

Matematika
Algebra HF Munkafüzet
v3.2 – Megoldással

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2023. december

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. © Rajzok: Szakál Ádám Sch.P. © és a net...

TARTALOMJEGYZÉK

TARTALOMJEGYZÉK.....	3
SZÁMOLÁS	9
I) Összeadás - kivonás	9
1) Összeadás.....	9
2) Összeadás táblázatban – soronként haladj előre	9
3) Kivonás	10
4) Táblázatban.....	11
5) Negatív számok hozzáadása számhoz, illetve kivonása számból	12
6) Táblázat.....	12
7) Gyakorlás	13
8) Nagyobb számok összeadása - kivonása	13
II) Szorzás.....	14
1) Szorzás – úgy ahogy az órán tettük!	14
2) Nullára, nullákra végződő számokkal történő szorzás, és gyakorlás.....	14
3) Gyakorlás	15
4) A 10-és 20 közötti számok szorzása.	15
5) A négyzetszámok 1-25-ig	16
6) Az 5-re végződők négyzete	17
7) Gyakorlás	17
III) A Prímszámok – és a hatványozás alapjai.....	18
1) Prímszámok definíciója.....	18
2) Hatványok – prímszámhatványok.....	19
3) Hatványok és négyzetszámok gyakorlása visszakereséssel	20
4) Azonos alapú hatványok szorzata	21
5) Ismétlő gyakorlás	22
IV) Egy kis számelmélet – alapfokon	23
1) Oszthatósági szabályok.....	23
2) Osztások egyjegyű számokkal és 10-zel, fejben	24
3) Számok prímfelbontása	25
4) Két szám LNKO-ja alapszinten	27

5)	Újabb oszthatósági szabályok	28
6)	A 0-ra végződés	28
7)	Két természetes szám Legkisebb Közös Többszöröse – LKKT-je	28
8)	Fejben osztás gyakorlása	30
V)	Törtek	31
1)	Fajtáik	31
2)	Egymásba alakításuk - később	31
3)	Egyszerűsítés	31
4)	Törtek összeadása-kivonása: KÖZÖS NEVEZŐRE HOZÁS BŐVÍTÉSEL	31
5)	Számok, törtek reciproka	34
6)	Törtek szorzása	34
7)	Osztás	37
8)	Reciprok	37
9)	Gyakorlásuk	38
10)	Fejezd be a mondatot: „Aki nem egyszerűsít,	39
VI)	Tizedes törtek	41
1)	Szorzás-osztás 10 hatványaival	41
2)	Mit is jelentenek a tizedes törtek?	42
3)	Műveletek valódi törtté alakítás nélkül	43
4)	Átalakítás valódi törtté	45
VII)	Zárójelek kezelése	47
1)	Műveleti sorrend	47
2)	Tagok, tényezők	47
3)	Zárójelek kezelése	48
VIII)	Emeletes törtek – és a törtek gyakorlása	48
1)	Az emeletes törtek (örömködő ördögök köbön)	48
2)	Oszthatóság emlékeztető	49
3)	Törtek – minden mennyiségben	49
IX)	Ismétlés	52
A SZÁMOK ÁTTEKINTÉSE		57
I)	A természetes számok köre	57
1)	Definíció - alapok	57
2)	A tízes és a kettes számrendszer – bevezetés	58

3)	Egyéb számrendszerek	59
4)	Műveletek a természetes számokon	60
5)	Egy kis számelmélet	61
6)	Osztók	63
7)	Négyzetszámok	66
8)	Számok osztóinak „keresgelése”	66
9)	LNKO	68
10)	Legkisebb közös többszörös	70
11)	Gyakorlás	72
II)	Az egész számok	74
1)	Definíció - alapok	74
2)	A részhalmazokról bővebben	76
3)	A – mindig – elvégezhető műveletek az egész számok körében	77
III)	A racionális számok és egy kicsit a valósokról	77
1)	Definíció: racionális számok	77
2)	Az eddig megismert számhalmazok viszonya.....	79
3)	A racionális számok felírása	79
4)	Az elvégezhető műveletek a racionális számok testében	80
5)	Valóság.....	81
IV)	Egy kicsit a halmazokról	81
1)	Halmaz megadása:.....	81
2)	A Venn-diagram	81
3)	Halmaznak minden típusból csak egy eleme van.....	82
V)	Gyakorlás.....	82
VI)	Egyéb műveletek és relációk a racionális számokon	83
1)	Szám ellentettje és reciproka	83
2)	Szám és abszolútértéke	83
3)	Szám egészrésze	83
4)	Szám törtrésze	84
5)	Szám szignuma.....	84
VII)	Jelek.....	85
1)	Jelek neve.....	85
2)	Írd melléjük az értéket.....	85

3)	Számhalmazok kapcsolata.....	85
4)	Egyéb jelek a számoknál.....	86
5)	Gyakorlás	86
HATVÁNYOZÁS		88
I)	Definíció és azonosságok	88
1)	Bevezetés.....	88
2)	Definíció.....	88
3)	Hatvány szorzat alakban – szorzat hatvány alakban.....	89
4)	Azonos alapú hatványok szorzata	89
5)	Azonos alapú hatványok hányadosa és az <i>egész kitevők</i>	90
6)	Azonos alapú, egész kitevőjű hatványok szorzata, hányadosa.....	92
7)	Szorzat hatványa	94
8)	Tört hatványa	95
9)	Hatvány hatványa.....	95
10)	Összeg, különbség hatványa	98
11)	Gyakorlás	98
II)	Számok normálalakja	99
1)	Bevezető	99
2)	Tíz hatványai.....	100
3)	Írd át normálalakra.....	100
4)	Írd át helyiértékes alakra a normál alakú számot	100
5)	Írd ide a normál alak definícióját szavakkal	100
	Def.: \forall nem nulla valós szám egyértelműen felírható olyan kéttényezős szorzatként, ahol az első tényező abszolút értéke az $[1;10[$ intervallumba esik, a második tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa.....	100
6)	Írd át normálalakba	100
7)	Műveletek normálalakra hozott számokkal	101
BETŰK HASZNÁLATA.....		104
I)	Bevezetés	104
1)	Alapok.....	104
2)	A műveletek kommutativitása, sorrendje, zárójelek	105
3)	Kifejezés értelmezés tartománya.....	105
4)	Írjuk fel jelekkel	105

5)	Számok jelzése	106
6)	Írd föl „általában”	108
7)	Változások, kapcsolatok, százalék	109
8)	Ügyes felírások – ügyelj a szimmetriára	110
II)	Műveletek algebrai kifejezésekkel: együttható-változó – helyettesítési érték, egyneműek 111	
1)	Elnevezések.....	111
2)	Helyettesítési érték.....	112
3)	Egynemű kifejezések összevonása - vond össze az egyneműeket.....	112
4)	Egytagúak szorzása	114
III)	Egyszerűbb egyenletek	116
1)	A mérlegelv bevezetése.....	116
2)	Egyenletek felállítása, megoldása - bevezető.....	117
3)	Egyenletek felállítása, megoldása - gyakorlás	118
4)	Egyenletek felállítása, megoldása – törtegyütthatók – még egyenletszorzás nélkül	119
IV)	Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval zárójel-fölbontás.....	120
1)	Szemléltetés.....	120
2)	Egytagú tényezővel több tagú tényező szorzása.....	120
3)	Helyettesítési érték - behelyettesítés.....	122
4)	Egytagok osztása - egyszerűsítsünk.....	122
5)	Egyenletmegoldás.....	122
V)	Több tag szorzása több taggal	123
1)	Bevezetés, szemléltetés.....	123
2)	Többtagúak szorzása.....	124
3)	Két tag összegének, különbségének a négyzete	128
4)	Ismétlés: bontsd föl, majd vonj össze – figyelj – nagy zárójelek!!	129

SZORZATTÁ-ALAKÍTÁS 130

I)	Szorzáttá alakítás.....	130
1)	Csak szám emelhető ki; a főegyüttható pozitív legyen!.....	130
2)	Betű is kiemelhető	130
II)	Teljes négyzet.....	134
1)	Szorzáttá alakítás előtt mindent kiemelünk!.....	134
2)	Mindent kiemelünk, a főegyüttható pozitív, csökkenő fokszám stb.	134

III)	Egy különleges alak $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	135
1)	Odafele – végezd el a szorzást – CSAK AZ EREDMÉNYT ÍRD LE!	135
2)	Idefele - alakítsd szorzattá.....	136
3)	Egyelőre intuíciót kívánó alak $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$	137
IV)	Egyenletek.....	138
1)	Egyszerűbb egyenletek.....	138
2)	Törtés egyenletek – KUNKORI!.....	139
3)	Egyenlet = állítás.....	141
4)	Egyenletmegoldás szorzattá alakítással	142
5)	Oldd meg	142
V)	Algebrai törtek	145
1)	Definíció.....	145
2)	Kezelésük.....	145
3)	Add meg a következő kifejezések ÉT-át, majd egyszerűsíts – ahol lehet	147
4)	Egyszerűsíts!	148
5)	Add meg az ÉT-t, majd egyszerűsíts	149
6)	Törtek összevonása – szorzattá alakítása	150
VI)	Szöveges egyenletek.....	151

HATVÁNYOZÁS

I) Definíció és azonosságok

1) Bevezetés

Írd a szorzatot hatványalakban!

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \quad (-5)(-5)(-5)(-5) = 5^4$$

Írd fel a hatványt szorzat alakban és számold is ki!

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \quad 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

2) Definíció

$$(2^3)^2 = 2^6 \qquad (5^3)^3 = 5^9$$

Írd föl jelekkel (minden állítás igaz!)

Egyértelműn létezik olyan egész, amelynek a köbe -8 .

$$\exists! x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^3 = -8$$

Van olyan természetes szám, melynek a reciproka is természetes.

$$\exists y \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{1}{y} \in \mathbb{N}$$

Bármely nem 0 racionális szám reciproka is racionális.

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$$

Ha egy szám törtrésze 0, akkor az a szám egész.

$$\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Nincs olyan szám, mely nagyobb az abszolút értékénél.

$$\nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow x > |x|$$

Az a és b egész. Ekkor azt mondjuk, hogy $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha van olyan egész,

mellyel a -t megszorozva b -t kapunk. (Ez az oszthatóság definíciója!)

$$a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Ekkor: } \dots a \mid b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \cdot a = b$$

Írd föl a valódi részhalmaz definícióját jelekkel!

$$A \subset H \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \rightarrow y \notin A)$$

3) Hatvány szorzat alakban – szorzat hatvány alakban

Írd föl szorzat formájában, és számold is ki, ahol szám van. (pl.: $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$)

$$1^4=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=1$$

$$a^3=a\cdot a\cdot a$$

$$0^3=0\cdot 0\cdot 0=0$$

$$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=81 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{125} \quad (-5)^2=(-5)\cdot(-5)=25$$

$$(-2)^7=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-2^7=-128 \quad (-7)^3=(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)=-343$$

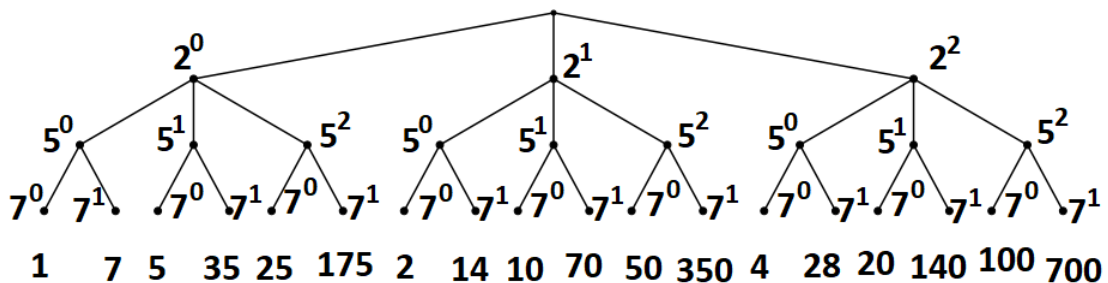
Számold ki kanonikus alakra hozással:

$$(98000 ; 7700)=(2^4\cdot 5^3\cdot 7^2; 2^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11)=2^2\cdot 5^2\cdot 7$$

$$[98000 ; 7700]=2^4\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11$$

Add meg a fenti két szám közös osztóit fa struktúrával (vagyis az LNKO osztóit).

A 2 miatt 3 felé, az 5 miatt 3 felé, a 7 miatt 2 felé ágazik a fa. Vagyis 18 kimenet lesz.



Mi lehet a „b”, ha:

$$(2^3\cdot 5^3\cdot 7^{10}\cdot 11^2;b)=2^3\cdot 5\cdot 7^{10}\cdot 11^2 \quad \text{és} \quad [2^3\cdot 3\cdot 5^6\cdot 11^4;b]=2^4\cdot 3\cdot 5^6\cdot 7^{13}\cdot 11^4\cdot 13$$

$$b=2^4\cdot 3^{0-1}\cdot 5^1\cdot 7^{13}\cdot 11^4\cdot 13$$

Írd föl hatványalakok szorzataként:

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x=3^4\cdot x^3$$

$$(-2)\cdot y\cdot(-2)\cdot y\cdot(-2)\cdot y\cdot y=-2^3\cdot y^4$$

4) Azonos alapú hatványok szorzata

a) Írd föl a szorzatot hatványalakban – és fejben számold is ki azt, amelyiket még tanultuk!

$$2^5\cdot 2^3=2^8=256$$

$$3\cdot 3^2\cdot 3^4=3^7$$

$$5^2\cdot 5^3\cdot 5^4=5^9$$

$$10^8\cdot 10^3=10^{11}$$

$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5=2^5$$

$$3\cdot 3^2=3^3=27$$

b) Egészítsd ki a mondókát! Azonos alapú...

Az azonos alapúakat vond össze (pl.: $2^5 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 2^8 \cdot 5^4$), növekvő prímsorrend!
(„kanonikus alak szerű” legyen)

$$3^5 \cdot 5^3 \cdot 3^{10} \cdot 3 \cdot 5^2 = 3^{16} \cdot 5^6$$

$$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^{10} \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^{11}$$

$$a^3 \cdot 5^3 \cdot a^{10} \cdot a \cdot 5^2 = 5^5 \cdot a^{14}$$

$$2^3 \cdot x^3 \cdot 5^1 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot x = 2^5 \cdot 5^2 \cdot x^9$$

Végezd el a műveletet. Ha kell, először határozd meg az előjelet!

$$3^4 \cdot 3^8 \cdot (-3)^8 = 3^{20}$$

$$8^4 \cdot (-8)^9 = -8^{13}$$

$$a^4 \cdot a^8 \cdot a^{12} \cdot a = a^{25}$$

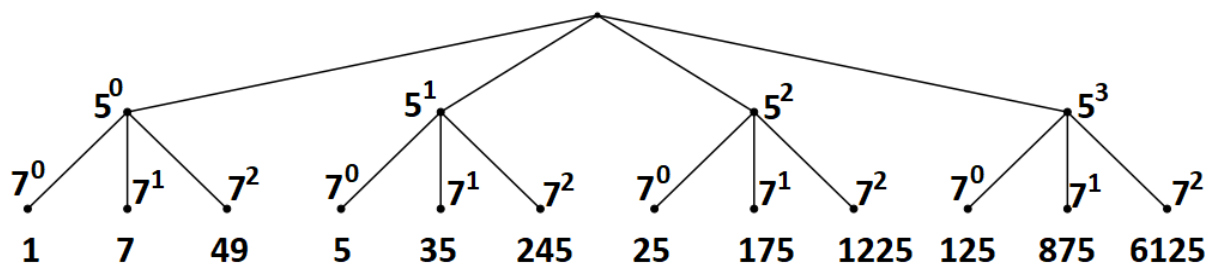
$$c^k \cdot c^m = c^{k+m}$$

$$5 \cdot (-5)^4 \cdot 5^8 = 5^{13}$$

$$a^k \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a = a^{k+8}$$

Hány osztója van a következő számnak: $5^3 \cdot 7^2$? Írd is le őket fa struktúrával!

$d(5^3 \cdot 7^2) = (3+1)(2+1) = 12$ Az 5 miatt négyfelé, a 7 miatt 3 felé ágazik a fa!



Egészítsd ki a második szám kitevőit, hogy igaz legyen (írd a vonalakra a kitevőt)!

$$(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7^{10} \cdot 11; 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 11^{1-\infty} \cdot 13^0) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11.$$

5) Azonos alapú hatványok hányadosa és az egész kitevők

a) Bevezetés

Ne legyen tört, csak hatvány (egyszerűsíts)!

$$\frac{3^8}{3^3} = 3^5$$

$$\frac{10^9}{10^7} = 10^2$$

$$\frac{2^{15}}{2^{14}} = 2$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^3$$

$$\frac{a^5}{a^4} = a$$

$$\frac{a^5}{a^5} = a^0 = 1 \text{ (ha } a \neq 0)$$

b) A hányados mondókája

Végezd el az alábbi műveletet, és írd le a rá vonatkozó mondókát (fejből... ☺)

$$\frac{2^{10}}{2^7} = 2^3$$

c) Végezd el, az azonos alapúakat vond össze!

$$6^5 \cdot 5^3 \cdot 6^0 \cdot 5 \cdot 5^0 = 5^4 \cdot 6^5$$

$$3^0 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 5^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 5^2$$

$$x^2 \cdot 7^0 \cdot x^1 \cdot x \cdot 7^2 \cdot 7 = 7^3 \cdot x^4$$

d) Negatív egész kitevők

Írd föl negatív kitevővel, és (vagyis ne legyen tört!) prímtényezőt használj!

Pl.: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$\frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

$$\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$$

$$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

$$\frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

Számold ki: minta: $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} = 0,3$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,1$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

A negatív kitevős hatvány mondókája: A 2^{-3} egy pozitív szám: $\frac{1}{2^3}$, vagyis $\frac{1}{8}$, ami 0,125.

Írd föl az alábbi számokat 2, illetve az alatta levőket 3 hatványaként:

$$32 = 2^5$$

$$16 = 2^4$$

$$4 = 2^2$$

$$2 = 2^1$$

$$1 = 2^0$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{32} = 2^{-5}$$

$$\frac{1}{512} = 2^{-9}$$

$$243 = 3^5$$

$$27 = 3^3$$

$$3 = 3^1$$

$$1 = 3^0$$

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$\frac{1}{27} = 3^{-3}$$

$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$$\frac{1}{243} = 3^{-5}$$

Add meg az előjelét!

$$(-5)^7 = \text{negatív}$$

$$(-5)^2 = \text{poz.}$$

$$-3^4 = \text{neg.}$$

$$(-3)^{-2}(-1)^0 = \text{poz.}$$

$$(-5)^{-4}(-1)^3 = \text{neg.}$$

$$-(-7)^{-6} = \text{neg.}$$

$$(-5)^4 = \text{poz.}$$

Írd föl úgy, hogy ne legyen negatív kitevő (tört alak legyen):

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

$$7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2}$$

$$1^{-3} = 1$$

Mennyi a kitevő? Írd alá!

$$2^x = \frac{1}{32}$$

$$x=-5$$

$$6^x = \frac{1}{216}$$

$$x=-3$$

$$5^x = \frac{1}{125}$$

$$x=-3$$

$$3^x = \frac{1}{27}$$

$$x=-3$$

Egyszerűsíts, majd a végeredményben ne legyen tört – csak egy hatvány legyen:

Minta: $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$ Minta: $\frac{5^3}{5^7} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

$$\frac{5^7}{5^5} = 5^2$$

$$\frac{3^7}{3^9} = 3^{-2}$$

e) Írd le a 0 új mondókáját fejből:

A 0 új mondókája: A 0-t oszthatjuk, de 0-val nem osztunk és 00 nincs értelmezve. 0-nak csak pozitív természetes kitevőjű hatványa lehet, és az eredménye mindig 0.

6) Azonos alapú, egész kitevőjű hatványok szorzata, hányadosa

a) Bevezetés – írd fel a végeredményt hatványalakban, ne legyen tört!

$$\frac{7^8}{7^8} = 7^0 = 1$$

$$\frac{2^{10}}{2^{11}} = 2^{-1}$$

$$\frac{125}{5^5} = \frac{5^3}{5^5} = 5^{-2}$$

$$\frac{2^3}{128} = \frac{2^3}{2^7} = 2^{-4}$$

$$\frac{9}{81} = 9^{-1} = 3^{-2}$$

$$\frac{7}{343} = 7^{-2}$$

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{-3}$$

$$\frac{x^2}{x^0} = x^2$$

$$\frac{x^3}{-x^8} = -x^{-5}$$

$$\frac{x^3}{(-x)^8} = x^{-5}$$

$$\frac{(-a)^3}{(-a)^6} = -a^{-3}$$

$$\frac{(-a)^3}{-(-a)^7} = -a^{-4}$$

b) Fejezd be: Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Végezd el a műveletet:

Minta: $3^{-4} \cdot 5^3 \cdot 3^3 \cdot 5^{-7} = 3^{-1} \cdot 5^{-4}$

$$7^4 \cdot 7^{-3} = 7$$

$$12^{-4} \cdot 12^{-5} = 12^{-9}$$

$$2^{-4} \cdot 2 = 2^{-3}$$

$$3^{-5} \cdot 3^{-3} = 3^{-8}$$

$$5^{-8} \cdot 5^8 = 5^0 = 1$$

$$a^{-4} \cdot a^{-3} = a^{-7}$$

$$5^{-4} \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 5^7 = 2^7 \cdot 5^3$$

$$(3)^0 \cdot b^{-6} \cdot a^{-8} \cdot b^8 \cdot a^{-7} \cdot b^7 = a^{-15} \cdot b^5$$

$$3 \cdot c \cdot 5^{-4} \cdot c^0 \cdot 3^{-4} \cdot 5^7 = 3^{-3} \cdot 5^3 \cdot c$$

$$k^0 \cdot x \cdot x^{-5} \cdot x^8 \cdot y^{-3} \cdot y^3 = x^4$$

Fejezd be: Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.

c) Gyakorlás

Ne legyen tört, csak egy hatvány!

$$\begin{array}{cccc} \frac{2^5}{2^8} = 2^{-3} & \frac{2^{-5}}{2^8} = 2^{-13} & \frac{2^5}{2^{-8}} = 2^{13} & \frac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^3 \\ \frac{3^5}{3^{12}} = 3^{-7} & \frac{3^{-5}}{3^9} = 3^{-14} & \frac{3^4}{3^{-10}} = 3^{14} & \frac{3^{-4}}{3^{-10}} = 3^6 \\ \frac{5^{-6}}{5^{12}} = 5^{-18} & \frac{5^6}{5^{-12}} = 5^{18} & \frac{5^{-6}}{5^{-12}} = 5^6 & \frac{5^6}{5^{12}} = 5^{-6} \\ \frac{3^0}{3^{10}} = 3^{-10} & \frac{1}{3^{10}} = 3^{-10} & \frac{5^0}{5} = 5^{-1} & \frac{1}{5} = 5^{-1} \\ \frac{x}{x^2} = x^{-1} & \frac{x^{-1}}{x^2} = x^{-3} & \frac{x}{x^{-2}} = x^3 & \frac{x^{-1}}{x^{-2}} = x \\ 7^5 \cdot 7^{-3} = 7^2 & 7^8 \cdot 7^{10} = 7^{18} & \frac{2^4 x^2}{2^5 x^5} = 2^{-1} x^{-3} & \frac{5^6}{5^6} = 5^0 = 1 \\ \frac{3^4 x^2 x^{-4}}{3^{-3} x^5 x^{-2}} = 3^7 x^{-5} & \frac{3^{-2} \cdot 5^{-4} \cdot 3}{5^8 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-5}} = 3^5 \cdot 5^{-12} & & \end{array}$$

Csak pozitív kitevő szerepelhet (vagyis, ha kell, akkor tört van, de ne legyen emeletes)!

