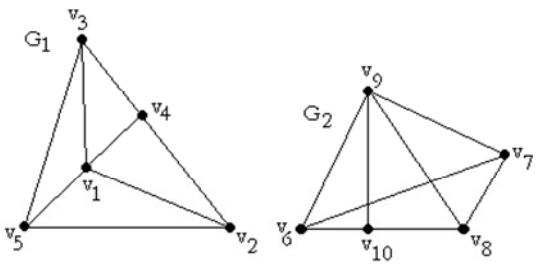


$\varphi(V_1)=$

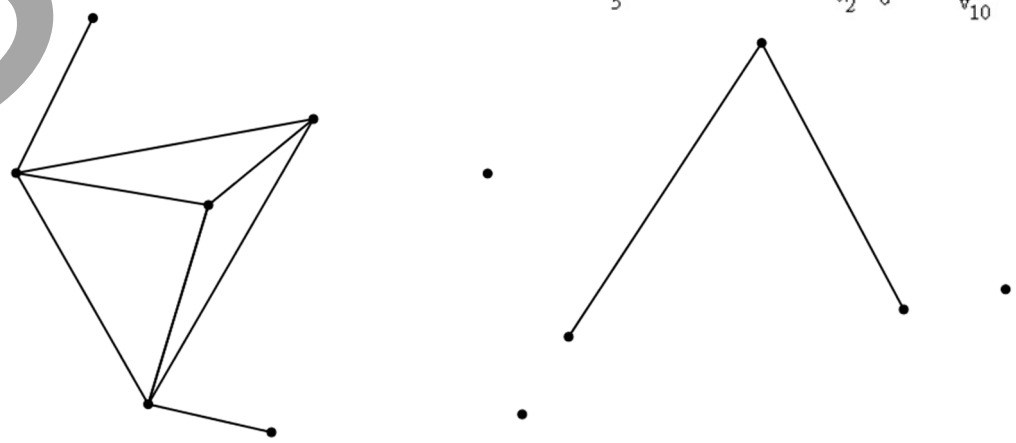
Összefüggő gráf: A gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely más pontjába élek mentén el lehet jutni.



Izomorf gráfok: ha a pontok és élek kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetőek: Pl.: G_1 és G_2 izomorfak. Egymást geometriai értelemben metsző élek metszéspontja nem csúcspont.



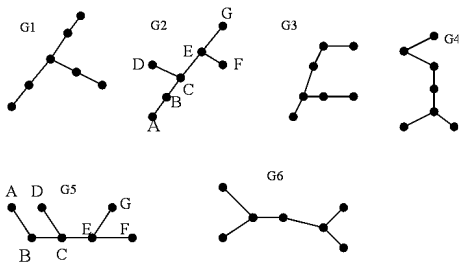
Rajzolj mellé egy vele izomorfot!



szmg.hu

II. Gráfok tulajdonságai

1) Az izomorfia vizsgálata



Először mindig célszerű a **pontok száma**, aztán az **élek száma**, aztán a **fokszámok** szerint szűrni. Most minden gráf 7 pontú és 6 élű, így ez nem segít, de nem tart sokáig megszámolni, és hátha… Aztán minden gráfban soroljuk a fokszámokat:

G_1: (1,1,1,2,2,2,3) G_2: G_3:

G_4: G_5: G_6:

Tehát fokszám szerint igazából kétfélék.

G_1: (1,1,1,2,2,2,3); G : G :

G : G : G :

2) Élszámok, fokszámok

a) Mennyi egy n pontú teljes gráf éleinek száma?

b) Paritás a gráfokban

Állítás: ∀ gráfban a fokszámok összege az élek 2-szerese, **így a fokszámok összege páros!**

Állítás: ∀ gráfban páros a páratlan fokú pontok száma.

Állítás: Egy társaságban van két olyan ember, aki ugyanannyi embert ismer (ott.)
Vagyis: A legalább 2 pontot tartalmazó egyszerű gráfnak ∃ 2 azonos fokú pontja.

szmg.hu

c) Egy 6 pontú egyszerű gráfban miért nem lehetséges a következő fokszámsorozat?

- 5; 3; 3; 2; 2; 1

- 5; 3; 3; 2; 2; 0

- 5; 5; 3; 3; 1; 1

d) * Az összefüggőség

- * Állítás: n pontú egyszerű gráfban az összefüggőség szükséges föltétele: n-1 él.

- * Állítás: Az összefüggőség elégséges föltétele egyszerű 2*n* pontú gráfban: Minden pont foka legalább *n* legyen:

- ** Állítás: Ha egy n pontú egyszerű gráfban $\binom{n-1}{2}$+1 él van legalább, akkor az összefüggő.

szmg.hu

3) Komplementer gráfok

a) Rajzoljuk meg az összes 5 pontú, 7 élt tartalmazó egyszerű gráfot (izomorfia erejéig!)

b) * Áll.: 6 ember közül biztos ∃ 3 olyan, aki ismeri egymást, vagy 3 olyan, aki nem ismeri egymást!