Két minta: $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{2^0}{2^{-3}} = 2^{0-(-3)} = 2^3$ $\frac{5^{-3}}{3^{-4}} = \frac{5^{-3}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{3^4}{5^3}$

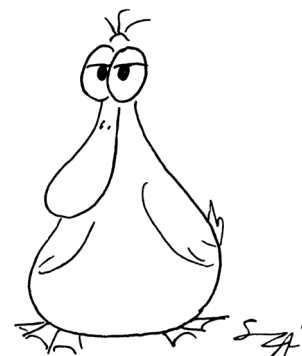
$$\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 \quad \frac{1}{x^{-2} 5^{-3}} = 5^3 x^2 \quad \frac{2^{-8}}{7^5 \cdot 3^{-4}} = \frac{3^4}{7^5 \cdot 2^8} \quad \frac{5^{-7}}{5^{-5}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} \quad \frac{a^{-3}}{a^7 \cdot a^{-2}} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Ne legyen se zárójel, se tört, „kanonikus alak szerű” legyen!

Minta: $\frac{2^{-2} \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{3^7 \cdot 5^7 \cdot 2^{-1} \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^7}{2^{-1} \cdot 3^9 \cdot 5^7} = 2^3 \cdot 3^{-6}$

$$\frac{2^{-5} \cdot 3^7 \cdot 5^{-7} \cdot 2^4 \cdot 3^{-7}}{3^3 \cdot 5^0 \cdot 2^{-1}} = \frac{2^{-1} \cdot 5^{-7}}{3^3 \cdot 2^{-1}} = 3^{-3} \cdot 5^{-7}$$

$$\frac{3^{-3} \cdot 5^4 \cdot 3^{-7} \cdot 5^4 \cdot 2^{-7}}{3^{-10} \cdot 5^{-8} \cdot 2^{-8}} = \frac{3^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^{-7}}{3^{-10} \cdot 5^{-8} \cdot 2^{-8}} = 2 \cdot 5^{16}$$



7) Szorzat hatványa

a) Bevezetés

Bontsd föl a zárójelet! (Először – ha kell – az előjelet határozd meg!)

$$(-2 \cdot 3)^5 = -2^5 \cdot 3^5 \qquad (2 \cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 5^7 \qquad (7 \cdot 13)^{12} = 7^{12} \cdot 13^{12}$$

$$(2 \cdot a)^4 = 2^4 \cdot a^4 \qquad (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k \qquad (2 \cdot 3)^{-8} = 2^{-8} \cdot 3^{-8}$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 7)^{-4} = 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 7^{-4} \qquad (-2 \cdot 5 \cdot 11)^{-3} = -2^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 11^{-3}$$

b) Fejezd be a mondatokat: Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezőket az eredeti hatványkitevőre emelve összeszorozzuk.

c) Hozd kanonikus alakra

$$\text{Minta: } 144000 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3.$$

$$19600 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \qquad 32\,400\,000 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^5.$$

Visszafelé (számold ki, hogy mennyivel egyenlő!)

$$\text{Minta: } 2^7 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 8 \cdot 10\,000 = 80\,000$$

$$2^4 5^6 = 250\,000$$

$$2^7 \cdot 3 \cdot 5^5 = 1\,200\,000$$

d) Bontsd föl a zárójelet:

$$(-3 \cdot 7)^{-4} = 3^{-4} \cdot 7^{-4}$$

$$(-3 \cdot 7)^5 = -3^5 \cdot 7^5$$

$$(-3 \cdot 7)^{-5} = -3^{-5} \cdot 7^{-5}$$

$$(-a \cdot 7 \cdot b)^{-5} = -7^{-5} \cdot a^{-5} \cdot b^{-5}$$

$$((-3) \cdot (-7))^{-4} = 3^{-4} \cdot 7^{-4}$$

$$(3 \cdot (-a) \cdot 7)^{-5} = -3^{-5} \cdot 7^{-5} \cdot a^{-5}$$

e) Hány 0-ra végződik:

$$10^6: 6 \text{ db-ra}$$

$$100^7: 14 \text{ db-ra}$$

$$1000^6: 18 \text{ db-ra}$$

$$100000^{13}: 65 \text{ db.}$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3: 3 \text{ db.}$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{14} \cdot 13^3: 7 \text{ db.}$$

80! hány 0-ra végződik? ($80! = 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

A kanonikus alakban a 2 kitevője magasabb, mint az 5-é, ezért annyira, amennyi az 5 kitevője: $[80/5] + [80/25] = 16 + 3 = 19$ db.

8) Tört hatványa

Ne legyen se zárójel, se tört!

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = 2^3 \cdot 5^{-3} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^4 = 5^4 \cdot 5^{-4} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -2^5 \cdot 3^{-5}$$

$$\left(\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}\right)^8 = 2^8 \cdot 3^{-8} \cdot 5^8 \cdot 7^{-8} \quad \left(\frac{x}{5}\right)^4 = 5^{-4} \cdot x^4 \quad \left(\frac{7}{x}\right)^3 = 7^3 \cdot x^{-3}$$

Ne legyen se zárójel, se tört!

Minta:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot \frac{1}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot \frac{5^0}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot 5^2$$

\uparrow \uparrow
 kihagyható kihagyható

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = 5^{-4} \cdot 7^4$$

$$\left(\frac{11}{3}\right)^{-7} = 3^7 \cdot 11^{-7}$$

$$\left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}\right)^{-10} = 2^{10} \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-10} \cdot 7^{10}$$

$$\left(\frac{2 \cdot a}{5 \cdot b}\right)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^3 \cdot a^{-3} \cdot b^3$$

Visszafele:

$$\frac{24^5}{16^5} = \left(\frac{24}{16}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 2^{-5} \cdot 3^5$$

$$\frac{20^6}{10^6} = \left(\frac{20}{10}\right)^6 = 2^6 = 64$$

$$\frac{45^{-4}}{27^{-4}} = \left(\frac{45}{27}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = 3^4 \cdot 5^{-4}$$

$$\frac{80^{-6}}{60^{-6}} = \left(\frac{80}{60}\right)^{-6} = \left(\frac{60}{80}\right)^6 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 3^6 \cdot 4^{-6}$$

9) Hatvány hatványa

a) Bevezetés

Írd ide a hatvány hatványozására vonatkozó mondókat:

Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

b) Ne legyen se zárójel, se tört:

$$\text{Minta: } (2^5)^3 = (2^5)(2^5)(2^5) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{15}$$

$$\text{Minta: } (7^2)^{-3} = \frac{1}{(7^2)^3} = \frac{1}{(7^2)(7^2)(7^2)} = \frac{1}{(7 \cdot 7)(7 \cdot 7)(7 \cdot 7)} = \frac{1}{7^6} = 7^{-6}$$

$$(5^3)^2 = (5^3)(5^3) = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^6$$

$$(5^3)^{-2} = \frac{1}{(5^3)^2} = \frac{1}{(5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5)} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$$

$$(2^{-3})^4 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^4 = \left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right) = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12}$$

$$(2^{-3})^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 1 \cdot \frac{2^6}{1} = 2^6$$

c) Gyakorlás

„Kanonikus alak szerű” legyen (csak prímekek, egész kitevők, a prímalapok monoton növekvő sorrendben):

$$\text{Minta: } 12^5 = (2^2 \cdot 3)^5 = 2^{10} \cdot 3^5$$

$$18^7 = 2^7 \cdot 3^{14}$$

$$50^8 = 2^8 \cdot 5^{16}$$

$$(24^3)^4 = 2^{36} \cdot 3^{12}$$

$$16900^3 = 13^2 \cdot (10^2)^3 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^2$$

$$98^4 = 2^2 \cdot 7^8$$

$$242^5 = (2 \cdot 11^2)^5 = 2^5 \cdot 11^{10}$$

$$48^3 = (2^4 \cdot 3)^3 = 2^{12} \cdot 3^3$$

$$2500^{-6} = (2^2 \cdot 5^4)^{-6} = 2^{-12} \cdot 5^{-24}$$

$$75^{-5} = 3^{-5} \cdot 5^{-10}$$

$$14400^6 = (12^2 \cdot 10^2)^6 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2)^6 = 2^{36} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}$$

$$(88^{-5})^4 = (2^3 \cdot 11)^{-20} = 2^{-60} \cdot 11^{-20}$$

$$(36^5)^{-3} = ((2 \cdot 3)^{10})^{-3} = 2^{-30} \cdot 3^{-30}$$

Törtés: Ne legyen se zárójel, se tört, és „kanonikus alak szerű” legyen (csak prímekek, egész kitevők, a prímalapok monoton növekvő sorrendben)

$$\left(\frac{7}{5^{-2}}\right)^3 = 5^6 \cdot 7^3$$

$$\left(\frac{2^3}{3^{-4}}\right)^3 = 3^{12} \cdot 2^9$$

$$\left(\frac{x^3}{x^{-4}}\right)^{-4} = x^{-28}$$

$$\left(\frac{7^{-4}}{5^{-6}}\right)^4 = 5^{24} \cdot 7^{-16}$$

$$\left(\frac{13^2}{11^{-2}}\right)^{-3} = 11^{-6} \cdot 13^{-6}$$

$$\left(\frac{32^4}{27^3}\right)^5 = 32^{20} \cdot 27^{-15} = 2^{100} \cdot 3^{-45}$$

$$\left(-\frac{12^{-3} \cdot 4^5}{6^{-4}}\right)^2 = 12^{-6} \cdot 4^{10} \cdot 6^8 = 2^{-12} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{20} \cdot 2^8 \cdot 3^8 = 2^{16} \cdot 3^2$$

$$\left(\left(\frac{50}{98}\right)^{-1}\right)^3 = \left(\frac{25}{49}\right)^{-3} = 5^{-6} \cdot 7^6$$

$$\left(\left(\frac{54^{-2}}{150}\right)^2\right)^{-3} = \frac{54^{12}}{150^{-6}} = 2^{12} \cdot 3^{36} \cdot 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^{12} = 2^{18} \cdot 3^{42} \cdot 5^{12}$$

d) Reciprok:

$$2^4 \text{ reciproka } \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

$$13^{-2} \text{ reciproka: } \frac{1}{13^{-2}} = \frac{13^0}{13^{-2}} = 13^{0-(-2)} = 13^2.$$

$$2^{-7} \text{ reciproka: } \frac{1}{2^{-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^7}} = 2^7$$

$$5^{-4} \text{ reciproka: } \frac{1}{5^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{5^4}} = 5^4$$

$$17^{-2} \text{ reciproka: } 17^2.$$

$$3^7 \text{ reciproka } 3^{-7}$$

$$3^{-7} \text{ reciproka } 3^7$$

$$\frac{1}{2^8} \text{ reciproka } 2^8$$

$$15^{-4} \text{ reciproka } 15^4$$

e) Gondolkodtatók

$$\text{Melyik a nagyobb: } 5^{400} \square 4^{500} \Leftrightarrow (5^4)^{100} \square (4^5)^{100} \Leftrightarrow (625)^{100} \square (1024)^{100} \Leftrightarrow 625 \square 1024$$

$$\text{Legalább hány jegyből áll: } 2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 \approx 1000^5 = (10^3)^5 = 10^{15} \text{ ami 16 jegyű}$$

$$\text{Legalább hány jegyből áll: } 4^{50} \text{? } 4^{50} = 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} \approx 1000^{10} = (10^3)^{10} = 10^{30} \text{ ami 31 jegy.}$$

* Legalább hány számjegyből áll? Próbálj pontos becslést adni: 3^{400} .

$$(3^4)^{100} = 81^{100} \approx 80^{100} = (2^3)^{100} \cdot 10^{100} = (2^{10})^{30} \cdot 10^{100} \approx (10^3)^{30} \cdot 10^{100} = 10^{190} \text{ ami 191 jegy.}$$

* Melyik a nagyobb: 24^{25} vagy 5^{26}

Mo.: 24^{32} vagy 5^{64} , így 24^{32} vagy $(5^2)^{32}$ vagyis a jobb oldal.

Írd föl a kanonikus alakját: $((512^3)^4)^5 = (((2^9)^3)^4)^5 = 2^{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2^{540}$

10) Összeg, különbség hatványa

Számold ki: $(2+3)^3=125$ $2^3+3^3=35$

Írd föl jelekkel a definíciót (vigyázat: valódi részhalmazról van szó!)

$$A \subset H \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \rightarrow y \notin A)$$

11) Gyakorlás

Írd föl egyetlen hatványként a következőt:

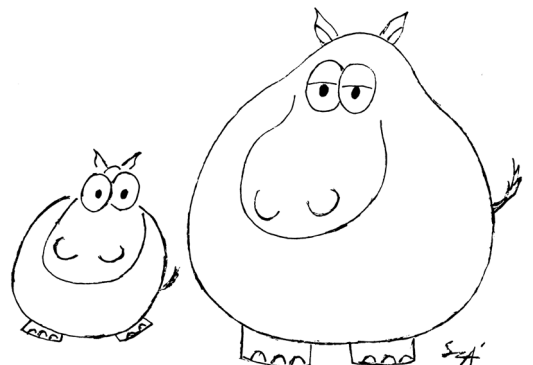
$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^8 \cdot 2^9 = 2^{1+2+3+4+\dots+9} = 2^{45}$$

* Írd föl egyetlen hatványként a következőt:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^{97} \cdot 2^{98} \cdot 2^{99} \cdot 2^{100} = 2^{1+2+3+4+\dots+100} = 2^{5050}$$

Vagyis kell:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = S \\ 100+99 + 98 + 97 + \dots + 1 = S \\ \hline 101+101+ 101+ 101 + \dots + 101 = 2S \\ 100 \cdot 101 = 2S \\ S=50 \cdot 101=5050 \end{array}$$



Írd föl a következő törtek „kanonikus alakját”, vagyis: prímtényező legyen, ne legyen se zárójel, se tört, a prímek növekvő sorrendben!

$$\frac{2^8 \cdot 5^3 \cdot 2^{-3} \cdot 11^3 \cdot 5^3}{11^2 \cdot 5^{-2} \cdot 11^{-1} \cdot 5^5 \cdot 2^{-4} \cdot 2} = 2^{8-3+4-1} \cdot 5^{3+3+2-5} \cdot 11^{3-2+1} = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 11^2$$

$$\frac{3^8 \cdot 4^3 \cdot 15^3}{20^4 \cdot 36^{-2}} = 3^8 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{-8} \cdot 5^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^{15} \cdot 5^{-1}$$

$$\frac{2^8 (3 \cdot 4^3 \cdot 15)^3}{24^5 \cdot 80^{-1}} = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{-15} \cdot 3^{-5} \cdot 2^4 \cdot 5 = 2^{15} \cdot 3 \cdot 5^4$$

$$\frac{(24^3 \cdot 33^{-2})^3}{(40^{-2} \cdot 55^3)^4} = \frac{2^{27} \cdot 3^9 \cdot 3^{-6} \cdot 11^{-6}}{2^{-24} \cdot 5^{-8} \cdot 5^{12} \cdot 11^{12}} = 2^{51} \cdot 3^3 \cdot 5^{-4} \cdot 11^{-28}$$

$$\left(\left(\frac{40}{20^3} \right)^{-2} \right)^{-3} = \frac{40^6}{20^{18}} = \frac{2^{12} \cdot 10^6}{2^{18} \cdot 10^{18}} = 2^{-6} \cdot 10^{-12} = 2^{-18} \cdot 5^{-12}$$

$$\left(\left(\frac{40}{20^3} \right)^{-2} \right)^{-3} = \left(\frac{40}{20 \cdot 20 \cdot 20} \right)^6 = \left(\frac{1}{20 \cdot 10} \right)^6 = (2^{-3} \cdot 5^{-2})^6 = 2^{-18} \cdot 5^{-12}$$

$$* \frac{(12^3)^{-1} (32^4 \cdot 14^3 \cdot 10^{-4})^3}{120^{-5} \cdot (81 \cdot 125^{-1})^{-3}} = \frac{2^{-6} \cdot 3^{-3} \cdot 2^{60} \cdot 2^9 \cdot 7^9 \cdot 2^{-12} \cdot 5^{-12}}{2^{-15} \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-5} \cdot 3^{-12} \cdot 5^9} = 2^{66} \cdot 3^{14} \cdot 5^{-16} \cdot 7^9$$

II) Számok normálalakja

1) Bevezető

$$12^2=144$$

$$15 \cdot 18=270$$

$$\text{Számold ki: } 1,2 \cdot 1,2=1,44$$

$$\text{Számold ki: } 1,5 \cdot 1,8=2,7$$

$$\text{Számold ki: } 1,2 \cdot 12=14,4$$

$$\text{Számold ki: } 15 \cdot 1,8=27$$

Szorozd össze a 300-at és a 800-at!

Szorozd össze a 0,003-t és a 0,000 008-t!

$$300 \cdot 800=240\ 000$$

$$0,003 \cdot 0,000\ 008=0,000000024$$

2) Tíz hatványai

Írd föl 10 hatványaként a következő számot!

$$10\ 000=10^4$$

$$10\ 000\ 000=10^7$$

$$0,1=10^{-1}$$

$$0,001=10^{-2}$$

$$0,000\ 000\ 01=10^{-8}$$

3) Írd át normálalakra

$$-30,98=-3,098 \cdot 10^1$$

$$120=1,2 \cdot 10^2$$

$$14\ 500=1,45 \cdot 10^4$$

$$15=1,5 \cdot 10^1$$

$$17009,40=1,70094 \cdot 10^4$$

$$-0,0023=-2,3 \cdot 10^{-3}$$

$$-0,000\ 001\ 5=-1,5 \cdot 10^{-6}$$

$$0,000\ 093=9,3 \cdot 10^{-5}$$

$$7=7 \cdot 10^0=7$$

$$-1=-1 \cdot 10^0=-1$$

$$140 \cdot 10^4=1,4 \cdot 10^6$$

$$65000 \cdot 10^{-3}=6,5 \cdot 10^1$$

$$56000 \cdot 10^{-2}=5,6 \cdot 10^2$$

$$145000 \cdot 10^{-13}=1,45 \cdot 10^{-8}$$

$$0,00078 \cdot 10^{14}=7,8 \cdot 10^{10}$$

$$0,000\ 063 \cdot 10^{-4}=6,3 \cdot 10^{-9}$$

Melyik egyenlő a $5,02 \cdot 10^4$ normálalakú számmal? Húzd alá (akár több is!)

a) 5020 b) $50,2 \cdot 10^3$ c) 50200 d) $502 \cdot 10^3$ e) $0,0502 \cdot 10^6$

4) Írd át helyiértékes alakra a normál alakú számot

$$2,4 \cdot 10^3 = 2\ 400$$

$$3,05 \cdot 10^5 = 305\ 000$$

$$-3,05 \cdot 10^{-5} = -0,000\ 030\ 5$$

$$-2,003 \cdot 10^7 = -20\ 030\ 000$$

$$2,003 \cdot 10^{-7} = 0,000\ 000\ 200\ 3$$

$$4 \cdot 10^1 = 40$$

5) Írd ide a normál alak definícióját szavakkal

Def.: \forall nem nulla valós szám egyértelműen felírható olyan kéttényezős szorzatként, ahol az első tényező abszolút értéke az $[1;10[$ intervallumba esik, a második tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa.

6) Írd át normálalakba

$$203 \cdot 10^5 = 2,03 \cdot 10^7$$

$$0,004\ 5 \cdot 10^8 = 4,5 \cdot 10^5$$

$$105 \cdot 10^3 = 1,05 \cdot 10^5$$

$$-4200 \cdot 10^{-7} = -4,2 \cdot 10^{-4}$$

$$-0,042 \cdot 10^{-5} = -4,2 \cdot 10^{-7}$$

$$52000 \cdot 10^{-6} = 5,2 \cdot 10^{-2}$$

$$-0,0034 \cdot 10^6 = -3,4 \cdot 10^3$$

$$100 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-9}$$

7) Műveletek normálalakra hozott számokkal

a) Szorzás

$$\text{Minta: } 130\,000\,000 \cdot 0,0015 = (13 \cdot 10^7) \cdot (15 \cdot 10^{-4}) = 195 \cdot 10^3 = 1,95 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 1,95 \cdot 10^5.$$

$$1\,700 \cdot 1\,800 = 17 \cdot 10^2 \cdot 18 \cdot 10^2 = 306 \cdot 10^4 = 3,06 \cdot 10^6$$

$$320\,000 \cdot 4\,000\,000 = 3,2 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 12,8 \cdot 10^{11} = 1,28 \cdot 10^{12}$$

$$160\,000 \cdot 170 = 2,72 \cdot 10^7 \quad 2\,500\,000 \cdot 6\,000 = 1,5 \cdot 10^{10} \quad 15\,000\,000 \cdot 0,000\,0016 = 2,4 \cdot 10^1$$

$$0,0012 \cdot 0,000\,012 = 1,44 \cdot 10^{-8} \quad 0,000\,013 \cdot 0,000\,000\,0017 = 2,21 \cdot 10^{-14}$$

$$180\,000 \cdot 0,000\,000\,000\,0017 = 3,06 \cdot 10^{-7}$$

b) Hatványozás:

$$\text{Minta: } 130\,000^2 = (13 \cdot 10^4)^2 = 13^2 \cdot 10^8 = 169 \cdot 10^8 = 1,69 \cdot 10^2 \cdot 10^8 = 1,69 \cdot 10^{10}.$$

$$2\,500^2 = (25 \cdot 10^2)^2 = 625 \cdot 10^4 = 6,25 \cdot 10^6$$

$$0,000\,17^2 = (17 \cdot 10^{-5})^2 = 289 \cdot 10^{-10} = 2,89 \cdot 10^{-8}$$

$$50\,000^3 = (5 \cdot 10^4)^3 = 5^3 \cdot 10^{12} = 1,25 \cdot 10^{14} \quad 0,000\,3^5 = (3 \cdot 10^{-4})^5 = 243 \cdot 10^{-20} = 2,43 \cdot 10^{-18}$$

$$13\,000^2 = (13 \cdot 10^3)^2 = 169 \cdot 10^6 = 1,69 \cdot 10^8 \quad 0,005^3 = (5 \cdot 10^{-3})^3 = 125 \cdot 10^{-9} = 1,25 \cdot 10^{-7}$$

$$0,002^6 = 6,4 \cdot 10^{-17}$$

c) Osztás: **FIGYELEM, AZ OSZTÁST MINDIG ÁT KELL ÍRNI TÖRT ALAKBA!**

$$\text{Minta: } 200\,000 : 80\,000\,000\,000\,000 = \frac{20 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{13}} = 2,5 \cdot 10^{-9}.$$

$$\text{Minta: } 0,0068 : 0,000\,000\,05 = \frac{68 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-8}} = \frac{68}{5} \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-8}} = 13,6 \cdot 10^4 = 1,36 \cdot 10^5.$$

$$6\,250\,000 : 5\,000 = \frac{625 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 125 \cdot 10^1 = 1,25 \cdot 10^3$$

$$820\,000 : 0,005 = \frac{820 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} = 164 \cdot 10^6 = 1,64 \cdot 10^8$$

$$0,000\,075 : 4\,000 = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^3} = 18,75 \cdot 10^{-9} = 1,875 \cdot 10^{-8}$$

$$94\,000\,000 : 0,004 = \frac{94 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-3}} = 23,5 \cdot 10^9 = 2,35 \cdot 10^{10}$$

$$0,000\,000\,000\,05 : 0,000\,004 = \frac{50 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-6}} = 12,5 \cdot 10^{-6} = 1,25 \cdot 10^{-5}$$

$$(-1\,600\,000)^2 : (-0,000\,002)^5 = -\frac{16^2 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 10^{-30}} = -\frac{16 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{-30}} = -8 \cdot 10^{40}$$

$$(-0,000\,000\,2)^5 : (0,000\,000\,01)^6 = -\frac{32 \cdot 10^{-35}}{10^{-48}} = -3,2 \cdot 10^{14}$$

d) Összeadás – kivonás: **MINDIG A NAGYOBB SZÁMOT ALAKÍJTJUK KISEBBÉ!**

$$302\,000 \text{ dl} = 30\,200 \text{ liter} = 3,02 \cdot 10^4 \text{ liter}$$

$$13 \text{ km} = 13 \cdot 1000 \cdot 100 \text{ cm} = 1\,300\,000 \text{ cm} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ cm}$$

$$8 \text{ hl} + 23 \text{ l} = 8 \cdot 100 \cdot 10 + 23 \cdot 10 = 823 \cdot 10 = 8230 \text{ dl}$$

$$4,5 \text{ kg} - 1200 \text{ g} + 38 \text{ dkg} = 4,5 \cdot 100 \text{ dkg} - \frac{1200}{10} \text{ dkg} + 38 \text{ dkg} = 368 \text{ dkg}$$



Végezd el:

$$\text{Minta: } 3,2 \cdot 10^4 + 2,8 \cdot 10^5 = 3,2 \cdot 10^4 + 28 \cdot 10^4 = 31,2 \cdot 10^4 = 3,12 \cdot 10^5.$$

$$\text{Minta: } 2,4 \cdot 10^{-4} - 6,3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} - 6,3 \cdot 10^{-5} = 17,7 \cdot 10^{-5} = 1,77 \cdot 10^{-4}.$$

$$4 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 = 400 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^5 = 405 \cdot 10^5 = 4,05 \cdot 10^7$$

$$49 \cdot 10^{-5} - 7,5 \cdot 10^{-6} = 490 \cdot 10^{-6} - 7,5 \cdot 10^{-6} = 482,5 \cdot 10^{-6} = 4,825 \cdot 10^{-4}$$

$$3 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-5} - 20 \cdot 10^{-5} = -17 \cdot 10^{-5} = -1,7 \cdot 10^{-4}$$

$$2,3 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-6} + 40 \cdot 10^{-6} = 42,3 \cdot 10^{-6} = 4,23 \cdot 10^{-5}$$

$$3,2 \cdot 10^{-5} - 2,8 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-5} - 28 \cdot 10^{-5} = -24,8 \cdot 10^{-5} = -2,48 \cdot 10^{-4}$$

$$25 \cdot 10^{15} + 0,075 \cdot 10^{19} = 2,5 \cdot 10^{16} + 75 \cdot 10^{16} = 77,5 \cdot 10^{16} = 7,75 \cdot 10^{17}$$

$$25 \cdot 10^{-6} - 0,075 \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-5} - 75 \cdot 10^{-5} = -72,5 \cdot 10^{-5} = -7,25 \cdot 10^{-4}$$

$$13 \cdot 10^{23} + 7,05 \cdot 10^{24} = 13 \cdot 10^{23} + 70,5 \cdot 10^{23} = 83,5 \cdot 10^{23} = 8,35 \cdot 10^{24}$$

$$5 \cdot 10^{-4} - 0,075 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} - 75 \cdot 10^{-4} = -70 \cdot 10^{-4} = -7 \cdot 10^{-3}$$

Számold ki, hogy hány mm magas vagy:

$$\text{Pl.: } 176 \text{ cm ember: } 176 \cdot 10 \text{ mm} = 1760 \text{ mm} = 1,760 \text{ m}$$

hány km magas vagy:

$$\text{Pl.: } 168 \text{ cm ember: } 168 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 168 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ km} = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ km}$$

hány gramm vagy:

$$\text{egy } 53 \text{ kg-os ember: } 53 \cdot 1000 \text{ g} = 53000 \text{ g} = 5,3 \cdot 10^4 \text{ g}$$

$$\text{hány tonna vagy: } 42 \text{ kg-os ember } 42 \cdot 10^{-3} \text{ t} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ t}$$

Ezer napban hány másodperc van?

$$1 \text{ nap} = 24 \text{ óra. } 24 \text{ óra} = 24 \cdot 60 \text{ perc. } 24 \cdot 60 \text{ perc} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ másodperc}$$

$$24 \cdot 60 \cdot 60 = 24 \cdot 3600 = 86400 \text{ másodperc}$$

BETŰK HASZNÁLATA

I) Bevezetés

1) Alapok

Egy téglalap oldalai: $a; b$. Mekkora a kerülete: $2a+2b=2(a+b)$ Mekkora a területe: ab

Egy családban 4 gyerek van. A gyerekek életkorának összege 22 év. 5 év múlva mennyi lesz az életkoruk összege? (Vigyázz, mindenki „öregszik”!): $22+4\cdot 5=42$

Egy családban a 4 gyerek életkorának összege 25 évvel kevesebb, mint a két szülő életkorának összege. Mi a helyzet 5 év múlva?

A 4 gyerek együtt 20 évet öregszik, a két szülő együtt 10-et, ezért már csak 15 év lesz a különbség.

Ha $3x+5=29$, akkor $3x+12=36$

Ha $3x+5=29$, akkor $6x+10=58$

Ha $3x-4=y$, akkor $6x-5=2y+3$

Egy kütyü 2 órát lop el naponta az életedből. Hány órát lop el:

12 nap alatt: $12\cdot 2=24$

n nap alatt: $2n$

$3y$ nap alatt: $6y$

Mennyi:

a -nak a fele: $a/2$

b -nek a másfélszerese:

c -nek a 25%-a: $c\cdot 25/100$

d -nek a 250%-a: $d\cdot 250/100$

e -nek az 1,2-szerese: $1,2e$

f -nek az x -szerese: xf

g -nek az egyötöd része: $(1/5)x$

h -nek az x -ed része: h/x

i -nek a $\frac{2}{3}$ -ada: $\frac{2}{3}i$

j -nek az $\frac{x}{y}$ -od része: $\frac{x}{y}j$

Írd föl:

x -nél 5-tel nagyobb szám: $x+5$

x -nek az 5-szöröse: $5x$

x felénél 3-mal kisebb: $x/2 -3$

Aminél x 4-gyel kisebb: $x+4$

x ellentettje: $-x$

x reciproka: $1/x$

x négyzete: x^2

x törtrésze: $\{x\}$

Aminél x 5-tel nagyobb: $x-5$

Írd a mondatok mellé a megfelelő algebrai kifejezést, amit alább találsz:

1000n 2(n+m) 24n n·m² n:m n·m n²·m (n+m)/2 8m+8

n óra alatt m km/ó-val haladó koala megtett útja:	n·m
n és m oldalú téglalap területe:	n·m
n és m átlaga (számtani közepe):	$\frac{n+m}{2}$
gerenda felszíne, mely keresztmetszete 2 egység oldalú négyzet, hossza m:	4·2m=8m
n kg grammba átszámítva:	1000n
n és m oldalú téglalap kerülete:	2n+2m v. 2(n+m)
n nap órában mérve:	24n

Ha 10 egyenlő súlyú fiú együtt a mérlegen 600 kg, akkor 14 ilyen együtt beszállhat-e egy 800 kg teherbírású liftbe? $14 \cdot (600/10) = 840$, tehát nem.

Egy tanár órábéra b Ft. Hány forintot kap x nap alatt napi 11 órás munkaidő mellett: $11bx$

Egy nyolctagú csapat x nap alatt összesen y Ft-ot keresett. Mennyit kapott a csapat egy-egy tagja egy napra, ha egyenlően osztották el a pénzt: $y/(8x)$

Egy focista októberi bére x Ft, mert 10 napot dolgozott októberben. Mennyi munkabért kapott november hónapra, ha novemberben 12 napot dolgozott? $12 \cdot (x/10)$

2) A műveletek kommutativitása, sorrendje, zárójelek

Számold ki: $(3+4) \cdot (-3) - (2-1) + (2-4) - 5(2-1) + 4(2-2 \cdot 3) = -21 - 1 - 2 - 5 = -29$

3) Kifejezés értelmezés tartománya

Melyik az az x , amelyre értelmetlen a következő kifejezés: $\frac{7}{6-2x}$

x nem lehet: 3, mert $6-2 \cdot 3=0$, és 0-val nem osztunk.

4) Írjuk fel jelekkel

Vilmos 30 kg-mal könnyebb Szabolcsnál:	$v+30=sz$ v. $v=sz-30$
Pál és Zoé együtt is 10 könyvvel kevesebbet olvasott, mint András.	$p+z+10=a$
Az általam gondolt x szám 3 szorosa 10-zel több, mint a kétszerese.	$3x-10=2x$
Tegnap x embert ütöttek el kütyüzés közben. Ma a kétszeresénél kettővel kevesebbet:	$2x-2$
x órát utaztunk vonaton. Esett egy centi hó, ezért 3 órát utaztunk még mentesítő buszon. Hány óra hosszát voltunk úton?	$x+3$

Írjuk le a következő kifejezések összegét:

$-3,5 \text{ és } b : b-3,5$

$b \text{ és } -(65/4) : b-65/4$

$x \text{ és } y : x+y$

$a, b \text{ és } c : a+b+c$

$x, y \text{ és } 4 : x+y+4$

$c \text{ és } a : a+c$

Egy állványon y db könyv van, a másikon 15-tel több. Hány könyv van a másodikon?	$y+15$
Egy állványon y db könyv van, a másikon 15-tel több. Hány könyv van a kettőn együtt?	$2y+15$
Egy apa 30 évvel idősebb a fiánál. Hány éves az apa, ha a fia p éves?	$p+30$
Egy iskolában x számú tanuló volt. Felvettek még y tanulót. Mennyi a tanuló létszáma az iskolában? Mennyi a létszám, ha $x=900, y=80$	$x+y$ 980
Egy tanulónak x , a másiknak az előzőnél y -nal több fürete van. Hány fürete van a két tanulónak együtt?	$2x+y$
Melyik az a szám, amelyik b -vel nagyobb, mint a ?	$a+b$
Két szám különbsége c . A kisebbik szám a . Mennyi a másik szám?	$a+c$
Egy virsliárus fizetése x . A volt osztályfőnökéé a virsliárus fizetése felénél még 100 euróval kevesebb. Mennyi a volt főnök fizetése?	$x/2 - 100$
x nap hány óra?	$24x$
y hét hány nap?	$7y$
z óra hány perc?	$60z$
p nap hány hét?	$p/7$
r óra hány nap?	$r/24$
k perc hány óra?	$k/60$
Hány euróm van, ha m darab tízes és n darab öt eurósom van?	$10m+5n$
Írd föl összegalakban azt a kétjegyű számot, amelynek az első számjegye m , a második n , (alaki- helyi- valódi érték!!!) $\overline{mn} =$	$10m+n$

5) Számok jelzése

a) Mennyi

x -nek a kétharmada:	$(2/3)x$	y -nak a háromnegyede	$(3/4)y$ v. $3y/4$
w -nek a 75%-a:	$w \cdot 75/100$	u -nak a 125%-a	$u \cdot 125/100$
a -nak az harmada:	$(1/3)a$ v. $a/3$	b -nek az négyszerese	$4b$
c -nek az negyede:	$(1/4)c$ v. $c/4$	h -nak az y -od része	h/y
i -nek a $\frac{7}{5}$ -öd része:	$\frac{7}{5}i$	m -nek az $\frac{x}{y}$ -od része	$\frac{x}{y}m$

Két szám összege 20. Az egyik szám y . Írd föl a másikat!	$20-y$
Két szám összege x . Az egyik szám 3. Írd föl a másik számot!	$x-3$
Két szám összege x . Az egyik szám y . Írd föl a másik számot!	$x-y$

b) Írd föl azt a számot v. kifejezést, amelyik:

5-tel nagyobb, mint b	$b+5$
az x -nek a háromszorosa	$3x$
a -val nagyobb, mint b	$b+a$
Amit x -hez kell adni, hogy y -t kapjunk	$y-x$
2-vel kisebb a b háromszorosánál:	$3b-2$
az x és az y összegénél 3-mal kevesebb:	$x+y-3$
A természetes számok körében közvetlenül a b szám után van:	$b+1$
A természetes számok körében 2-vel megelőzi a b -t	$b-2$

Pista 5 évvel fiatalabb Sanyinál. Hány éves Pista, ha Sanyi s éves? Legyen $s=12$.	$p+5=s$ $p=s-5$
Két szám összege 25. Az egyik összeadandó b . Mennyi a másik összeadandó?	$25-b$
Egy zsákban m kg liszt van, egy másikban n kg-mal kevesebb. Hány kg van a másodikban? Mi az eredmény, ha $m=40$, $n=10$	$m-n$ $40-10=30$
A suli fűtéséhez d tonna hasadó anyagot szereztek be. Ebből c tonna már elfogyott. Hány tonna hasadó anyag maradt? Mi lesz az eredmény, ha $d=70$; $c=19$.	$d-c$ $70-19=51$
Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. A tízesek helyén x áll. Mi áll az egyesek helyén? Mely értékeket vehet fel x ?	$12-x$; $x: 3;4;5; \dots 9$
Egy áru önköltségi ára b Ft, és f Ft-ért adják el. Mennyi a haszon?	$f-b$

c) Egy kicsi próbálgatni madzsar nyelf, májd felírni:

a és b összegének a fele:	$(a+b)/2$
a és b szorzatának a harmada:	$(ab)/3$
a és b harmadainak szorzata:	$(a/3) \cdot (b/3) = (ab)/9$
a négyzetének és b háromszorosának a kétszeres szorzata:	$2a^2 \cdot (3b) = 6a^2b$
a és b különbségének a négyzete:	$(a-b)^2$
a és b hányadosának az ötszöröse:	$5(a-b)$
a és b hányadosának a c -szerese:	$c(a-b)$

Egy kicsi próbálgatni madzsar nyelf, májd felírni:

x és y összegének a fele	$(x+y)/2$
x és y összegének és különbségének szorzata	$(x+y)(x-y)$
x és y összegének és különbségének hányadosa	$(x+y)/(x-y)$
x és y szorzatának és hányadosának a különbsége	$xy-x/y$
y és x különbségének és összegének hányadosa	$(y-x)/(y+x)$
y és x hányadosának a négyzete	$(y/x)^2$
y és x négyzeteinek a hányadosa	y^2-x^2
x és y négyzeteinek összege („négyzetösszege”)	x^2+y^2
x és y összegének négyzete	$(x+y)^2$

Adott x és y. Írd fel az alábbiakat:

négyzeteik összegének (=”négyzetösszegük”) reciproka	$1/(x^2+y^2)$
összegük négyzetének a reciproka	$1/(x+y)^2$
reciprokuk négyzetösszege	$(1/x)^2+(1/y)^2$
reciprokaik összegének négyzete	$(1/x + 1/y)^2$

6) Írd föl „általában”

3 egymás követő egész	$x \in \mathbf{Z}. \quad x-1; x; x+1$
5 egymás utáni páros	$x \in \mathbf{Z}. \quad 2x-4; 2x-2; 2x; 2x+2; 2x+4$
a köbszámok általában	$x \in \mathbf{Z}. \quad x^3$
3-ra végződő természetesek	$x \in \mathbf{N}. \quad 10x+3$
3 egymás követő egész összege	$x \in \mathbf{Z}. \quad x-1+x+ x+1 = 3x$
3-mal 1 maradékot adó egészek	$x \in \mathbf{Z}. \quad 3x+1$
4 egymás követő páratlan egész összege	$x \in \mathbf{Z}. \quad 2x-3 + 2x-1 + 2x+1 + 2x+3=8x$

Milyen állítást tudsz megfogalmazni 9 egymás utáni egész szám összegére? (Először írd föl általában...)

$$x \in \mathbf{Z}. \quad x-4 + x-3 + x-2 + x-1 + x + x+1 + x+2 + x+3 + x+4 = 9x. \text{ Vagyis 9 osztja az összeget}$$

Milyen állítást tudsz megfogalmazni 6 egymást követő pt (páratlan) szám összegére? (Először írd föl általában...)

$$x \in \mathbf{Z}. \quad (2x-5) + (2x-3) + (2x-1) + (2x+1) + (2x+3) + (2x+5) = 12x. \text{ Vagyis 12 osztja az összeget}$$

7) Változások, kapcsolatok, százalék

Egy Intercity vonat óránként 40 km-t tesz meg. Mekkora távolságot zötyög x óra alatt?
 $40x$

Egy vonat v kilométer utat tesz meg óránként. (vagyis a sebessége v km/h) Számítsuk ki a t óra alatt megtett utat!

$v = 45, t = 6$	$v = 50, t = 4,5$	$v = 30, t = 3,5$
$6h \cdot 45km/h = 270k$	$4,5h \cdot 50km/h = 225k$	$3,5h \cdot 30km/h = 105k$

Egy tanuló 5 füzetet vesz, darabját x forintért. Mennyi pénzt költött el anyja pénztárcájából? Mennyi ez az összeg, ha $x = 0,6$ Euro, majd $x = 1,4$ Euro?

$$5x; \quad 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ illetve } 5 \cdot 1,4 = 7$$

Egy vakcinaárus x darab 300 Tallér-os és y darab 450 Tallér-os vakcinát adott el. Mennyi a bevétel? $300x + 450y$

Az a szám 2-vel nagyobb a b számnál

fejezd ki az a -t a b segítségével	$b+2=a$
fejezd ki a b -t az a segítségével	$a-2=b$
add meg a két szám összegét	$a+b$
fejezd ki az összeget csak az a -val	$a+a-2=2a-2$
illetve csak b -vel	$b+b+2=2b+2$

Egy déli határmenti városban k ember lakik. Hány lakosa lesz a városnak egy év múlva, ha a lakosok száma egy év alatt 12%-kal nő? És ha p %-kal nő? (Legyen $k=400$ ezer; illetve 720 ezer.)

$$k+k \cdot 12/100 \quad k+k \cdot p/100 \quad 400\,000 + 400\,000 \cdot 12/100 = 448\,000$$

$$720\,000 + 720\,000 \cdot 12/100 = 806\,400$$

Mekkora a rombusz oldala, ha kerülete k dm? (Rombusz olyan négyszög, mely oldalai egyenlők.)	$4k$ dm
Mennyi a c szám ötödrésze?	$c/5$
Mennyi a hányados, ha az osztandó 35 és az osztó 7?	$35/7=5$
Mennyi a hányados, ha az osztandó a és az osztó b ?	a/b
Két szám hányadosa 3. Az osztandó s , mennyi az osztó?	$s/3$
Melyik az a szám, amelynek a 6%-a b ?	$b/(6/100)$
Melyik az a szám, amelynek a p %-a b ?	$b/(p/100)$
Két szám szorzata 60. Az egyik tényező x . Mennyi a másik?	$60/x$
Hányszorosa az x szám az y -nak?	x/y szorosa
Mit kapunk eredményül, ha a b számhoz hozzáadjuk az a és c számok hányadosát?	$b+(a/c)$

Írjuk le az alábbi számok és betűk hányadosát

a és 4	$a/4$	b és 7	$b/7$	a és b	a/B	-2 és k	$-2/k$
----------	-------	----------	-------	------------	-------	-------------	--------

8) Ügyes felírások – ügyelj a szimmetriára

Írd föl 3 egymás követő páros szám összegét!

$$x \in \mathbf{Z}. \quad 2x-2 + 2x + 2x+2 = 6x$$

Írd föl 6 egymást követő páratlan összegét!

$$x \in \mathbf{Z}. \quad 2x-5 + 2x-3 + 2x-1 + 2x+1 + 2x+2 + 2x+3 = 12x$$

* Mennyi 301-től 499-ig a pt. (páratlan) egészek összege?

$$301 + 303 + 305 + 307 + \dots + 497 + 499 = S$$

$$\underline{499 + 497 + 495 + 493 + \dots + 303 + 301 = S}$$

$$800 + 800 + 800 + 800 + \dots + 800 + 800 = 2S$$

A kérdés: hány db. 800-as van? 301-től 1 lépés a 303. 2 lépés a 305. 3 lépés a 307 (vagyis $301+3\cdot 2=307$).