Átfogalmazva gráfokra:

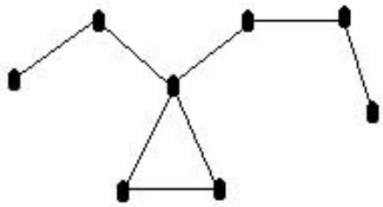
4) A gráf bejárása

a) Definíciók

Gráfvonal (vonal): Ha a G gráf éleinek $\{a_1;a_2\}\{a_2;a_3\}\ldots\{a_{n-1};a_n\}$ sorozatában az **élek nem ismétlődnek**, akkor G-nek e pont- és élsorozat alkotta részgráfját G gráfvonalának nevezzük. Tartsuk figyelemben, hogy a csúcsok ismétlődhetnek!

Nevezzük el a csúcsokat, és írjunk fel egy vonalat!

$\{v_{n_1};v_{n_2}\}\{v_{n_2};v_{n_3}\}\{v_{n_3};v_{n_4}\}\ldots\{v_{n_{m-1}};v_{n_m}\}$

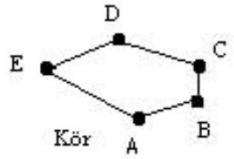


Vonal

szmg.hu

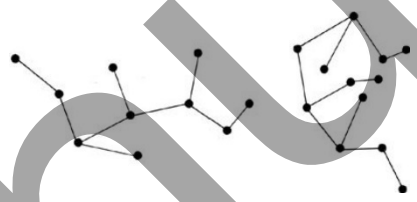
Zárt gráfvonal: az előbbi definíciónál ha a vonalnál:
$\{v_{n_1};v_{n_2}\}\{v_{n_2};v_{n_3}\}\{v_{n_3};v_{n_4}\}\ldots\{v_{n_{m-1}};v_{n_m}\}$ és $v_{n_1} \equiv v_{n_m}$

Kör: olyan zárt gráfvonal, ahol minden él és csúcs csak egyszer szerepel, kivéve a kiindulási csúcsot, mert egyben az az utoljára érintett csúcs is. (Mondhatni úgy is, hogy a cél úgy visszajutni a kezdőpontba, hogy minden élt és minden más csúcsot csak egyszer érintsünk, tehát egy speciális vonal.)



Ha egy zárt gráfvonalban minden csúcs foka kettő, akkor a zárt gráfvonalat körnek nevezzük.

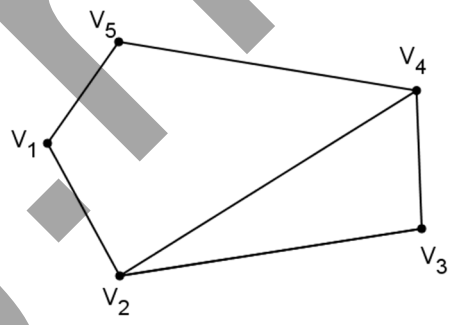
Fa: olyan összefüggő gráf, amelyben nincs kör. Ilyen például a családfa is.



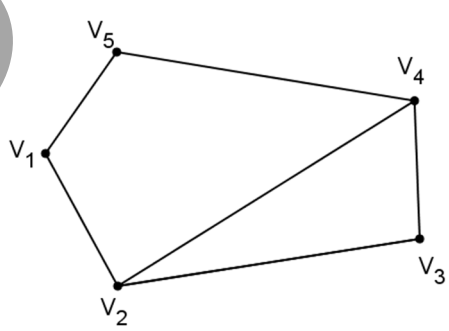
b) Gyakorlás

5 falut utak kötnek össze az ábrán látható módon.

- V_3-ból V_4-be hányféle módon lehet eljutni, ha egy úton csak egyszer járhatunk?

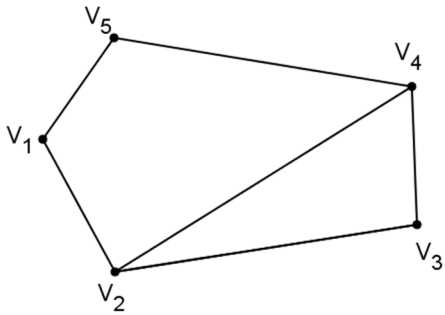


- V_1-ből V_3-ba hányféle módon lehet eljutni, ha egy úton csak egyszer járhatunk?

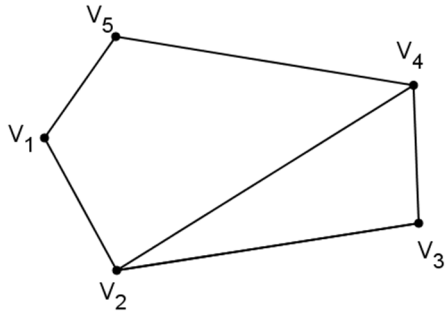


- Maximum hány utat lehet lezárni, hogy még mindegyikből mindegyikbe el lehessen jutni?

- Adj meg olyan két lezárást, hogy egy falu teljesen magára maradjon.



- Adj meg olyan két lezárást, egy falu se maradjon teljesen magára, de mégse lehessen bármelyikből bármelyikbe eljutni!