Hány lépsre van a 499? $(499-301)/2=99$. Tényleg: $301+99\cdot 2=499$. De a legelsőt nem számoltam, tehát összesen: 100 db. 800-as van: $100\cdot 800 = 2S$. Így: $50\cdot 800=S=40\ 000$

Az első páratlan természetes az 1. (pt=páratlan)

Összeadom az első 2 db páratlan (pt) számot, és leírom az eredményt $1+3=4$

Majd összeadom az első 3 db. pt számot, és írd le az eredményt	$1+3+5=9$
majd az első 4 db. pt számot	$1+3+5+7=16$
majd az első 5 pt számot	$16+9=25$
majd az első 6 pt számot	$25+11=36$
majd az első 7 pt számot	$36+13=49$
majd az első 8 pt számot	$49+15=64$
majd az első 9 pt számot	$64+17=81$
majd az első 10 pt számot	$81+19=100$

Mit figyelsz meg, milyen általános észrevételt fogalmazol meg? Valami ilyesféle észrevételre gondolok, hogy „ha összeadom az első n db. pozitív páratlan számot, akkor összegként n^2 -et kapok.”

Fenyegetés: Ezt egyszer még belátjuk!

II) Műveletek algebrai kifejezésekkel: együttható-változó – helyettesítési érték, egyneműek

1) Elnevezések

a) Mennyi a következő kifejezésekben az együttható, és mi(k) a változó(k)

$-3x^2$	együttható: -3	változó(k): x
$-xy$	együttható: -1	változó(k): x és y
$\frac{3}{4}x^3y$	együttható: $\frac{3}{4}$	változó(k): x és y
x	együttható: 1	változó(k): x
$\frac{5x}{3}$	együttható: $\frac{5}{3}$	változó(k): x
$-\frac{y^2}{5}$	együttható: $-\frac{1}{5}$	változó(k): y

b) Tag, tényező

Tag-tényező $(2x^3 - 4x + 13)(ax - by^2 + 7) - x(ax^2 - 1) + 5$

A vastag, aláhúzott x: második tag, első tényező. Vagyis: „2.tag 1.tény”

Mi a vastag 4x	1 tag. 1 tény. 2. tag	y²	1.tag 2.té. 2.tag 2.té
5	3. tag	1	2.tag 2.té 2.tag
ax²	2. tag 2. tény 1. tag	x³	1.tag 1.té 1.tag 2.té

Húzd alá egytagúakat az alábbi algebrai kifejezések közül

$2a+2b$ $2(a+b)$ $2(a+2b)$ $-2a+2b$ $2a$ $2b$

$-3(x+y)^2$ $-3x+y^2$ $-3x^2+y^2$ $-3x^2$ $(-3x+y)^2$

2) Helyettesítési érték

Határozd meg a következő kifejezések értékét, ha $x = -1$ $y = 2$; $w = \frac{1}{2}$

$2x^2 = 2$	$(2x)^2 = 4$	$-5y = -10$
$\frac{x+1}{1-x} = 0$	$\frac{3}{w} = 6$	$2w - y = -1$
$2(w-y) = -3$	$x^2 + y^2 = 5$	$(x+y)^2 = 1$
$\frac{y^3}{4} = 2$	$\left(\frac{y}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$2x + y - 4w =$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{x-y} = -\frac{1}{3}$	$(x+1)y = 0$

3) Egynemű kifejezések összevonása - vond össze az egyneműeket

a)

$x + x + x + x + x =$	$5x$	$-xy - xy - xy - xy =$	$-4xy$
$p^2 + p^2 + p^2 =$	$3p^2$	$-z^2 + 2z^2 - 6z^2 - z^2 =$	$-6z^2$
$-x^2 - x^2 - x^2 =$	$(-1-1-1)x^2 = -3x^2$	$2y^2 - y + 3y^2 - 3y - 4y - 5y^2 =$	$(2-1+3-3-4-5)y^2 = -10y^2$
$ab + 5ab - 6ab =$	$(1+5-6)ab = 0$	$cd^2 - cd^2 + cd^2 - cd^2 =$	0

b)

$5x - 2xy + 3yx - 4x - 2xy =$	$(5-4)x + (-2+3-2)xy = x - xy$
$2y - x + 3y - 3x - y + 8x =$	$(-1-3+8)x + (2+3-1)y = 4x + 4y$
$x^2 - x^2y + 4x^2 - 4x^2y + 5x^2y =$	$(-1-4+5)x^2y + (1+4)x^2 = 5x^2$
$xy^2 - 2xy + 3xy^2 - y - 4xy - y =$	$(1+3)xy^2 + (-2-4)xy + (-1-1)y = 4xy^2 - 6xy - 2y$
$12 - 4xy - 3x - 4 + 2xy + x =$	$(-4+2)xy + (-3+1)x + 8 = -2xy - 2x + 8$

$2y^2 - x^2 + y^2 + 3y^2 - 3x^2 - 5y^2 =$	$(-1-3)x^2 + (2+1+3-5)y^2 = -4x^2 + y^2$
$2x - 2xy + 3x + 2xy - 5x =$	$(-2+2)xy + (2+3-5)x = 0$
$2x^2 - 3x^2 + xy + x^2 - xy - 4x^2 + 5 =$	$(2-3+1-4)x^2 + (1-1)xy + 5 = -4x^2$
$4x - 5 + 3x - 2x + 7 - 5x =$	$(4+3-2-5)x + 2 = 2$
$5 - y + 4y + y - 3y + 7 - y =$	$(-1+4+1-3-1)y + 12 = 0$
$7a - a + 10a + 12a - 8a =$	$(7-1+10+12-8)a = 20a$
$6x - 4 + x - 5 - 4x - x =$	$(6+1-4-1)x - 9 = 2x - 9$
$18 + y + 7y - 23 - 4y - 2 - y =$	$(1+7-4-1)y + 18 - 23 - 2 = 3y - 7$
$\frac{5}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{x}{12} =$	$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{12}\right)x + \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
$\frac{x}{10} + \frac{x}{5} - \frac{3}{2} - \frac{2}{5}x + \frac{3x}{5} - \frac{1}{5} =$	$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)x - \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}x - \frac{17}{10}$
$\frac{5x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{7x}{21} - \frac{x}{2} + \frac{25}{30}x - \frac{8}{12} =$	$\frac{11}{6}x - \frac{2}{3}$
$11x^2 + 4x - x^2 - 5x =$	$10x^2 - x$
$-a - 5 - 2a + 3 =$	$-3a - 2$
$2y^2 - 3y + 2y - y^2 =$	$y^2 - y$
$-p^2 - q^2 + 2p^2 - q^2 =$	$p^2 - 2q^2$
$0,3x^3 - 0,1x^2 - 0,5x^3 - 0,4x^2 =$	$-0,2x^3 - 0,5x^2$
$5ab - 4a^2b^2 - 8ab^2 + 3ab - ab^2 - 4a^2b^2 =$	$-8a^2b^2 - 9ab^2 + 8ab$
$3(a-b)^2 - 5(a-b)^2 + \frac{3}{2}(a-b)^2 =$	$-\frac{1}{2}(a-b)^2$
$(p^2 - q^2) + \frac{2}{9}(p^2 - q^2) - \frac{2}{3}(p^2 - q^2) =$	$\left(1 + \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\right)(p^2 - q^2) = \frac{5}{9}(p^2 - q^2)$
$5a^n - 2a^n - 8a^{n+1} + 6a^n - a^{n+1} =$	$(-8-1)a^{n+1} + (5-2+6)a^n = -9a^{n+1} + 9a^n =$
$-9x^{k+1} - 4x^k + 12x^{k+1} + 5x^k + x^{k+1} =$	$4x^{k+1} + x^k$
$3b^k - 5b^{k-1} + 7b^{k-1} - 4b^k + 2b^{k-1} =$	$-b^k + 4b^{k-1}$
$-12p^q + 12q^p + 3p^q - 4q^p =$	$-9p^2 + 8q^p$

c) Szedd szét 3 nem egyforma tagra: $5x^2$

d) Számítsd ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $a=3$; $b=-5$ (Összevonás!)

$2a-3b+a-5a+5b=$	$-2a+2b \rightarrow -2(3)+2(-5)=-16$
$a^2+2b^2-3a^2+b^2=$	$-2a^2+3b^2 \rightarrow -2(9)+3(25)=57$
$\frac{2}{9}a+\frac{b}{5}-\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}a=$	$\frac{2}{3}a-\frac{b}{5} \rightarrow \frac{2}{3}(3)-\frac{-5}{5}=3$
$a^2+\frac{1}{5}b^2+\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{b^2}{5}+\frac{5}{2}a^2-3ab=$	$4a^2-5ab+\frac{2}{5}b^2 \rightarrow 36+75+10=121$

4) Egytagúak szorzása

Végeredmény: először az együtthatók szorzata, majd abc sorrendben a betűs kifejezések.

a) Szöveggel

Mennyit fizettünk összesen, ha x méter szövetet, méterét y forintért és w méter selymet, melynek méterét u forintért vásároltunk?

Mo.: $xy+wu$

Mennyit fizettünk összesen, ha x kg paradicsomot p forintért kilogrammját, és y kg paprikát, kilogrammját q forintért vásároltunk?

Mo.: $xp+ yq$

A piacon vettem 2 kg paradicsomot, kilogrammját x forintért. 4 kg paprika kilogrammja 10 Ft-tal többbe, a burgonyáé 20 Ft-tal kevesebbe került, mint a paradicsom kilogrammja. 2 kg burgonyát vettem. Mennyit fizettem összesen?

Mo: $2x+4(x+10)+2(x-2)$

b) Végezd el (Először a számok majd a betűk abc-ben!)

Pl. $2a^1 \cdot 4a^2 \cdot 8a^3 = 64a^6$

$a \cdot (+2) =$	$2a$	$(-b) \cdot 5 =$	$-5b$
$(-c) \cdot \frac{3}{4} =$	$-\frac{3}{4}c$	$x \cdot (-5) =$	$-5x$
$(-1,2) \cdot (-2k) =$	$2,4k$	$(-2) \cdot n =$	$-2n$
$(+4) \cdot (-q) =$	$-4q$	$(-9) \cdot (-k) =$	$9k$
$(-3) \cdot (2a) =$	$-6a$	$-1,2 \cdot (-5x) =$	$6x$
$(-2a)(-1,2) =$	$2,4a$	$(-c)(-b) =$	cb
$(-a)(-b)(c) =$	$-abc$	$(-x)(-y)(-z) =$	$-xyz$
$(-3c)(2b) =$	$-6bc$	$a^2 \cdot a =$	a^3
$(-a^2) \cdot a =$	$-a^3$	$a^2 \cdot (-a) =$	$-a^3$

$6c^2(-3c) =$	$-18c^3$	$(8d)(-2,5d^2) =$	$-20d^3$
$2x^2 \cdot 3x^3 =$	$6x^5$	$(5y^3)(-0,8y^2) =$	$-4y^5$
$\frac{2}{3}a^3 \cdot (-\frac{3}{2}a^2)(-3a^4) =$		$3a^9$	
$(+p)(-q)(z) =$	$-pqz$	$(-b)(c)(-d) =$	$-bcd$
$(-0,3x)(-5y) =$	$1,5xy$	$(8c)(-0,1d) =$	$-0,8cd$
$(-8r)(-0,25) =$	$2r$	$(2,5k)(-0,4m) =$	$-km$

Fejezd be: „Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

$a^2a =$	a^3	$(-x^2)(-x^3) =$	x^5
$(-m)m^3 =$	$-m^3$	$p^2p^4 =$	p^6
$x^m x^p =$	x^{m+p}	$y^n(-y^2) =$	$-y^{n+2}$
$a^{n+1}a^2 =$	a^{n+3}	$c^{n+1}c^{n-1} =$	c^{2n}
$x^{2n+1}x^{n+2} =$	x^{3n+3}	$a^{3k-2}a^{3k+3} =$	a^{6k+1}
$a^{p+q}a^{p-q} =$	a^{2p}	$a^{p+q}a^{p+q} =$	a^{2p+2q}

$(-2x^2y)(-1,5xy^2) =$	$3x^3y^3$
$(-\frac{3}{4}ab^2)(\frac{8}{3}a^2b^3) =$	$-2a^3b^5$
$-5b^2 \cdot 4b^2 =$	$-20b^4$
$-3a^n(-\frac{2}{3}a^{n+3}) =$	$2a^{2n+3}$
$(-8a^3b^2c)(-2ab^2c^3) =$	$16a^4b^4c^4$
$(\frac{2}{3}x^2y^3z)(6xy^2z^3) =$	$4x^3y^5z^4$
$(\frac{5}{4}a^2b^2c^3d)(-\frac{2}{5}a^3bc^2) =$	$-\frac{1}{2}a^5b^3c^5d$
$3a^3 \cdot 2b^2 \cdot 5a \cdot 2b^2 =$	$60a^4b^4$
$a^3 \cdot b^2 \cdot 5c^3 \cdot 2a^2 \cdot 5b^3 \cdot 2c =$	$100a^5b^5c^4$
$-5x^{k+1}(-2x^2) =$	$10x^{k+3}$
$4k^2p(-6k^{n-1}p^{n+1}) =$	$-24k^{n+1}p^{n+2}$
$-8a^p x^{q+1} y^q (-0,5a^{2-p} x^{q-1} y^2) =$	$4a^2 x^{2q} y^{q+2}$

c) Egyszerűsíts

$$\frac{12x^3y^4}{3xy^3} = 4x^2y$$

$$\frac{169x^2y^3}{13xy^3} = 13x$$

$$\frac{81x^3y^4x^2y^3}{27xy^3xy} = 3x^3y^3$$

$$\frac{144x^3yx^2y^5}{8xy(x^2y)^2} = 18y^3$$

$$\frac{98(xy^2w^3)^3}{7x^2y^2w^2} = 14xy^4w^7$$

$$\frac{180(x^2y^3)^2(x^3y^2w)^3}{36x^2y^2w(x^2y^5w)^2} = \frac{5x^4y^6x^9y^6w^3}{x^2y^2wx^4y^{10}w^2} = 5x^7$$

III) Egyszerűbb egyenletek

1) A mérlegelv bevezetése

Írd föl az alább összefüggéseket. Úgy kezded, hogy bevezetsz valamire egy ismeretlent...

Gondoltam egy számot. A fele 10-zel több a negyedénél.

$$\frac{x}{2} - 10 = \frac{x}{4}$$

Gondoltam egy számot. Elhagytam a kétharmadát belőle. A megmaradt 20-szal több az ötödénél.

$$x - \frac{2}{3}x - 20 = \frac{x}{5} \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{3}x - 20 = \frac{x}{5}$$

Gondoltam egy számot. A háromszorosához hozzáadtam 20-at, így az eredeti felénél 10-zel többet kaptam.

$$3x + 20 = \frac{x}{2} + 10$$

A kerekerdőben vígan él valamennyi röfi (x db). Ha kétszer annyi élne akkor a számuk 60-nal lenne több a háromnegyedüknél.

$$2x - 60 = \frac{3}{4}x$$

$$2x = \frac{3}{4}x + 60$$



2) Egyenletek felállítása, megoldása - bevezető

a) Írd föl a képen látható egyenleteket. Mérleg, súlyok, és egy-egy ábrán a dobozok azonos súlyúak. Hány kilósak a dobozok? A doboz súlya legyen x .

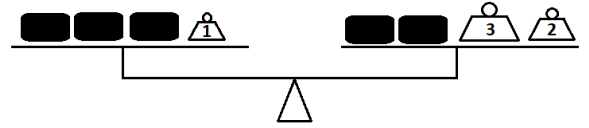
$$3x+1=2x+5 \quad /-1$$

$$3x = 2x+4 \quad /-2x$$

$$x=4$$

$$\text{Vh: } 3(4)+1=2(4)+5 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{x=4}}$$



$$3x+3=x+7 \quad /-3$$

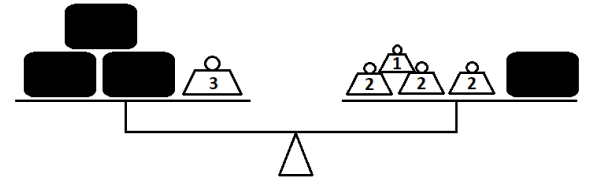
$$3x = x+4 \quad /-x$$

$$2x = 4 \quad /:2$$

$$x=2$$

$$\text{Vh: } 3(2)+3 = (2)+7 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$



$$4x+5=6x+2 \quad /-2$$

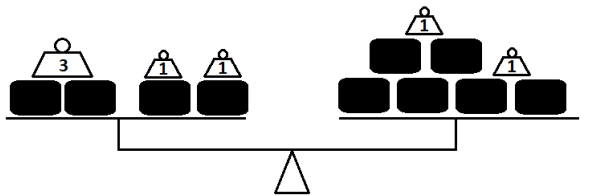
$$4x+3=6x \quad /-4x$$

$$3=2x \quad /:2$$

$$3/2 = x$$

$$\text{Vh: } 4(3/2)+5=6(3/2)+2 \quad \checkmark$$

$$\underline{\underline{x=3/2}}$$



b) Oldd meg

$$2x - 8 = 7x + 2$$

$$-10=5x$$

$$x=-2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=-2}}$$

$$30 - 3x = 7x$$

$$30=10x$$

$$x=3$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=3}}$$

$$5x + 6 = -14 - 3x$$

$$8x=-20$$

$$x=-5/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=-2,5}}$$

$$3x - 5 = x + 4$$

$$2x=9$$

$$x=9/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=9/2}}$$

c) Először összevonás kell!

$$4x - 5 + 3x = 5x + 1 - 8x - 7$$

$$7x-5=-3x-6$$

$$10x=-1$$

$$x=-1/10$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=-0,1}}$$

$$5+3x - 4+8x + 5 = 3x-4+6x + 1$$

$$11x+6 = 9x-3$$

$$2x=-9$$

$$x=-9/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=-s9/2}}$$

Egy szám ötszöröse 12-vel nagyobb a háromszorosánál 8-cal nagyobb számnál. Melyik ez a szám? Egyenlet, megoldás, visszahelyettesítés!

$$5x-12=3x+8$$

$$2x=20$$

$$x=10$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=10}$$

Melyik az a szám, amelyiknek az ötszöröse 22-vel kisebb, mint a háromszorosa?

$$5x+22=3x$$

$$22=-2x$$

$$x=-11$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-11}$$

Gondoltam egy számra. A négyszerese 6-tal nagyobb, mint a háromszorosánál 5-tel nagyobb szám. Mi volt ez a szám?

$$4x-6=3x+5$$

$$x=11$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=11}$$

Melyik szám négyszereséből vegyünk el 10-et, ha azt szeretnénk, hogy a különbség nagyobb legyen a keresett számnál 2-vel?

$$4x-10 = x+2$$

$$3x=12$$

$$x=4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=4}$$

3) Egyenletek felállítása, megoldása - gyakorlás

Oldd meg: $3x=5x / -3x$ (FIGYELJ, ITT MÉG KÉT OLDALON ÁLL x !)

$$0=2x / :2$$

$$x=0 \text{ Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$8a+a-10+2-4a = -a+13-3a+6a$$

$$5a-8=2a+13$$

$$3a=21$$

$$a=7 \text{ Vh} \checkmark \underline{a=7}$$

$$-3-5x+20+2x = 19-3x+7x-2-8x$$

$$-3x+17 = -4x+17 / -17$$

$$-3x = -4x / +4x$$

$$x=0 \text{ Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$9x+7-8x+6x = 13+4x-5+6x-1-8x$$

$$7x+7 = 2x+7 / -7$$

$$7x = 2x / -2x$$

$$5x = 0 / :5$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$4x-5x+8-6x+5 = 10-x+3-x$$

$$-7x+13 = 13-2x$$

$$-7x = -2x$$

$$0=5x$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$a+1+2a+2+3a+3+4a+4 = -2a-2-4a-8$$

$$10a+10 = -6a-10 / +10 -10a$$

$$20 = -16a / : (-16)$$

$$-5/4 = a$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a=-5/4}$$

$$3x+5-4x+7 = 6x+8-7x+10$$

$$-x+12 = -x+18 / +x$$

$$12 = 18$$

Ellentmondás, nincs ilyen x .

$$13x-2+5x-14 = x+4x-10+12x-6+x$$

$$18x-16 = 18x-16 \quad /+16$$

$$18x = 18x \quad /-18x$$

$$0=0$$

Azonosság. $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás.

$$8x-3-2x = -x+4+7x$$

$$6x-3 = 6x+4 \quad /+3$$

$$6x = 6x+7 \quad /-6x$$

$$0=7$$

Ellentmondás, nincs ilyen x.

4) Egyenletek felállítása, megoldása – törtegyütthatók – még egyenletszorzás nélkül

$$\frac{2}{3}a-7=-6$$

$$\frac{2}{3}a=1 \quad / \cdot (3/2)$$

$$a=3/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a=3/2}$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{3x}{2} - 3 = \frac{3x}{10} + x - 7$$

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right)x - 3 = \left(\frac{3}{10} + 1\right)x - 7$$

$$\frac{23}{10}x = \frac{13}{10}x - 4$$

$$x=-4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-4}$$

$$5 - \frac{7}{6}x + 4x - 3 - \frac{x}{2} = 3x + \frac{5}{3}x + 7$$

$$\left(-\frac{7}{6} + 4 - \frac{1}{2}\right)x + 2 = \left(3 + \frac{5}{3}\right)x + 7$$

$$\frac{7}{3}x = \frac{14}{3}x + 5$$

$$-\frac{7}{3}x = +5$$

$$x = -\frac{15}{7}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-15/7}$$

$$\frac{3}{4}y + 8 - 2y + \frac{3y}{8} = -3y - \frac{1}{8}y + 5 \quad (y=-4/3)$$

$$\left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{8}\right)y + 8 = \left(-3 - \frac{1}{8}\right)y + 5$$

$$-\frac{7}{8}y + 3 = -\frac{25}{8}y$$

$$\frac{18}{8}y = -3$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{y=-4/3}$$

$$\frac{4x}{12} - 8 - \frac{5x}{6} + 5 = 3 - \frac{2}{3}x - 7 + \frac{3}{4}x$$

$$\left(\frac{4}{12} - \frac{5}{6}\right)x - 3 = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)x - 4$$

$$-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{12}x$$

$$1 = \frac{7}{12}x$$

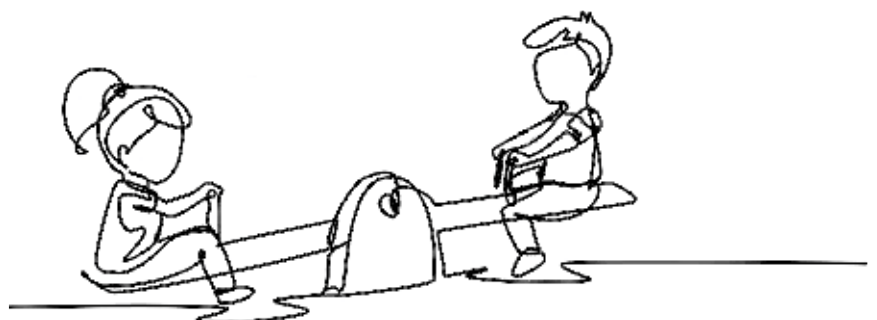
$$x = \frac{12}{7}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=12/7}$$

$$7x-3 = -4+7x$$

$$-3=-4$$

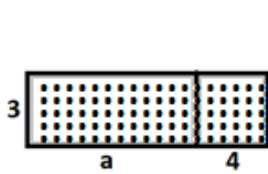
Ellentmondás, \nexists megoldás



IV) Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval zárójel-fölbontás

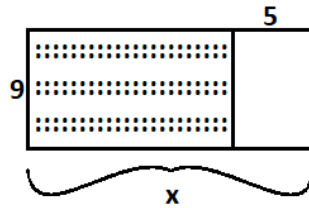
1) Szemléltetés

Számold ki a pontozott területet - szorzatként, majd felbontva a szorzatot! Írd alájuk!!



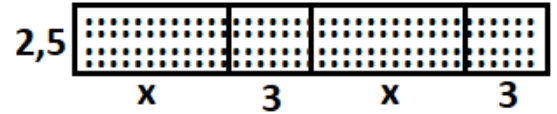
$$3(a+4)$$

$$3a+12$$



$$9(x-5)$$

$$9x-45$$



$$2,5(2x+6)$$

$$5x+15$$

2) Egytagú tényezővel több tagú tényező szorzása

a) Bontsd föl a zárójelet!

$$(e-x)y=ey-xy$$

$$(x-y) \cdot z=xz-yz$$

$$-2x(x+y)=-2x^2-2xy$$

$$(x+y+z)(-y)=-xy-y^2-yz$$

$$ab(a^3-5b^2)=a^4b-5ab^3$$

$$-\frac{5}{3}\left(\frac{6a}{10}-\frac{18b}{15}\right)=-a+2b$$

$$(1-x)4=-4x+4$$

$$7(2y-5)=14y-35$$

$$(3p+2q)6=18p+12q$$

$$10(-2k+3m)=-20k+30m$$

$$(-2z)(5x+4y)=-10xz-8yz$$

$$(-5a)(6a-3b)=-30a^2+15ab$$

$$(-3b)(-2a-4b)=6ab+12b^2$$

$$(2a-5b+6c)(-3)=-6a+15b-18c$$

$$2(3a^2-4a-8)=6a^2-8a-16$$

$$(-5)(4x^3+7x^2-x)=-20x^3-35x^2+5x$$

$$3,5 \cdot \left(\frac{3c}{14}-\frac{5}{7}\right)=\frac{3}{4}c-\frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{5d}{12}-\frac{25}{6}\right)\left(-\frac{18}{15}\right)=-\frac{1}{2}d+5$$

$$-\frac{e}{4}\left(\frac{24}{15}-4e\right)=e^2-\frac{2e}{5}$$

$$-\frac{5f}{12}\left(\frac{2f}{10}-\frac{18}{25}\right)=-\frac{f^2}{12}+\frac{3}{10}$$

$$(2x^3-3x^2+3x-1)4x^2=8x^5-12x^4+12x^3-4x^2$$

$$(8a^3-4a^2b^2-3ab^2+5b^3)(-2a^2b)=8a^4b^3-16a^5b+6a^3b^3-10a^2b^4$$

$$(-2a^3x+5a^2x^2-4ax^3+3x^4)(-3ax^2)=6a^4x^3-15a^3x^4+12a^2x^5-9ax^5$$

$$\frac{2x}{3}(-x^2+12x+4)=-\frac{2}{3}x^3+8x^2+\frac{8}{3}x$$

$$\frac{4}{5}x(10x^3-15x^2+5x+5)=8x^4-12x^3+4x^2+4x$$

$$0,4x(-3x^3-0,1x^2+0,5x+0,03)=-1,2x^4-0,04x^3+0,02x^2+0,012x$$

b) Több tag felbontása – a műveletek után vonj össze!

$$3(x+y)-5(x-y)=-2x+8y$$

$$x(x+y)-y(x-y)=x^2+y^2$$

$$2m(m-2n)+n(4m+n)=2m^2+n^2$$

$$-3x(x-2y)+2x(2x-y)=x^2+4xy$$

$$x(x^2+x)-3x(x-2x^2)=7x^3-2x^2$$

$$2(a^2+ab)-a(a-b)=a^2+3ab$$

$$3a(2a+3b)-3b(3a-2b)=6a^2+6b^2$$

$$3x(-3x+2y)-5y(x-y)=-9x^2+xy+5y^2$$

$$-3(a-b)-2(a+3b)-5(3a-2b)+5(a-2b)=-15a-3b$$

$$4(2x-y+z)-2(x+2y-2z)-3(-x-y-4z)=9x-5y+20z$$

$$6p^2-5p(2q-p)+4p(-3p-2,5q)=-p^2-20pq$$

$$10x(4x^2-7y)-6x(5y+7x^2)-3xy=-2x^3-103xy$$

$$-x(3x^3-x^2+2)+2x^2(-x^2+4x-3)-(3x^2-x+2)=-5x^4+9x^3-9x^2-x-2$$

$$-(4x^4-3x^3+2x^2-x+1)+2x(-2x^3+x^2-3)-5x^2(-3x^2-4x+1)=7x^4+25x^3-7x^2-5x-1$$

$$5(x^n-y^{n-1})-2(x^n+3y^{n-1})+4(x^n-5y^{n-1})=7x^n-31y^{n-1}$$

$$2a^k(7a^2-2a^p)-2a^p(3a^{2-p}-4a^k)=4a^{k+p}+14a^{k+2}-6a^2$$

c) Folytasd: Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$$(7^{a-2})^3 = 7^{3a-6}$$

$$(x^{2y-3})^2 = x^{4y-6}$$

$$(5^{2x^2-x+5})^{3x} = 5^{6x^3-3x^2+15x}$$

3) Helyettesítési érték - behelyettesítés

Mennyi a következő kifejezés helyettesítési értéke, ha $a = \frac{7}{9}$ és $b = \frac{2}{7}$

$$2,5(2a + 4b) - 3(a - 4b + 2) - 2(3a + 2b - 3) - (-4)(a - b) = \\ = 14b, \text{ ezért a helyettesítési érték: } 4$$

Mennyi a következő kifejezés helyettesítési értéke, ha $u = -\frac{1}{4}$ és $v = \frac{1}{2}$

$$2u(u - 3v) - 4v(0,5u - 2v) - u(2u - 2v) - 2v(u + 4v) = \\ = -8uv, \text{ ezért a helyettesítési érték: } 1$$

4) Egytagok osztása - egyszerűsítsünk

$$\frac{2^8 \cdot 3^7 x^3 y z^4}{2^3 \cdot 3 x^2 y z^4} = 2^5 3^6 x$$

$$\frac{128 \cdot 243 x^5 y^3 z}{32 \cdot 27 x^2 y} = 36 x^3 y^2 z$$

$$\frac{(2xy)^6 (3x^2 y^3)^6}{((6xy^3)^3)^2} = x^{12} y^6$$

5) Egyenletmegoldás

Először boncold föl a zárójeleket – ahol vannak!

$$3x - (x - 2) - 2(-x - 2) = 2 - 2x - (x + 3) \quad (x = -1)$$

$$4x + 6 = -3x - 1$$

$$7x = -7$$

$$x = -1$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x = -1}}$$

$$-(5 - 2x) + 3(x - 4) + 7 = 9 - 3x + 2(3 - 2x) - 2(x - 5)$$

$$5x - 10 = -9x + 25$$

$$14x = 35$$

$$x = 5/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x = 5/2}}$$

$$3(5 - 2(x + 4)) = -9(x + 1) \quad (x = 0)$$

$$-6x - 9 = -9x - 9$$

$$-6x = -9x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x = 0}}$$

$$-5(1 - 3x) + 2(3x - 2) - 3 = -2(1 - 2x) - 5(2 - 3x)$$

$$21x - 12 = 19x - 12$$

$$21x = 19x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x = 0}}$$

$$3(2x-1)-2(x+3) = 2(2x-1)-(-x-3)$$

$$4x-9=5x+1$$

$$-10=x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=-10}}$$

$$14-(x+5)+3(2-4x) = -5(2x+4)+8$$

$$-13x+15 = -10x-12$$

$$27 = 3x$$

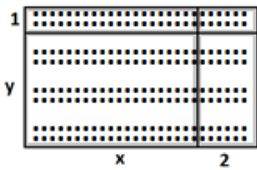
$$x=9$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{\underline{x=9}}$$

V) Több tag szorzása több taggal

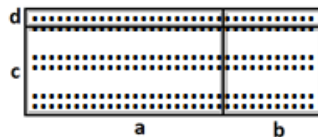
1) Bevezetés, szemléltetés

Írd alájuk a pontozott területet szorzat, majd „összeg alakban”, vagyis felbontva a szorzatot!



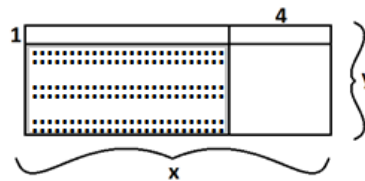
$$(x+2)(y+1)$$

$$xy+x+2y+2$$



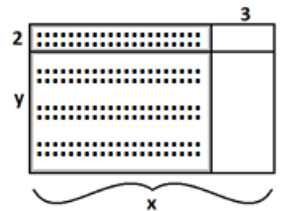
$$(a+b)(c+d)$$

$$ab+ac+bc+bd$$



$$(x-4)(y-1)$$

$$xy-4y-x+4$$



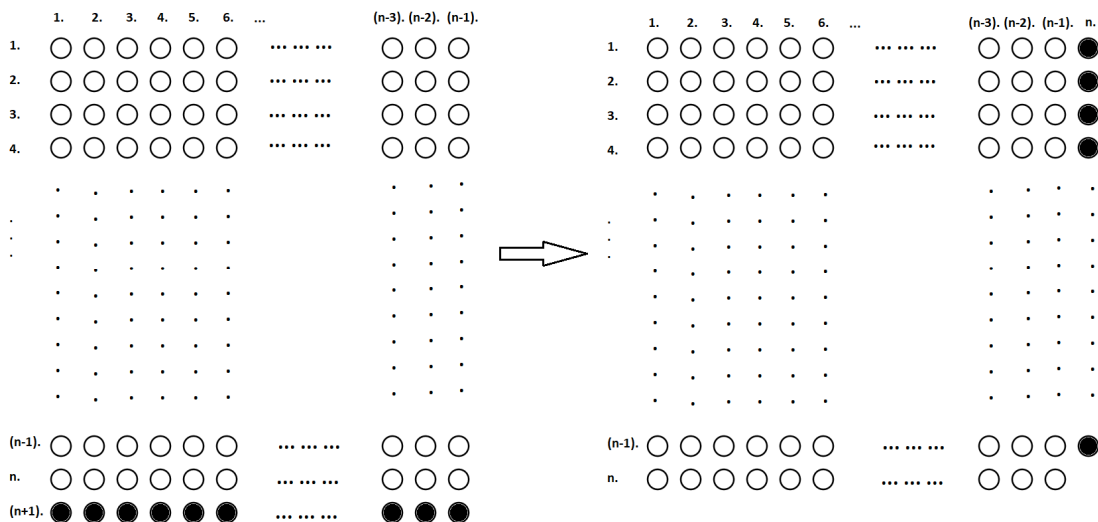
$$(x-3)(y+2)$$

$$xy+2x-3y-6$$

Fejezd be: „Azonos kitevőjű hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát emelem az adott kitevőre”

Nem kötelező: Szemléltetés nézd meg az ábrát, és magyarázd el, hogy $(n+1)(n-1)=n^2-1$

Segítség az első elrendezésben van n-1 oszlop és n+1 sor. Az alsó feketéket rendezem át.



Az ábra alapján magyarázd el, hogy $(n+1)(n-1)=n^2-1$

Mo: $(n-1)$ oszlop, minden oszlopban $(n+1)$ golyó (n db. fehér és 1 fekete).

Ez összesen: $(n-1)(n+1)$ db. golyó.

A feketéket átrendezem: így n db. oszlop lesz, mindegyikben n db. golyó, kivéve a legutolsó: vagyis összesen n^2-1 db. golyó van.

Így: $(n-1)(n+1) = n^2-1$

2) Többszorzók szorzása

a) Bontsd föl – vonj össze, ha lehet. Csökkenő fokszám!

$$(a-3)(b+2)=ab+2a-3b-6$$

$$(2a+2)\left(a+\frac{3}{2}\right)=2a^2+5a+3$$

$$(ab-1)(a+b)=a^2b+ab^2-a-b$$

$$(a^2+1)(a+1)=a^3+a^2+a+1$$

$$(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$$

$$(0,1x-10)(10x+0,1)=x^2-99,99x-1$$

$$(x^2+2x+1)(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$$

$$(2ab+1)(a-b)=2a^2b-2ab^2+a-b$$

$$(5a^2+1)\left(\frac{a}{5}-1\right)=a^3-5a^2+\frac{a}{5}-1$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

$$(a+2)(a+3)=a^2+5a+6$$

$$(2x-1)(5-3x)=-6x^2+13x-5$$

$$(x^3+x)(x^2+x+3)=x^5+x^4+4x^3+x^2+3x$$

$$(3x+2y)(2x+3y)=6x^2+13xy+6y^2$$

$$(3a^2-2b)(2a^2+3b)=6a^4+5a^2b-6b^2$$

$$(3ab-4a^2)(5a+2b)=-20a^3+7a^2b+aab^2$$

$$(7x^2-x)(5x^2+3x)=35x^4+16x^3-3x^2$$

$$(3x-5)(3x+5)=9x^2-25$$

$$(2x+3)(2x+3)=4x^2+12x+9$$

$$(5-x)(x+5)=-x^2+25$$

$$(4x+12)(4x-12)=16x^2-144$$

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=x^5+1$$

$$(x^2-2)(x^6+2x^4+4x^2+8)=x^8-16$$

b) Három tényező - egyszerre csak kettőt szorozz össze! (Nagy zárójel!)

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc$$

$$(2x-3)(x+5)(3x-4)=6x^3+13x^2-73x+60$$

$$(3x^2-2x+1)(x-5)=3x^3-17x^2+11x-5$$

$$(4ab-a^2)(0,5ba-b^2)=-0,5a^3b+3a^2b^2-4ab^3$$

$$-3(2-x)(-5-x) = -3x^2 - 9x + 30$$

$$-3(x-3)(3x+5) = -9x^2 + 12x + 45$$

$$-(2x-1)(1-5x) = 10x^2 - 7x + 1$$

$$-15(12x-2)(x+4) = -180x^2 - 690x + 120$$

$$(13x-5)(15x+2) = 195x^2 - 49x - 10$$

$$-(5-3x)(5x+3) = 15x^2 - 16x - 15$$

$$-12(12x-1)(x+3) = -144x^2 - 420x + 36$$

$$(2x^2-3x-4)(5x-1) = 10x^3 - 17x^2 - 17x + 4$$

$$(11x^2-x+2)(5x-3) = 55x^3 - 38x^2 + 13x - 6$$

$$-3(8-2x)(8+2x) = 12x^2 - 192$$

$$(5x+1)^2 = (5x+1)(5x+1) = 25x^2 + 10x + 1$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$-2(5-2x)^2 = -8x^2 + 40x - 50$$

$$(x^2-1)(x^4+2) = x^6 - x^4 + 2x^2 - 2$$

$$(-2x^3-2)(-3x^3+3) = 6x^6 - 6$$

$$(a^2+a+1)(a-1) = a^3 - 1$$

c) Csak a végeredményt írd le, fejben számold! Csökkenő fokszám, összevonás!

$$(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$$

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$$

$$(x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$$

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$$

$$(2x+1)(x+3) = 2x^2 + 7x + 3$$

$$(3x+5)(x+2) = 3x^2 + 11x + 10$$

$$(3x+2)(x-1) = 3x^2 - x - 2$$

$$(5x+1)(x-3) = 5x^2 - 14x - 3$$

$$(2x+1)(3x+2) = 6x^2 + 7x + 2$$

$$(3x-1)(2x+3) = 6x^2 + 7x - 3$$

$$(5x-2)(2x-1) = 10x^2 - 9x + 2$$

$$(7x-2)(3x-4) = 21x^2 - 34x + 8$$

$$(x-5)(x+5) = x^2 - 25$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1$$

$$(x-1)^2 = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$$

$$(2x+1)^2 = (2x+1)(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

d) Több tag, egy tag többtényezős: NAGY ZÁRÓJELEK KIRAKÁSA!

Bontsd föl a zárójelet, vonj össze, csökkenő fokszám!

$$2(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)=x^2-8x+13$$

$$3(a-5)(3a-1) - 2(5a+2)(a-3)=-a^2-22a+27$$

$$3(k-2)(2k-3) + 2(k+6)(2k-5) - (k-4)(k+4)=9k^2-7k-26$$

$$-(2x-3)(3x+1) + 2(2x+3)(x-3)=-2x^2+x-15$$

$$-3(a-3)(a+4) - (5-a)(2a+5) = -a^2-8a+11$$

$$5(2x+3)(3x+5) - (3x+2)(x-4) = 27x^2+105x+83$$

$$-(a+1)(1-a) + 3(2-a)(a-2) - 3(2a-4)(a+1) = -8a^2+18a-1$$

$$2(x-3)^2 - (2x+3)(-2x+3) - 4(x+2)^2 = (2x^2-12x+18) - (-4x^2+9) - 4(x^2+4x+4) = 2x^2-28x-7$$

$$(2x-1)(x+3) - 4(x+2)(x-4) + 3(2x+3)(x+5) = 4x^2+52x+74$$

$$\begin{aligned} -3(x-2)(x+5) - (3x-1)^2 + 3(x-2)(2x+6) &= -3(x^2+3x-10) - (9x^2-6x+1) + 3(2x^2+2x-12) = \\ &= -6x^2+3x-7 \end{aligned}$$

e) Többtagú tényezők – többtényezős szorzatok – minden tagot minden taggal

$$(3x^2-3x+2)(-x^2+x-3) = -3x^4+6x^3-14x^2+11x-6$$

$$(3x^2-x+4)(x-3) = 3x^3-10x^2+7x-12$$

$$(2x+5)(x^2-4x+3) = 2x^3-3x^2-14x+15$$

$$(5x+2)(2x^2-3x+4) = 10x^3-11x^2+14x+8$$

$$(3x^2-4x+2)(-x^2+x+3) = -3x^4+7x^3+3x^2-10x+6$$

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2) = x^4+4 \text{ (Nagyon érdekes)}$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1 \text{ (Felettébb érdekes)}$$

Gyorsítottan: csökkenő kitevőket figyelve:

$$(2x-5)(3x+7) = 6x^2-x-35$$

$$3x-2)(4x-3) = 12x^2-17x+6$$

$$(4-5x)(3x+2) = -15x^2+2x+8$$

$$(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$$

$$(2x^2-4x+1)(2x^2+4x-1) = 4x^4-16x^2+8x-1$$

$$(x^2-3x-4)(2x^2+3x-1) = 2x^4-3x^3-18x^2-9x+4$$

f) Több tényező, többtagú tényezők, több tag – nagyzárójelek kirakása!

$$(2x+3)(3x+2)(x-1) = (6x^2+13x+6)(x-1) = 6x^3+7x^2-7x-6$$

$$(5x+2)(x-3)(2x+4) = (5x^2-13x-6)(2x+4) = 10x^3-6x^2-64x-24$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1) = (x^4+x^2+1)(x^2-1) = x^6-1$$

$$-(-2x^2+x-2)(5-6x) + 2x(5x^2-3x-1) - (x-2)(-2x^2-x+3) = 7x^2-24x+16$$

$$-3(-1-x^2-x)(-3+x) - (2-x)(3x-3x^2+5) + 2(6-2x)(x-3-2x^2) = 8x^3-25x^2+17x-55$$



g) Keresd a szimmetriát, jól válaszd ki, mely tényezőket szorzod össze először!

$$(2a-3)(a+2)(a-2)(2a+3)=(4a^2-9)(a^2-4)=4a^4-25a^2+36$$

$$(a+2)(a^2-3)(a-2)(a^2+3)=(a^2-4)(a^4-9)=a^6-4a^4-9a^2+36$$

3) Két tag összegének, különbségének a négyzete

a) Alap

Írd ide a két tag összegének négyzetére vonatkozó mondókát!