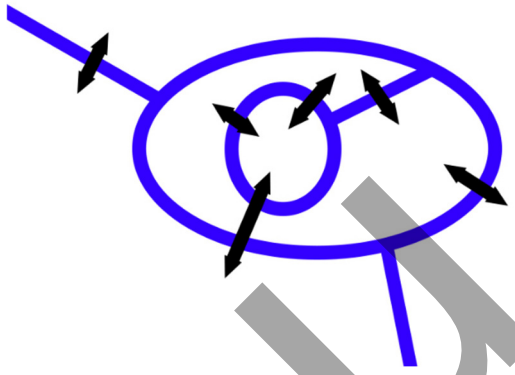
szmg.hu

III. Gyakorlás

1) Térképből gráf

Egy folyó északnyugatról délnek folyik. Szigetet és azon belül is szigetet képeztek ki. A nyilak a hidakat jelölik, melyek vége mutatja, miket kötnek össze. A hidak alatt van átjárás.

Szemléltessük gráffal a térképet!



2) Főbb kritériumok fokszámokra egyszerű gráfokban

a) Ha lehetséges, rajzolj egy olyan **hat pontú egyszerű gráfot**, mely csúcsainak fokszámai – Figyelem – ha rajzolsz, mindig a legnagyobb fokszámmal kezdd!

- 4;3;4;5;5;4 5;3;4;0;1,2

- 4; 5; 2;4;2;2 4, 4, 2, 2, 2, 2

b) A DÖK elnöksége 10 főből áll. A hetenkénti tanácskozás előtt néhányan kezet fogtak, néhányan nem. A DÖK tanárösszekötője hetente feljegyezte minden diáknál, hány másikkal fogott kezet. Mely heteknél tévedett biztosan?

- 3; 4; 6; 7; 6, 9; 5; 8; 7; 4

szmg.hu

- 2; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 9

- 0; 1; 2; 2; 3; 4;4 ;5 ;6 ;9?

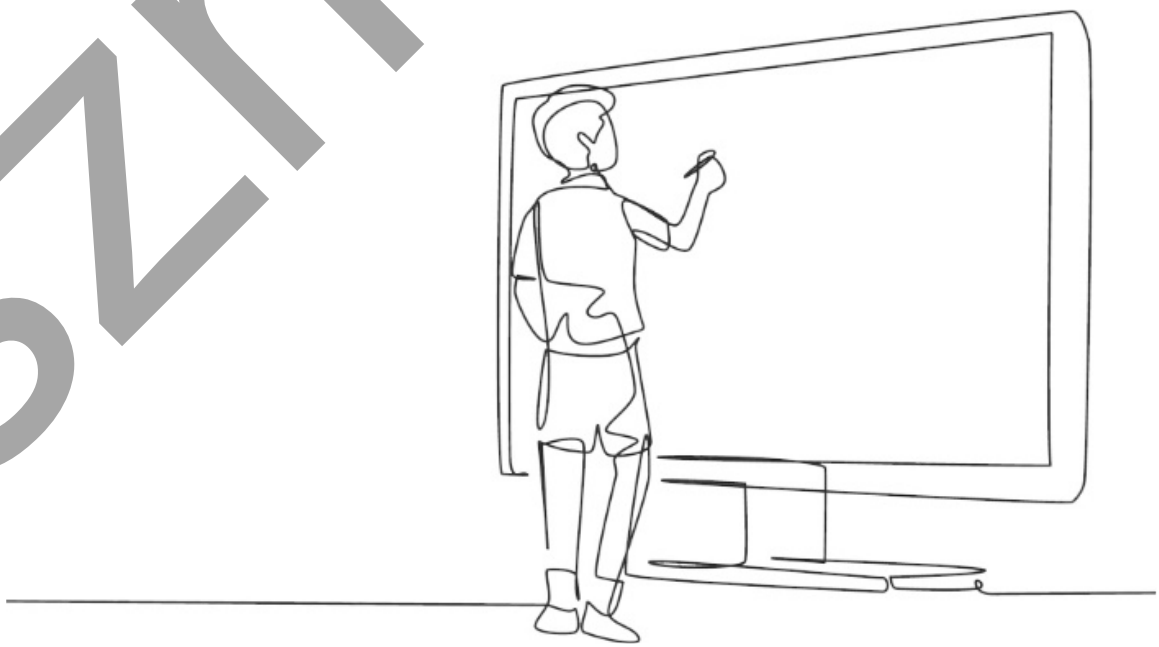
- 9; 6; 4; 9; 6; 9; 8; 9; 9; 3?

c) Rajzolj olyan négypontú egyszerű gráfot, melyben a fokszámok: 2;1;3;2;

szmg.hu

d) Egy 8 fős, úton bandukoló csoportot bevisz a rendőrség kihallgatásra. Megkérdezik, melyik hány másikkal ismeri egymást közülük. A tolmács a következőket mondja: 7;2;7;7;4;3;5;3. Sumákol-e valaki?

KÖVETKEZMÉNY: Ha egy n pontú egyszerű gráfnak van k db n - 1 -ed fokú pontja, akkor az összes többi pont fokszáma legalább k kell, hogy legyen.



szmg.hu