Két tag összegének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete plusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

Fejben végezd el a következőket, csak az eredményt írd melléjük!

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$$

$$(3x+1)^2=9x^2+6x+1$$

$$(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$$

$$(3x+5)^2=9x^2+30x+25$$

Írd ide a két tag különbségének négyzetére vonatkozó mondókát!

Két tag különbségének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete mínusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

Fejben végezd el a következőket, csak az eredményt írd melléjük!

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(x-1)^2=x^2-2x+1$$

$$(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$(2x-1)^2=4x^2-4x+1$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(3x+2)^2=9x^2+12x+4$$

$$(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$

$$(7x+3)^2=49x^2+42x+9$$

$$(7x-3)^2=49x^2-42x+9$$

b) Gyakorlás

$$(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$$

$$(3x-5)^2=9x^2-30x+25$$

$$(11x+1)^2=121x^2+22x+1$$

$$(13x-1)^2=169x^2-26x+1$$

$$(12x-7)^2=144x^2-168x+49$$

$$(7x-4)^2=49x^2-56x+16$$

$$(8x+13)^2=64x^2+208x+169$$

$$(3x-9)^2=9x^2-54x+81$$

$$(x^2-5)^2=x^4-10x^2+25$$

$$\left(\frac{3}{2}x+3\right)^2=\frac{9}{4}x^2+9x+9$$

$$(x^3+x)^2=x^6+2x^4+x^2$$

$$(2-3x)^2=9x^2-12x+4$$

$$(5x^3-x^2)^2=25x^6-10x^5+x^4$$

$$(x^2-5x^3)^2=25x^6-10x^5+x^4$$

$$(a^n-2)^2=a^{2n}-4a^n+4$$

$$(3x^n-5x^k)^2=9x^{2n}-30x^{n+k}+25x^{2k}$$

$$(x^k-x^{k+1})^2=x^{2k+2}-2x^{2k+1}+x^{2k}$$

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)^2=\frac{x^2}{4}+3x+9$$

$$\left(\frac{3x}{2}-5\right)^2=\frac{9}{4}x^2-15x+25$$

$$\left(\frac{4x}{3}-\frac{y}{4}\right)^2=\frac{16x^2}{9}-\frac{2xy}{3}+\frac{y^2}{16}$$

$$(5^{x+3})^2=5^{2x+6}$$

$$(7^{2x-5})^2=7^{4x-10}$$

$$(a^{2x-3})^{2x-3}=a^{4x^2-12x+9}$$

$$(3a^n+2)^2=9a^{2n}+12a^n+4$$

$$(x^k+x^2)^2=x^{2k}+2x^{k+2}+x^4$$

$$(x^{k-2}-x^7)^2=x^{2k-4}-2x^{k+5}+x^{14}$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$$

$$\left(\frac{2x}{3}-3\right)^2=\frac{4x^2}{9}-4x+9$$

$$\left(5x-\frac{3}{5}\right)^2=25x^2-6x+\frac{9}{25}$$

$$(5^{x+3})^{x+3}=5^{(x+3)(x+3)}=5^{(x+3)^2}=5^{x^2+6x+9}$$

$$(7^{2x-5})^{2x-5}=7^{4x^2-20x+25}$$

$$(5^{3x-2})^{3x-2}=5^{9x^2-12x+4}$$

Ismérd föl, hogy minek a négyzete!

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$9a^2+12a+4=(3a+2)^2$$

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$$

$$25x^2+20x+4=(5x+2)^2$$

$$4a^2-4a+1=(2a-1)^2$$

$$9x^2-6x+1=(3x-1)^2$$

Egészítsd ki úgy, hogy teljes négyzet legyen, és írd mellé, minek a négyzete

$$x^2-4x+\dots=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$4a^2+12a+\dots=(2a+3)^2=4a^2+12a+9$$

$$16x^2-\dots+1=(4x-1)^2=16x^2-8x+1$$

$$4a^2-\dots+25=(2a-5)^2=4a^2-20a+25$$

4) Ismétlés: bontsd föl, majd vonj össze – figyelj – nagy zárójelek!!

$$(x+2)^2+3(x+1)^2=4x^2+10x+7$$

$$2(y-2)^2-3(y+3)^2=-y^2-26y-19$$

$$4(3-5a)^2-5(3a-7)(3a+7)=55a^2-120a+281$$

$$(a-1)^2-3(a+1)^2-5(a-1)(a+1)=-7a^2-8a+3$$

$$(a-b)^2+(a+b)(a-b)+2a(a-b)=a^2-2ab+b^2+a^2-b^2+2a^2-2ab=4a^2-4ab$$

$$(14x+6)^2-(15x+11)(15x-11)=196x^2+168x+36-225x^2+121=-29x^2+168x+157$$

SZORZATTÁ-ALAKÍTÁS

I) Szorzattá alakítás

1) Csak szám emelhető ki; a főegyüttható pozitív legyen!

$$5x-5a=5(x-a)$$

$$-4x+16y=-4(x-4y)$$

$$-15a+6b=-3(5a-2b)$$

$$-21a+6b-15c=-3(7a-2b+5c)$$

Határozd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját

$$(180;126)=18$$

$$(1400;750)=50$$

$$(1512;1080)=216$$

$$(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; 2 \cdot 3^2 \cdot 7)$$

$$(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7; 2 \cdot 3 \cdot 5^3)$$

$$(2^3 \cdot 3^3 \cdot 7; 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5)$$

2) Betű is kiemelhető

a) Amit lehet emelj ki! (A főegyüttható pozitív legyen, csökkenő fokszám!)

$$ax+bx=x(a+b)$$

$$a^2+a=a(a+1)$$

$$ca-cb=c(a-b)$$

$$x^2-x=x(x-1)$$

$$3ab+3a=3a(b+1)$$

$$10x-5xy=-5x(y-2)$$

$$4x^2-6x=2x(2x-3)$$

$$22x-121xy=-11x(11y-2)$$

$$5ab+5ac-10ad=5a(b+c-2d)$$

$$3xy-6xz=3x(y-2z)$$

$$15ax-10ay=5a(3x-2y)$$

$$-2xy-ay+by=-y(2x+a-b)$$

$$3x^2+x=x(3x+1)$$

$$5b-15ab-25b^2=-5b(3a+5b-1)$$

$$12a^3+27a^2=3a^2(4a+9)$$

$$6m^4-3m^3=3m^3(2m-1)$$

$$-10x^3-5x^2=-5x^2(2x+1)$$

$$8a^4-12a^2=4a^2(2a^2-3)$$

$$3m^2+6m^3=3m^2(2m+1)$$

$$15y^3-5y=5y(3y^2-1)$$

$$9a^5-12a^4+15a^3=3a^3(3a^2-4a+5)$$

$$-18z^6+24z^3-30z^2=-6z^2(3z^4-4z+5)$$

$$-ab^2-a^2b^3=-ab^2(ab+1)$$

$$-a^4x^2-a^3x^4=-a^3x^2(x^2+a)$$

$$5m^2x^2+10mx^3=5mx^2(2x+m)$$

$$6x^3y^2-216x^3y=6x^3y(y-36)$$

$$3x^2y-6xy+6xy^2=3xy(x+2y-2)$$

$$27x^3-54x^2-81x=27x(x^2-2x-3)=27x(x+1)(x-3)$$

b) Amit lehet emelj ki! (A főegyüttható pozitív legyen, csökkenő fokszám!)

$$3a^2x+6ax^2=3ax(2x+a)$$

$$5xy^2-10x^3y^4=-5xy^2(2x^2y^2-1)$$

$$4a^2-2ab+6a=2a(2a-b+3)$$

$$-6b^3-18ab^2+3b^2=-3b^2(6a+2b-1)$$

$$8a^2bc-12ab^2c-6abc^2=2abc(4a-6b-3c)$$

$$10a^2bc-20a^2b^2c-15ab^2c=-5abc(4ab-2a+3b)$$

$$-14a^2c^2-21ab^2c^3-7c^2=-7c^2(3ab^2c+2a^2+1)$$

$$4a^2bc-2b^2c+6bc^2=2bc(2a^2-b+3c)$$

$$80x^2y^2-40x^2y-60xy^2=20xy(4xy-2x-3y)$$

$$26x^3u^3-39x^2u^4+52xu^5=13xu^3(2x^2-3xu+4u^2)$$

$$99pr-88p^2r+77pr^2-66p^2r^2=-11pr(6pr+8p-7r-9)$$

$$44x^2y-22x^3y^2+121x^2y^3=-11x^2y(2xy-11y^2-4)$$

$$10a^4b^3-15a^4b^2+5a^3b^2=5a^3b^2(2ab-3a+1) \quad -32x^4y^3+24x^2y^4-8x^2y^2=-8x^2y^2(4x^2y-3y^2+1)$$

$$x^{n+5}+3x^5=x^5(x^{n+3})$$

$$12x^{2n+3}-18x^2=6x^2(2x^{2n+1}-3)$$

$$x^n+x^{n+2}=x^n(x^2+1)$$

$$y^{n+k}-y^k=y^k(y^n-1)$$

$$x^{5n}-x^{3n}=x^{3n}(x^{2n-1})$$

$$5a^{k+2}-10a^2=5a^2(a^k-2)$$

c) Zárójeles kifejezés emelhető ki

$$a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

$$x(a+3)-y(a+3)=(a+3)(x-y)$$

$$a(x-5)+b(x-5)=(x-5)(a+b)$$

$$x(a+1)-y(a+1)=(a+1)(x-y)$$

$$3a(a-b)+2b(a-b)=(a-b)(3a+2b)$$

$$2y^2(5x-1)+(5x-1)=(5x-1)(2y^2+1)$$

$$6m(p-3)+5z(p-3)=(p-3)(6m+5z)$$

$$(p-q)-2p(p-q)=-(p-q)(2p-1)$$

$$3x(2b-3)-(2b-3)=(2b-3)(3x-1)$$

$$5x(a+b)-4y(a+b)=(a+b)(5x-4y)$$

$$x^2(2+3x)+2(3x+2)=(3x+2)(x^2+2)$$

$$2y^2(5x+1)-(1+5x)=(5x+1)(2y^2-1)$$

$$-(3x+2)+5x(3x+2)=(3x+2)(5x-1)$$

$$(x^2-1)-3x(x^2-1)=-(x^2-1)(3x-1)$$

$$(5x+2)-3x(5x+2)+6x^2(5x+2)=(5x+2)(6x^2-3x+1)$$

$$k^2(x^2+3)-(3+x^2)-k(x^2+3)=(x^2+3)(k^2-k-1)$$

d) Mindenre figyelünk – **csökkenő fokszám, a főegyüttható pozitív legyen!**

A SZORZATTÁ ALAKÍTÁSHOZ A ZÁRÓJELBŐL IS MINDENT KI KELL EMELNI – abc – csökkenő fokszám – relatív prím együtthatók (minden, ami lehet, kiemelve)!

$$x(2b-4)-x^2(3b-6)=-x(3x-2)(b-2)$$

$$2(5ax-15a)-3a(4xb-12b)=-2a(x-3)(6b-5)$$

$$(3x^2-6)-y(5x^2-10)=-x^2-2)(5y-3)$$

$$-3k(15x^3+5x)+4(6x^4+2x^2)=x(3x^2+1)(8x-15k)$$

$$x(x-4)-3(4-x)=(x-4)(x+3)$$

$$y(b-5)+3(5-b)=(b-5)(y-3)$$

$$p(p-1)-4(1-p)=(p-1)(p+4)$$

$$(x-2)+x(2-x)=-x(x-1)$$

$$a(2x-2y)-(3y-3x)=(x-y)(2a+3)$$

$$(y-x)+2x(x-y)=-x(2x-1)(x-y)$$

$$3x(x-1)-(1-x)=(x-1)(3x+1)$$

$$2k(a-b)+(b-a)=(a-b)(2x-1)$$

$$x(2p-a)+y(2a-4p)-(10p-5a)=-x(a-2p)(x-2y-5)$$

$$a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5x(z-x-y)=(x+y-7)(a-3b+5x)$$

$$x(6x-2)+y(3-9x)=(3x-1)(2x-3y)$$

$$x(10-15x)+(4-6x)+y(14-21x)=-x(3x-2)(5x+7y+2)$$

$$x(2-3x)+(6x^3-4x^2)=x(3x-2)(2x-1)$$

$$(y-5xy)+(10xy^2-2y^2)=y(5x-1)(2y-1)$$

$$-2(6x-3x^2)-3(4x^2-8x)+2x(10x-5x^2)=6x(x-2)-12x(x-2)-10x^2(x-2)=-2x(x-2)(5x+3)$$

e) Alakítsd szorzattá - már nincs csoportosítva

abc – csökkenő fokszám – relatív prím együttthatók (minden, ami lehet, kiemelve) – a főegyütthatók pozitívok!

$$ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y)$$

$$ax-by-ay+bx=(a+b)(x-y)$$

$$a^2+bc+ab+ac=(a+b)(a+c)$$

$$x^3+9+3x^2+3x=(x^2+3)(x+3)$$

$$x^2-xy+ax-ay=(x-y)(x+a)$$

$$x^2+2y-xy-2x=(x-2)(x-y)$$

$$m^2-5a+ma-5m=(a+m)(m-5)$$

$$a^2+3b-ab-3a=(a-b)(a-3)$$

$$3ax-4by-4ay+3bx=(a+b)(3x-4y)$$

$$5bx-6ax-5by+6ay=-(x-y)(6a-5b)$$

$$10b^2+21xy-14bx-15by=(7x-5b)(3y-2b)$$

$$30bx-34cx-15b+17c=(2x-1)(15b-17c)$$

$$! x+x^2-x^3-x^4=-x(x+1)^2(x-1)$$

$$3x^2-3xy+3y^2-3xy=3(x-y)^2$$

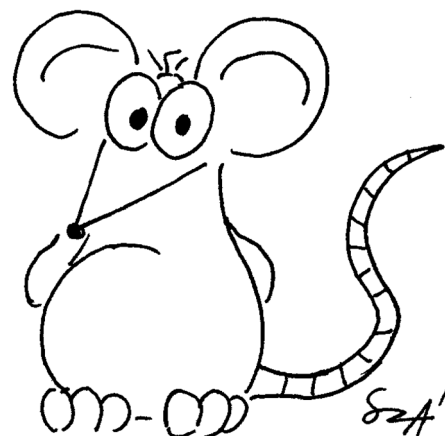
$$9a^2-6ab+4b^2-6ab=(3a-2b)^2$$

$$6x+15x^2-8x^3-20x^4=-x(4x^2-3)(5x+2)$$

$$x^3+x^2y-x^2z-xyz=x(x^2+xy-xz-yz)=x(x+y)(x-z)$$

$$3x+6+x^2+2x=(x+2)(x+3)$$

$$x^2-12x-3x+36=(x-3)(x-12)$$



$$5x-15+x^2-3x=(x-3)(x+5)$$

$$6y-6x-9xy+4=-(3x-2)(3y+2)$$

$$x^2-xy-2x+2y=(x-y)(x-2)$$

$$3ax-4by-4ay+3bx=(a+b)(3x-4y)$$

$$5bx-6ax-5by+6ay=(x-y)(5b-6a)$$

$$10a^2+21xy-14ax-15ay=(7x-5a)(3y-2a)$$

$$6a^2-6ab+6b^2-6ab=6(a-b)^2$$

$$ax^2-bx^2-bx+ax-a+b=x^2(a-b)+x(a-b)-(a-b)=(a-b)(x^2+x-1)$$

$$ax^2-bx+b-ax+bx^2+a=x^2(a+b)-x(a+b)+(a+b)=(a+b)(x^2-x+1)$$

$$ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x^2(a+b-c)+x(a+b-c)=x(a+b-c)(x+1)$$

$$ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx=ax(x-1)+bx(x-1)+cx(x-1)=x(x-1)(a+b+c)$$

II) Teljes négyzet

1) Szorzattá alakítás előtt mindent kiemelünk!

Csökkenő fokszám, minden kiemelve (az együtthatók relatív prímekek legyenek), a főegyüttható pozitív legyen!

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$4a^2+4a+1=(2a+1)^2$$

$$-10x+25x^2+1=(5x-1)^2$$

$$4x^2-12x+9=(2x-3)^2$$

2) Mindent kiemelünk, a főegyüttható pozitív, csökkenő fokszám stb.

$$-2a^2-4a-2=-2(a+1)^2$$

$$-5xb^2-5a^4x+10xa^2b=5x(a^2-b)^2$$

$$3x+75y^4x-30y^2x=3x(5y^2-1)^2$$

$$-x^4+2yx^2-y^2=-(x^2-y)^2$$

$$9a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = (3a^2 - b^2)^2$$

$$20x^2y^2 - 50x^4 - 2y^4 = -2(5x^2 - y^2)^2$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x+y)^2$$

$$-3b - 3a^2b + 6ab = -3b(a-1)^2$$

$$3xy^2 + 3x - 6xy = 3x(y-1)^2$$

$$2a + 2ab^2 - 4ab = 2a(b-1)^2$$

$$4ax + 4ax^3 - 8ax^2 = 4ax(x-1)^2$$

$$44x - 121x^2 - 4 = -(11x-2)^2$$

III) Egy különleges alak $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1) Odafele – végezd el a szorzást – CSAK AZ EREDMÉNYT ÍRD LE!

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$(a+2)(a-2) = a^2 - 4$$

$$(x-13)(x+13) = x^2 - 169$$

$$(15x+19y)(15x-19y) = 225x^2 - 361y^2$$

$$(2b-3a)(2b+3a) = 4b^2 - 9a^2$$

$$(12x+11y)(12x-11y) = 144x^2 - 121y^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4$$

$$(2xy-1)(2xy+1) = 4x^2y^2 - 1$$

$$(3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$(15a^2+18)(15a^2-18) = 225a^4 - 324$$

$$(17a^2 + 15b)(17a^2 - 15b) = 289a^4 - 225b^2$$

$$(0,2a-0,5b)(0,2a + 0,5b) = 0,04a^2 - 0,25b^2$$

$$(xk+y)(xk-y) = x^2k^2 - y^2$$

$$(14x-16)(14x+16) = 196x^2 - 256$$

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) = a^2 - \frac{9}{4}$$

$$(ab-0,5)(ab + 0,5) = a^2b^2 - 0,25$$

$$\left(xy - \frac{x}{y}\right)\left(xy + \frac{x}{y}\right) = x^2y^2 - \frac{x^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{2x}{3} + 2\right)\left(\frac{2x}{3} - 2\right) = \frac{4}{9}x^2 - 4$$

$$(1,5b-0,5)(1,5b+0,5) = 2,25b^2 - 0,25$$

$$\left(xy - \frac{x}{y}\right)^2 = x^2y^2 - 2x^2 - \frac{x^2}{y^2}$$

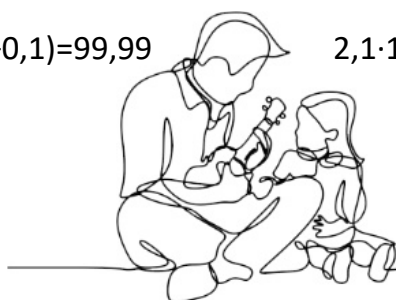
Számokkal:

$$28 \cdot 32 = (30-2)(30+2) = 896$$

$$81 \cdot 79 = (80+1)(80-1) = 6399$$

$$9,9 \cdot 10,1 = (10-0,1)(10+0,1) = 99,99$$

$$2,1 \cdot 1,9 = (2+0,1)(2-0,1) = 4-0,01 = 3,99$$



Többszorosítók, amit lehet: fejben

$$(a+b-2)(a+b+2)=(a+b)^2-4=a^2+2ab+b^2-4$$

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)=(a+b)^2-(c+d)^2=$$

$$= a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$$

$$(x^2+x+1)(x^2+x-1)=(x^2+x)^2-1=x^4+2x^3+x^2-1$$

$$(a+2b-3c)(a-2b+3c)=a^2-(2b-3c)^2=$$

$$=a^2-4b^2+12bc-9c^2$$

2) Idefele - alakítsd szorzattá

a) Egyszerűbbek

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$2x^2-2y^2=2(x-y)(x+y)$$

$$k^2-1=(k+1)(k-1)$$

$$a^2-4=(a-2)(a+2)$$

$$5a^2-45=5(a-3)(a+3)$$

$$75-3x^2=-3(x-5)(x+5)$$

$$16a^2-25=(4a+5)(4a-5)$$

$$25-36x^2=-(6x+5)(6x-5)$$

$$4a^2-9=(2a-3)(2a+3)$$

$$16a^2-9b^2=(4a-3b)(4a+3b)$$

$$8x^2-2y^4=-2(y^2-2x)(y^2+2x)$$

$$125a^4-20x^2=5(5a^2+2x)(5a^2-2x)$$

$$16b^4-9c^2=(4b^2+3c)(4b^2-3c)$$

$$a^2b^2-c^4d^4=-(c^2d^2+ab)(c^2d^2-ab)$$

$$\frac{1}{4}a^2-b^2=\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)$$

$$y^2-\frac{9}{16}x^2=-\left(\frac{3}{4}x-y\right)\left(\frac{3}{4}x+y\right)$$

$$\frac{1}{9}x^2-\frac{25}{49}y^2=\left(\frac{x}{3}+\frac{5y}{7}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{5y}{7}\right)$$

$$4x^2-\frac{1}{25}y^2=\left(2x-\frac{1}{5}y\right)\left(2x+\frac{1}{5}y\right)$$

$$\frac{225}{64}a^2-\frac{144}{361}b^2=\left(\frac{15}{8}a+\frac{12}{19}b\right)\left(\frac{15}{8}a-\frac{12}{19}b\right)$$

$$x^4-x^2=x^2(x+1)(x-1)$$

$$9c^2d^2-16=(3cd-4)(3cd+4)$$

$$\frac{1}{16}x^2-49=\left(\frac{x}{4}-7\right)\left(\frac{x}{4}+7\right)$$

$$64-0,04a^2b^2=-(0,2ab+8)(0,2ab-8)$$

$$0,81a^2-1,21x^2y^2=-(1,1xy-0,9a)(1,1xy+0,9a)$$

$$7x^3-7x=7x(x+1)(x-1)$$

$$50-8x^2=-2(2x+5)(2x-5)$$

$$\frac{7}{16}x^4-28x^2=7x^2\left(\frac{x}{4}+2\right)\left(\frac{x}{4}-2\right)$$

$$24x-54x^3=-6x(3x+2)(3x-2)$$

$$162a^2b-2b=2b(9a-1)(9a+1)$$

$$300a^4-243b^6=3(10a^2-9b^3)(10a^2+9b^3)$$

b) Számok négyzetének különbsége

$$68^2 - 32^2 = (68+32)(68-32) = 3600$$

$$185^2 - 15^2 = (185+15)(185-15) = 34000$$

$$6,6^2 - 3,4^2 = (6,6+3,4)(6,6-3,4) = 32$$

$$82,1^2 - 17,9^2 = (82,1+17,9)(82,1-17,9) = 6420$$

c) Összetettebb feladatok tag

$$(x+3y)^2 - z^2 = (x+3y+z)(x+3y-7)$$

$$(3a+4b)^2 - 9c^2 = (3a+4b+3c)(3a+4b-3c)$$

$$(a-3b)^2 - 16c^2 = (a-3b-4c)(a-3b+4c)$$

$$(x-y)^2 - x^2y^2 = (x-y-xy)(x-y+xy) = -(xy-x+y)(xy+x-y)$$

$$(5x+3)^2 - 25 = (5x+8)(5x-2)$$

$$(8x-5)^2 - 49x^2 = (x-5)(16x-5)$$

$$(x+3)^2 - 49 = (x+10)(x-4)$$

$$(5x-7)^2 - 25 = (5x-12)(5x-2)$$

$$(x+y)^2 - 9x^2y^2 = -(3xy+x+y)(3xy-x-y)$$

$$(3x-5)^2 - 16 = (3x-9)(3x-1) = 3(x-3)(3x-1)$$

$$(a+2b)^2 - (a-3b)^2 = 5b(2a-b)$$

$$4 \text{ tényező! } (x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2-2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2) = (x-y)^2(x+y)^2$$

$$(x+1)^2 - \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x+1\right) =$$

$$3 \text{ tényező! } x^4 - (2x-1)^2 = (x-1)^2(x^2+2x-1)$$

$$4 \text{ tényező! } (x^2+4)^2 - 16x^2 = (x+2)^2(x-2)^2$$

$$3 \text{ tényező! } 3x^4 - 3 = 3(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$3 \text{ tényező! } (a+b)^4 - 16a^2b^2 = (a-b)^2(a^2+6ab+b^2)$$

$$3 \text{ tényező! } (x^2-2x)^2 - 1 = (x-1)^2(x^2-2x-1)$$

3) Egyelőre intuíción kívánó alak $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$

Ha kell, először ki kell emelni mindent, hogy a főegyüttható pozitív legyen, és az együtthatók relatív prímek!

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

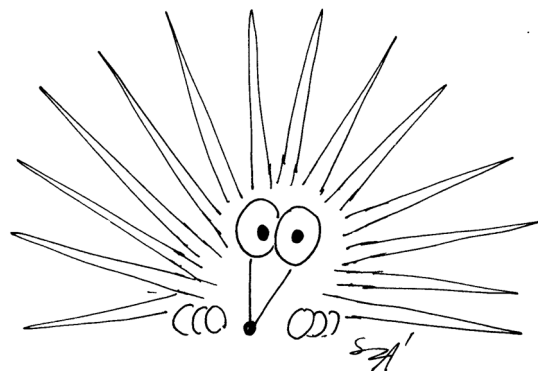
$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

$$x^2+7x+10 = (x+5)(x+2)$$

$$x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$$

$$x^2+7x-30 = (x+10)(x-3)$$

$$x^2-7x-30 = (x-10)(x+3)$$



$$a^2 - 2a - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$-x^2 - 6x - 8 = -(x+2)(x+4)$$

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x-1)(x+3)$$

$$18x - 3x^2 - 24 = -3(x-2)(x-4)$$

$$5x^2 - 5x - 60 = 5(x+3)(x-4)$$

$$4x - 2x^2 + 6 = -2(x+1)(x-3)$$

IV) Egyenletek

1) Egyszerűbb egyenletek

$$5(2-3x) - 3(x-1) = 3 - (x+7)$$

$$-18x + 13 = -x - 4$$

$$17 = 17x$$

$$x = 1$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

$$28 + 2(3x+2) - 4(x-3) = 5(x-2) - 3(3-2x) \quad (x=7)$$

$$2x + 44 = 11x - 19$$

$$63 = 9x$$

$$x = 7$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=7}$$

$$2(3-2(x+4)) = 3(4-x) \quad (x=-22)$$

$$-4x - 10 = 12 - 3x$$

$$-22 = x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-22}$$

$$-3(x-2) = 2(x - 4(x-2) + x) \quad (x=10)$$

$$-3x + 6 = -4x + 16$$

$$x = 10$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=10}$$

Alakítsd szorzattá

$$3 \text{ tényező! } 1 - (x^2 + 2x)^2 = -(x+1)^2(x^2 + 2x - 1)$$

$$(2x+1)^2 - 9 = (2x+4)(2x-2) = 4(x+2)(x-1)$$

$$(3x-2)^2 - 25x^2 = (-2x-2)(8x-2) = -4(x+1)(4x-1)$$

$$36x - 12x^2 - 27 = -3(2x-3)^2$$

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$$

$$3(3x+2)^2 - 48 = 9(x+2)(3x-2)$$

$$(5x+3)^2 - 9x^2 = (8x+3)(2x+3)$$

$$4x^2 - (3x-2)^2 = -(5x-2)(x-2)$$

Oldd meg

$$4(3x+1) - (2x-5) - 12 = 2(3x+1) + (2x-5)$$

$$10x-3 = 8x-3$$

$$10x = 8x$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

2) Törtés egyenletek – KUNKORI!

a) ad a)

$$\frac{5}{2}a - \frac{3a}{4} + \frac{7}{8} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} / \cdot 8$$

$$20a - 6a + 7 = 12a - 4$$

$$14a + 7 = 12a - 4$$

$$2a = -11$$

$$a = -11/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a=-11/2}$$

$$\frac{3x-6}{2} = 21$$

$$\frac{(3x-6)}{2} = 21 / \cdot 2$$

$$(3x-6) = 42$$

$$3x = 48$$

$$x = 16$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=16}$$

$$\frac{4x-12}{3} = 0$$

$$\frac{(4x-12)}{3} = 0 / \cdot 3$$

$$4x-12=0$$

$$x=3$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=3}$$

$$1 - \frac{7-2x}{5} = 2$$

$$1 - \frac{(7-2x)}{5} = 2 / \cdot 5$$

$$5 - (7-2x) = 10$$

$$5 - 7 + 2x = 10$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=6}$$

b) ad b)

$$\frac{2x-9}{5} - 2x = -3$$

$$\left(\frac{(2x-9)}{5} - 2x \right) = (-3) / \cdot 5$$

$$(2x-9) - 10x = -15$$

$$-8x-9 = -15$$

$$-8x = -6$$

$$x = 3/4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=3/4}$$

$$\frac{3x-2}{2} = -1 + 3x \quad (x=0)$$

$$\frac{(3x-2)}{2} = (-1+3x) / \cdot 2$$

$$3x-2 = -2+6x$$

$$3x=6x$$

$$0=3x$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$-\frac{x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = 2$$

$$-\frac{(x-1)}{5} + \frac{(3x+1)}{2} = 2 \quad / \cdot 10$$

$$-2(x-1) + 5(3x+1) = 20$$

$$13x+7=20$$

$$x=1$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

c) ad c)

$$-\frac{3x-2}{3} + \frac{2x+3}{5} = \frac{x}{5} + 1$$

$$-\frac{(3x-2)}{3} + \frac{(2x+3)}{5} = \frac{x}{5} + 1 \quad / \cdot 15$$

$$-5(3x-2) + 3(2x+3) = 3x + 15$$

$$-9x+19 = 3x+15$$

$$4 = 12x$$

$$x = 1/3$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1/4}$$

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} = x-1$$

$$\frac{(3x-1)}{2} - \frac{(2x+1)}{3} = x-1 \quad / \cdot 6$$

$$3(3x-1) - 2(2x+1) = 6x-6$$

$$5x-5=6x-6$$

$$1=x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

$$\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{4} = -\frac{23}{12} \quad (x=0)$$

$$\frac{(2x-5)}{3} - \frac{(x+1)}{4} = -\frac{23}{12} \quad / \cdot 12$$

$$4(2x-5) - 3(x+1) = -23$$

$$5x-23 = -23$$

$$5x=0$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$\frac{8x-3}{5} - \frac{2x+4}{2} = x+1$$

$$\frac{(8x-3)}{5} - \frac{(2x+4)}{2} = x+1 \quad / \cdot 10$$

(Később majd egyszerűsítünk előbb!)

$$2(8x-3) - 5(2x+4) = 10x+10$$

$$6x-26 = 10x + 10$$

$$-36 = 4x$$

$$x = -9$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-9}$$

$$3x-2 + \frac{x}{3} = 2(x-1)$$

$$3x-2 + \frac{x}{3} = 2(x-1) \quad / \cdot 3$$

$$9x-6+x=6x-6$$

$$10x = 6x$$

$$4x=0$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT!

$$-\frac{2x-1}{4} - \frac{6x+4}{8} = \frac{-15x-1}{12}$$

$$-\frac{(2x-1)}{4} - \frac{(6x+4)}{8} = \frac{(-15x-1)}{12} \quad / \cdot 24$$

(Később majd egyszerűsítünk előbb!)

$$-6(2x-1) - 3(6x+4) = 2(-15x-1)$$

$$-30x - 6 = -30 - 2$$

$$-6 = -2$$

Ellentmondó egyenlet, \nexists megoldás

$$\frac{5x-2}{6} - \frac{4x+1}{12} = \frac{3x-7}{18} \quad (x=1/12)$$

$$\frac{(5x-2)}{6} - \frac{(4x+1)}{12} = \frac{(3x-7)}{18} \quad / \cdot 36$$

$$6(5x-2) - 3(4x+1) = 2(3x-7)$$

$$18x - 15 = 6x - 14$$

$$12x = 1$$

$$x = 1/12$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1/12}$$

d) ad d)

$$\begin{aligned}\frac{3(x+4)}{5} &= \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x-1}{5} \\ \frac{3(x+4)}{5} &= \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{(x-1)}{5} \quad / \cdot 10 \\ 6(x+4) &= 5x - 4(x-1) \\ 6x + 24 &= x + 4 \\ 5x &= -20 \\ x &= -4 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{\underline{x = -4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2(x-3)}{5} - 3 \cdot \frac{2-x}{2} &= -4 - \frac{2-5x}{5} \\ \frac{2(x-3)}{5} - 3 \cdot \frac{(2-x)}{2} &= -4 + \frac{(5x-2)}{5} \quad / \cdot 10 \\ 4(x-3) - 15(2-x) &= -40 + 2(5x-2) \\ 4x - 12 - 30 + 15x &= -40 + 10x - 4 \\ 19x - 42 &= 10x - 44 \\ 9x &= -2 \\ x &= -2/9 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{\underline{x = -2/9}}\end{aligned}$$

3) Egyenlet = állítás

$$\begin{aligned}\frac{-6x+10}{2} + \frac{5-2x}{3} &= \frac{-9x-5}{3} - 2 \cdot \frac{(4x-1)}{12} \\ \frac{(-6x+10)}{2} + \frac{(5-2x)}{3} &= \frac{(-9x-5)}{3} - 2 \cdot \frac{(4x-1)}{12} \quad / \cdot 12 \\ 6(-6x+10) + 4(5-2x) &= 4(-9x-5) - 2(4x-1) \\ -44x + 80 &= -44x - 18 \\ 80 &= -18\end{aligned}$$

Ellentmondó egyenlet, \nexists megoldás

$$\begin{aligned}-6 - \frac{6x-2}{3} - 3 \cdot \frac{3-x}{2} &= -x - \frac{16+2x}{2} + \frac{3x-5}{2} + \frac{4}{6} \\ -6 - \frac{(6x-2)}{3} - 3 \cdot \frac{(3-x)}{2} &= -x - \frac{(16+2x)}{2} + \frac{(3x-5)}{2} + \frac{4}{6} \quad / \cdot 6 \\ -36 - 2(6x-2) - 9(3-x) &= -6x - 3(2x+16) + 3(3x-5) + 4 \\ -3x - 59 &= -3x - 59 \\ 0 &= 0 \\ \text{(Azonosság. True for all } x\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3(x-3)}{4} - 2 \cdot \frac{3-x}{5} &= \frac{9-3x}{5} \\ \frac{3(x-3)}{4} - 2 \cdot \frac{(3-x)}{5} &= \frac{(9-3x)}{5} \quad / \cdot 20 \\ 15(x-3) - 8(3-x) &= 4(9-3x) \\ 23x - 69 &= -12x + 36 \\ 35x &= 105 \\ x &= 3 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{\underline{x = 3}}\end{aligned}$$



4) Egyenletmegoldás szorzattá alakítással

a) Mondóka

„Másod v. magasabb fokú egyenleteket úgy oldunk meg, hogy egy oldalra rendezzük (nullára redukálunk), majd szorzattá alakítjuk.”

„Egy szorzat akkor és csak akkor (pontosan akkor) 0, ha valamelyik tényezője 0.”

b) Minta:

$$2x(2x-3)(x+2)=0$$

I.

$$2x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=3/2 \quad x_3=-2}$$

II.

$$2x-3=0$$

$$2x=3$$

$$x=3/2$$

III.

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

5) Oldd meg

a) Bevezetés

$$2x(3x-4)=0$$

I.

$$2x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=4/3}$$

II.

$$3x-4=0$$

$$x=4/3$$

$$(8-3x)(x+1)=0$$

I.

$$8-3x=0$$

$$x=8/3$$

Vh✓

$$\underline{x_1=8/3; x_2=-1}$$

II.

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$(3x-2)(-x+4)(2x-6)=0$$

I.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_1=2/3; x_2=4 \quad x_3=3}$$

II.

$$-x+4=0$$

$$x=4$$

III.

$$2x-6=0$$

$$x=3$$

$$-4x(2x+5)(3x-1)=0$$

I.

$$-4x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=-5/2 \quad x_3=1/3}$$

II.

$$2x+5=0$$

$$x=-5/2$$

III.

$$3x-1=0$$

$$x=1/3$$

$$(3x-2)(3x-2)=0$$

I.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=2/3}$$

II.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

$$(3x-2)^2=0$$

I-II.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=2/3}$$

b) Már nincs rendezve, szorzattá alakítva

Mintaegyenlet

	$3x^2=5x$	/egy oldalra rendezünk
	$3x^2-5x=0$	/ szorzattá alakítunk
	$x(3x-5)=0$	/ „Egy szorzat akkor és csak akkor...”
I.		II.
$x=0$		$3x-5=0$
		$3x=5$
$x=0$		$x=5/3$
VH✓		
$x_1=0; x_2=5/3$		

Oldd meg az egyenleteket (Egy oldalra rendezünk, szorzattá alakítunk, stb.)

$2x^3 = -3x^2$ $2x^3 + 3x^2 = 0$ $x^2(2x+3) = 0$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">I.</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">II.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$x^2=0$</td> <td style="text-align: center;">$2x+3=0$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$x_{1,2}=0$</td> <td style="text-align: center;">$x_3=-3/2$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">VH✓</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"><u><u>$x_{1,2}=0; x_3=-3/2$</u></u></td> </tr> </table>	I.	II.	$x^2=0$	$2x+3=0$	$x_{1,2}=0$	$x_3=-3/2$	VH✓		<u><u>$x_{1,2}=0; x_3=-3/2$</u></u>		$x^2 = 2-x$ $x^2+x-2=0$ $(x+2)(x-1)=0$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">I.</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">II.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$x+2=0$</td> <td style="text-align: center;">$x-1=0$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$x_1=-2$</td> <td style="text-align: center;">$x_2=1$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">VH✓</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;"><u><u>$x_1=-2; x_2=1$</u></u></td> </tr> </table>	I.	II.	$x+2=0$	$x-1=0$	$x_1=-2$	$x_2=1$	VH✓		<u><u>$x_1=-2; x_2=1$</u></u>	
I.	II.																				
$x^2=0$	$2x+3=0$																				
$x_{1,2}=0$	$x_3=-3/2$																				
VH✓																					
<u><u>$x_{1,2}=0; x_3=-3/2$</u></u>																					
I.	II.																				
$x+2=0$	$x-1=0$																				
$x_1=-2$	$x_2=1$																				
VH✓																					
<u><u>$x_1=-2; x_2=1$</u></u>																					

Minta

	$-12x^3 = -27x$	/egy oldalra rendezünk
	$-12x^3 + 27x = 0$	/mindent kiemelünk
		és a főegyüttható pozitív legyen!
	$-3x(4x^2-9) = 0$	/ szorzattá alakítunk
	$-3x(2x-3)(2x+3) = 0$	/ „Egy szorzat akkor és...”
I.	II.	III.
$-3x = 0$	$2x-3 = 0$	$2x+3 = 0$
$x = 0$	$x = 3/2$	$x = -3/2$
	VH✓	
	<u><u>$x_1=0; x_2=3/2; x_3=-3/2$</u></u>	

Oldd meg az egyenleteket

$x^2 = 4$ $x^2-4=0$ $(x+2)(x-2)=0$ $x_1=2; x_2=-2$ VH✓ <u><u>$x_1=2; x_2=-2$</u></u>	$-3x^2 = -75$ $x^2 = 25$ $x^2-25=0$ $(x+5)(x-5)=0$ $x_1=-5; x_2=5$ VH✓ <u><u>$x_1=-5; x_2=5$</u></u>
---	--

$18x^3 = 32x$			$5x^2 = 10x - 5$
$18x^3 - 32x = 0$			$5x^2 - 10x + 5 = 0$
$2x(9x^2 - 16) = 0$			$5(x^2 - 2x + 1) = 0$
$2x(3x - 4)(3x + 4) = 0$			$5(x - 1)^2 = 0$
I.	II.	III	I-II.
$2x = 0$	$3x - 4 = 0$	$3x + 4 = 0$	$x - 1 = 0$
$x = 0$	$x = 4/3$	$x = -4/3$	$x = 1$
Vh✓			Vh✓
<u>$x_1 = 0; x_2 = 4/3; x_3 = -4/3$</u>			<u>$x_{1,2} = 1$</u>

Minta

	$(2x - 3)^2 = 16$	/egy oldalra rendezünk
	$(2x - 3)^2 - 16 = 0$	/felfedezzük az $a^2 - b^2$ alakot
	$(2x - 3)^2 - 4^2 = 0$	/szorzattá alakítunk
	$(2x - 3 + 4)(2x - 3 - 4) = 0$	
	$(2x + 1)(2x - 7) = 0$	/„Egy szorzat akkor és...
I.		II.
$2x + 1 = 0$		$2x - 7 = 0$
$x = -1/2$		$x = 7/2$
VH✓		
$x_1 = -1/2; x_2 = 7/2$		

c) Gyakorlás

$(x + 2)^2 = 16$	$2(x + 5)^2 = 8$
$(x + 2)^2 - 16 = 0$	$(x + 5)^2 - 4 = 0$
$(x + 2 + 4)(x + 2 - 4) = 0$	$(x + 5 + 2)(x + 5 - 2) = 0$
$(x + 6)(x - 2) = 0$	$(x + 7)(x + 3) = 0$
$x_1 = 2; x_2 = -6$	$x_1 = -7; x_2 = -3$
VH✓ <u>$x_1 = 2; x_2 = -6$</u>	VH✓ <u>$x_1 = -7; x_2 = -3$</u>

$5(x + 3)^2 = 45$	$-2x^2 = 32 - 16x$ ($x_{1,2} = 4$)
$(x + 3)^2 - 9 = 0$	$0 = 2x^2 - 16x + 32$
$x(x + 6) = 0$	$0 = 2(x - 4)^2$
I.	II.
$x = 0$	$x - 4 = 0$
$x = 0$	$x = 4$
Vh✓	Vh✓
<u>$x_1 = 0; x_2 = -6$</u>	<u>$x_{1,2} = 4$</u>

$$8x^4=3x^3$$

$$8x^4-3x^3=0$$

$$x^3(8x-3)=0$$

I-II-III.

$$x^3=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{\underline{x_{1,2,3}=0; x_4=3/8}}$$

IV.

$$8x-3=0$$

$$x=3/8$$

$$4x^3=24x^2-36x$$

$$4x^3-24x^2+36x=0$$

$$4x(x^2-6x+9)=0$$

$$4x(x-3)^2=0$$

I.

$$4x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{\underline{x_1=0; x_{2,3}=3}}$$

II.

$$(x-3)=0$$

$$x=3$$

$$(x-3)(x+5)=x^2 \quad (x=15/2)$$

$$x^2+2x-15=x^2$$

$$2x=15$$

$$x=15/2$$

Vh✓

$$\underline{\underline{x=15/2}}$$

$$3x^2+12=12x$$

$$3(x^2-4x+4)=0$$

$$3(x-2)^2=0$$

I-II.

$$x=2$$

Vh✓

$$\underline{\underline{x_{1,2}=2}}$$

$$3x^2=30x-75$$

$$3(x^2-10x+25)=0$$

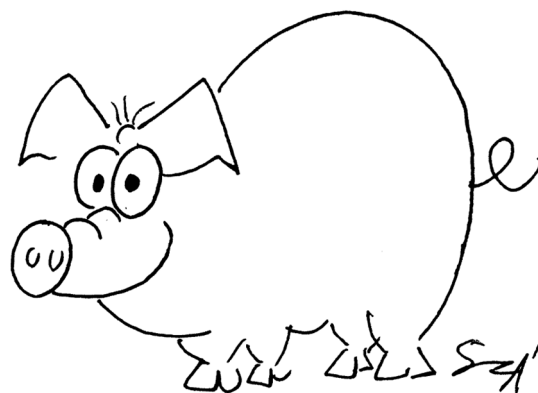
$$3(x-5)^2=0$$

I-II.

$$x=5$$

Vh✓

$$\underline{\underline{x_{1,2}=5}}$$



V) Algebrai törtek

1) Definíció

Algebrai törteknek hívjuk azokat a törteket, amelyek számlálója is és nevezője is egy polinom.

2) Kezelésük

$$\frac{ax^2}{a^2x} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{-5x^2y^3}{125x^3y^2} = -\frac{y}{25x}$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{168x^2y^3z^4}{24x^2y^2z^4} = 7y$$

$$\frac{121a^2}{33ax} = \frac{11a}{3x}$$

$$\frac{169a^2y^3}{13ay} = 13ay^2$$

$$\text{Nem köt.: } \frac{160x^3yz^6}{64x^2y^2z^2} = \frac{5xz^4}{2y}$$

Egyszerűsíts, de előtte a számláló és a nevező is egy tag – több tényező legyen!

$$\frac{14a^5b^3 - 42a^3b^2 + 28a^3b^3}{98a^3b^3} = \frac{a^2b + 2b - 3}{7b}$$

$$\frac{-12x^3y^2 + 8x^4y^3 - 20x^4y^2}{16x^4y^2} = \frac{2xy - 5x - 3}{4x}$$

Írd le az algebrai törtek egyszerűsítésének mondókáját:

Mondóka: (Algebrai) törtet csak akkor egyszerűsíthetünk, ha már a számláló is és a nevező is egy tagú. Csak ezután egyszerűsíthetünk a közös tényezővel. Vagyis a számlálót is és a nevezőt is szorzattá kell alakítani.

$$\frac{(a-b)^2}{a-b} = a-b$$

$$\frac{(2x+y)^2}{2x+y} = 2x+y$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$$

$$\frac{x^2 - 1}{x+1} = x-1$$

$$\frac{2x^2 - 6x}{5x - 15} = \frac{2x}{5}$$

Nem köt.: $\frac{15x - 12x^2}{8x^3 - 10x^2} = -\frac{3}{2x}$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{x-3}{x+3}$$

$$\frac{9 + 4x^2 - 12x}{6 - 4x} = -\frac{2x-3}{2}$$

Ne köt.: $\frac{-81x^2 + 4}{18x + 4} = -\frac{9x-2}{2}$

$$\frac{121 - x^2}{5x + 55} = -\frac{x-11}{5}$$

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{6 + 12x} = \frac{2x+1}{6}$$

$$\frac{xy + 3y + x + 3}{2xy + x + 6y + 3} = \frac{y+1}{2y+1}$$

! $\frac{a^2 - b}{a} = \text{NEM LEHET!}$

3) Add meg a következő kifejezések ÉT-át, majd egyszerűsíts – ahol lehet

$$\frac{18x-3-27x^2}{5-45x^2} = \frac{3(3x-1)}{5(3x+1)}$$

$$\text{ÉT: } 45x^2-5 \neq 0$$

$$(3x-1)(3x+1) \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 1/3 \text{ és } x \neq -1/3 \text{ (vagyis: } x \neq \pm 1/3) \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1/3\}$$

$$\frac{60x-20x^2-45}{12x^2-27} = -\frac{5(2x-3)}{3(2x+3)}$$

$$\text{ÉT: } 12x^2-27 \neq 0$$

$$3(2x-3)(2x+3) \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 3/2 \text{ és } x \neq -3/2 \text{ (vagyis: } x \neq \pm 3/2) \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 3/2\}$$

$$\frac{x^2-14x+49}{98-2x^2} = -\frac{x-7}{2(x+7)}$$

$$\text{ÉT: } 98-2x^2 \neq 0$$

$$-2(x-7)(x+7) \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 7 \text{ és } x \neq -7 \text{ (vagyis: } x \neq \pm 7) \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 7\}$$

$$\frac{x^2+x}{x-1} = \text{NEM LEHET}$$

$$\text{ÉT: } x-1 \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 1$$

$$\text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2-1} = x^2+1$$

$$\text{ÉT: } x^2-1 \neq 0$$

$$(x+1)(x-1) \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 1 \text{ és } x \neq -1 \text{ (vagyis: } x \neq \pm 1) \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$\frac{5-5x^2}{-4x-4} = \frac{5(x-1)}{4}$$

$$\text{ÉT: } -4x-4 \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq -1 \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x-2} = x+1$$

$$\text{ÉT: } x-2 \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 2 \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{2x^2-5x-3}{-4x^2-2x} = -\frac{x-3}{2x}$$

$$\text{ÉT: } -4x^2-2x \neq 0$$

$$-2x(2x+1) \neq 0$$

$$\text{ÉT: } x \neq 0 \text{ és } x \neq -1/2 \quad \text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{0; -1/2\}$$

4) Egyszerűsíts!

$$\frac{a^2 - b^2}{2b - 2a} = -\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{5x^2 + 5x^3}{3 - 3x^2} = -\frac{5x^2}{3(x-1)}$$

$$\frac{5a^2 - 5b^2}{2b^2 - 4ab + 2a^2} = \frac{5(a+b)}{2(a-b)}$$

$$\frac{x^4 - 1}{x+1} = (x^2 + 1)(x-1)$$

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{25 - x^2} = -\frac{x-5}{x+5}$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{-2x^2 - 8x - 8} = -\frac{x-3}{2(x+2)}$$

$$\frac{3x - 2x^2 + 9}{18 - 2x^2} = \frac{2x+3}{2(x+3)}$$



Oldd meg a következő egyenletet. **Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!**

$$\frac{4(2-3x)}{10} + \frac{6x-4}{4} = -\frac{4x+4}{20} + \frac{45x-9}{15}$$

$$\frac{2(2-3x)}{5} + \frac{2(3x-2)}{4} = -\frac{4(x+1)}{20} + \frac{9(5x-1)}{15}$$

$$\frac{2(2-3x)}{5} + \frac{(3x-2)}{2} = -\frac{(x+1)}{5} + \frac{3(5x-1)}{5}$$

$$4(2-3x)+5(3x-2)=-2(x+1)+6(5x-1)$$

$$3x-2=28x-8$$

$$6=25x$$

$$x=6/25$$

$$\text{Vh } \checkmark \underline{x=6/25}$$

5) Add meg az ÉT-t, majd egyszerűsíts

$$\frac{x-3}{(x-3)(5x+2)} = \frac{(x-3)}{(x-3)(5x+2)} =$$

$$= \frac{1}{(5x+2)}$$

$$\text{ÉT: } x \neq 3; -2/5$$

$$\text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{3; -2/5\}$$

$$\frac{20-5b^2}{3b^2-12b+12} = \frac{-5(b+2)(\cancel{b-2})}{3(b-2)^2} =$$

$$= -\frac{5(b+2)}{3(b-2)}$$

$$\text{ÉT: } b \neq 2$$

$$\text{ÉT: } b \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{x-2}{x^2+3x} = \frac{(x-2)}{x(x+3)}$$

Nem lehet egyszerűsíteni

$$\text{ÉT: } x \neq 0; -3$$

$$\text{ÉT: } b \in \mathbf{R} \setminus \{0; -3\}$$

$$\frac{5a}{2a^2-3a} = \frac{5a}{a(2a-3)} =$$

$$\frac{5}{(2a-3)} =$$

$$\text{ÉT: } a \neq 0; 3/2$$

$$\text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 3/2\}$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{(\cancel{x-2})(x-1)}{(\cancel{x-2})} = x-1$$

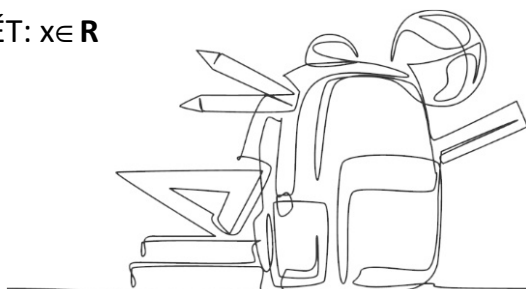
$$\text{ÉT: } x \neq 2$$

$$\text{ÉT: } x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(\cancel{x^2+1})(x+1)(x-1)}{(x^2+1)} = x^2-1$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1, \text{ vagyis a nevező sose } 0$$

$$\text{ÉT: } x \in \mathbf{R}$$



Oldd meg a következő egyenletet. **Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!**

$$\frac{8x-8}{14} - \frac{5x+10}{15} = \frac{16x-4}{6} - \frac{6x+4}{14}$$

$$\frac{8(x-1)}{14} - \frac{5(x+2)}{15} = \frac{4(4x-1)}{6} - \frac{2(3x+2)}{14}$$

$$\frac{4(x-1)}{7} - \frac{(x+2)}{3} = \frac{2(4x-1)}{3} - \frac{(3x+2)}{7} \quad / \cdot 21$$

$$12(x-1) - 7(x+2) = 14(4x-1) - 3(3x+2)$$

$$5x - 26 = 47x - 20$$

$$-6 = 42x$$

$$x = -1/7$$

Vh ✓ $x = -1/7$

6) Törtek összevonása – szorzattá alakítása

Ha nem megy, nézd meg az órai füzetben!

$$\frac{2}{5p} - \frac{4}{3} = \frac{-20p+6}{15p} \qquad 5 + \frac{3}{p} = \frac{5p+3}{p}$$

$$\frac{5}{2p} - \frac{2}{p-3} = \frac{p-15}{2p(p-3)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2} = \frac{3p+2}{3p^2}$$

$$x - \frac{2}{x-3} = \frac{x^2-3x-2}{x-3}$$

$$4 - \frac{2p+1}{p} = \frac{2p-1}{p}$$

$$\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2-5p} = \frac{4}{p} - \frac{3}{p(p-5)} = \frac{4p-23}{p(p-5)}$$

$$\frac{7p-3}{4-3p} - 2 = \frac{13p-11}{4-3p} = -\frac{13p-11}{3p-4}$$

$$* \frac{3x-5}{6x^2-3x} - \frac{5}{4x^2-1} = \frac{3x-5}{3x(2x-1)} - \frac{5}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{6x^2-22x-5}{3x(2x-1)(2x+1)}$$

$$\frac{3-2x^2}{4x-3} - x - 4 = \frac{-6x^2 - 13x + 15}{4x-3}$$

Oldd meg a következő egyenleteket. Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!

$$\begin{aligned} & \frac{12x-6}{30} - \frac{6(x+2)}{10} + \frac{12-3x}{9} = \frac{35x-10}{25} - \frac{16x+20}{12} \\ & \frac{6(2x-1)}{30} - \frac{6(x+2)}{10} + \frac{3(4-x)}{9} = \frac{5(7x-2)}{25} - \frac{4(4x+5)}{12} \\ & \frac{(2x-1)}{5} - \frac{3(x+2)}{5} + \frac{(4-x)}{3} = \frac{(7x-2)}{5} - \frac{(4x+5)}{3} \quad / \cdot 15 \\ & -3(2x-1) - 9(x+2) + 5(4-x) = 3(7x-2) - 5(4x+5) \\ & \quad \quad \quad -20x + 5 = x - 31 \\ & \quad \quad \quad 36 = 21x \\ & \quad \quad \quad x = 12/7 \\ & \quad \quad \quad \text{Vh} \checkmark \underline{x=12/7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-6x+6}{15} - \frac{9x+18}{6} = -5 + x - \frac{12x-12}{10} \\ & \frac{-6(x-1)}{15} - \frac{9(x+2)}{6} = -5 + x - \frac{12(x-1)}{10} \\ & \frac{2(x-1)}{5} - \frac{3(x+2)}{2} = -5 + x - \frac{6(x-1)}{5} \quad / \cdot 10 \\ & 4(x-1) - 15(x+2) = -50 + 10x - 12(x-1) \\ & \quad \quad \quad -11x - 34 = -2x - 38 \\ & \quad \quad \quad 4 = 9x \\ & \quad \quad \quad x = 4/9 \\ & \quad \quad \quad \text{Vh} \checkmark \underline{x=4/9} \end{aligned}$$

VI) Szöveges egyenletek

Három menüt lehet választani. Aladár Béla és Cecil együtt 9360 Ft-ot fizetett. Cecil Aladárnál 200 Ft-tal többet fizetett. Béla menüjének csak a felét fizette Aladár. Mennyibe kerül a három menü külön-külön? (A=2290, C=2490, B=4580)

Mo.: Aladár: x Ekkor Cecil x+200 és Béla 2x

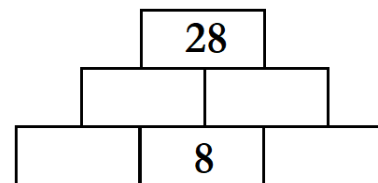
$$x + x + 200 + 2x = 9360$$

$$x = 2290 \quad \text{Vh} \checkmark$$

$$\text{Vh: } 2290 + 200 = 2490 \checkmark \quad 2 \cdot 2290 = 2580 \checkmark \quad 2290 + 2490 + 2580 = 9360 \checkmark$$

Aladár: 2290 C: 2490 B: 4580

Egy doboz tömege annyi, mint az alatta található két doboz együtt. A bal alsó két egységgel könnyebb, mint a jobb alsó. Mekkora tömegűek a dobozok?



Mo.: Alulra jobbra x -et tesztek, ezért baloldalon $x-2$ áll.

Középen balra: $x-2+8$ és jobbra $x+8$

Így az egyenlet: $(x-2+8) + (x+8)=28$ $2x=14$ $x=7$

Így a dobozok: (5 ; 8 ; 7) felette: (13 ; 15) Legfelül: 28 Vh✓ $x=7$

Egy szám ötödénél 4-gyel nagyobb a negyede. Melyik ez a szám? ($x=80$)

$$\text{Mo.: } \frac{x}{5} + 4 = \frac{x}{4} \quad / \cdot 20$$

$$4x+80=5x$$

$$x=80 \text{ Vh✓ } \underline{x=80}$$

Egy útnak az első órában megtettem a felét, a második órában a negyedénél 2-vel többet, a harmadik órában a maradék 13 kilométert. Milyen hosszú volt az út? ($x=60$)

$$\text{Mo.: } x/2 + (x/4 + 2) + 13 = x / \cdot 4$$

$$2x+x+60=4x$$

$$x=60 \text{ Vh✓ } \underline{x=60}$$

Hány km a kirándulás, ha már a harmadánál már 10 km-rel többet tettünk ugyan meg, de még a felénél 2 km-rel több van hátra. ($x=72$)

Mo.: Az út hossza legyen x .

$$(x/3+10) + (x/2+2) = x / \cdot 6$$

$$2x+60+3x+12=6x$$

$$x=72 \text{ Vh✓ } \underline{x=72}$$

Egy üveg lekvár 150 Ft-tal kevesebbe kerül, mint egy üveg nutella. 3 lekvár és 2 nutella 10550 Ft-ba kerül. Mibe kerülnek külön-külön?

Mo.: Nutella legyen x , ezért a lekvár $x-150$

$$2x+3(x-150)=10550$$

$$5x-450=10550$$

$$x=2200$$

Vh: ✂✓ Nutella=2200 Ft, lekvár: 2050 Ft.

Béla 20 € -val kevesebbet keresett, mint Aladár, ugyanakkor ketten együtt is csak a felét keresték annak, amit Cecil keresett. Cecil keresete 320€-val több volt, mint Aladáré. Ki mennyit keresett? ($a=120$, $b=100$, $c=440$)

Mo: Aladár: x Ekkor Béla $x-20$ Cecil pedig: $x+320$

Így az egyenlet: $x+x-20 = (x+320)/2$ Vh✓

Aladár: 120 Béla: 100 Cecil:440

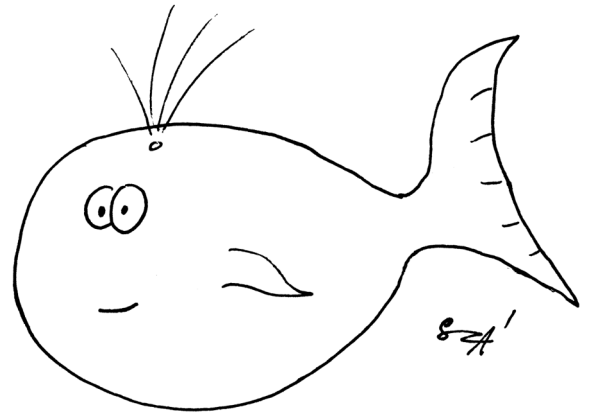
Egy horgásztól megkérdezték, hogy hány halat fogott. Ő így felelt „Azt reméltem, hogy húszat fogok, de ha háromszor annyit fogtam volna, mint amennyit fogtam, akkor is 2-vel kevesebbet fogtam volna, mint amennyit reméltem.” Hány halat fogott? ($x=6$)

Mo.: x db-ot fogot.

$$3x+2=20$$

$$x=6$$

Vh✓ $x=6$



Az osztályból néhányan almás lepényt eszegetnek. Koppány megette a lepények felét és rosszul lett. Szabolcs a maradék felénél 3-mal kevesebbet ugyan, de ő is rosszul lett. Botond a maradék kétharmadát pusztította el. Így a lányoknak 6 lepény maradt. Hány lepény volt eredetileg? ($x=60$)

Mo.: Koppány után: $x/2$

Szabolcs után: $\frac{x}{4} + 4$

Botond után: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{4} + 3\right) = 6$

$$\left(\frac{x}{4} + 3\right) = 18$$

$$x=60$$

Vh✓ $x=60$

Adott két szám. Ha az egyik végéről elhagyjuk a 0-t, akkor a másikat kapjuk. Az összegük 319. Melyik az eredeti két szám? (290 és 29)

Mo.: az egyik végén 0 áll, ez a másinak a $10x$ -ese:

$$x+10x=319$$

$$x=29.$$

VH.: $29+290=319$ ✓

Az egyik 29; a másik: 290.

Ha egy szám végéről elhagyom az 5-ös számjegyet és az így kapott számot kivonom az eredetiből, akkor 176-ot kapok. Mi az eredeti szám? ($x=195$)

Mo.: $x - \frac{x-5}{10} = 176$

$$x=195$$

Vh: $195 - 19 = 176$

$x=195$

A farmon zsiráfok és baglyok élnek. 66 fejük van összesen és 194 lábuk. Melyikből mennyi van? (zs=31, b=35)

Mo.:

Zsiráfok: x db. Ezért bagoly $66-x$ db.

Lábuk: $4x+2(66-x)=194$ $x=31$ Vh✓

Így 31 zsiráf és 35 bagoly van.

Egy háromjegyű szám jegyeinek szorzata 0. Az első jegy 2-vel kisebb, mint a második. Ha az első jegyet hátrateszem, akkor a kapott szintén háromjegyű szám 153-mal nagyobb, mint az eredeti. Mi az eredeti szám? (350)

Mo.:

A szorzat 0, ezért az egyik jegy 0.

Mivel háromjegyű, ezért az első jegy nem lehet 0.

(Hiszen a 007 nem háromjegyű, mert akkor ötjegyű is: 00007 :-)

A második sem lehet 0, mert akkor az első jegy negatív lenne...

Vagyis legyen a második helyen álló x , és a számom így néz ki: $\overline{x-2;x;0}$

Ez helyiértékesen van írva: $x-2$ áll a 100-asok helyén, x a 10-esek helyén.

A shiftelt szám: $\overline{x;0;x-2}$;

Vagyis az egyenlet: $100(x-2)+10x+0=100x+0\cdot 10+x-2 - 153$

$110x-200=101x-155$

$9x=45$ $x=5$

Vh: $350 = 503-153$ ✓. A szám: 350

Ha egy szám utolsó jegyét elhagynám, akkor az utolsó jegy ötszörösét kapnám. Ugyanakkor ez a szám az utolsó jegy negyvenszeresénél 99-cel nagyobb. Mi ez a szám?

Mo.:

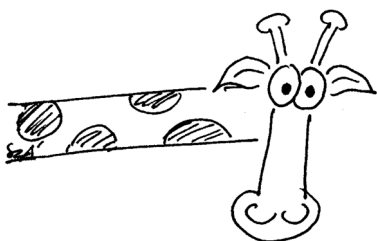
Az utolsó jegy legyen x

Ekkor a szám értéke: $10\cdot 5x+x$

Egyenlet: $51x=40x+99$

$x=9$, $5\cdot 9=45$ ezért a szám: 459

Vh: $45=5\cdot 9$ és $40\cdot 9+99=459$ ✓ A szám: 459



Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. © Rajzok: Szakál Ádám Sch.P. © és a net...