

Matematika
Algebra HF Munkafüzet
v3.3 – Megoldással

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu

2024. szeptember

SZMG.HU

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. © Rajzok: Szakál Ádám Sch.P. © és a net...

TARTALOMJEGYZÉK

TARTALOMJEGYZÉK	3
SZÁMOLÁS	9
I) Összeadás - kivonás	9
1) Összeadás.....	9
2) Összeadás táblázatban – soronként haladj előre	9
3) Kivonás	10
4) Táblázatban.....	11
5) Negatív számok hozzáadása számhoz, illetve kivonása számból	12
6) Táblázat.....	12
7) Gyakorlás	13
8) Nagyobb számok összeadása - kivonása	13
II) Szorzás.....	14
1) Szorzás – úgy ahogy az órán tettük!	14
2) Nullára, nullákra végződő számokkal történő szorzás, és gyakorlás.....	14
3) Gyakorlás	15
4) A 10-és 20 közötti számok szorzása.	15
5) A négyzetszámok 1-25-ig.....	16
6) Az 5-re végződők négyzete	17
7) Gyakorlás	17
III) A Prímszámok – és a hatványozás alapjai.....	18
1) Prímszámok definíciója.....	18
2) Hatványok – prímszámhatványok.....	19
3) Hatványok és négyzetszámok gyakorlása, visszakeresés	20
4) Azonos alapú hatványok szorzata	21
5) Ismétlő gyakorlás.....	22
IV) Egy kis számelmélet – alapfokon	23
1) Oszthatósági szabályok.....	23
2) Osztások egyjegyű számokkal és 10-zel, fejben	24
3) Számok prímfelbontása	25
4) Két szám LNKO-ja alapszinten	27

5)	Újabb oszthatósági szabályok	28
6)	A 0-ra végződés	28
7)	Két természetes szám Legkisebb Közös Többszöröse – LKKT-je	28
8)	Fejben osztás gyakorlása	30
V)	Törtek	31
1)	Fajtáik	31
2)	Egymásba alakításuk - később	31
3)	Egyszerűsítés	31
4)	Törtek összeadása-kivonása: KÖZÖS NEVEZŐRE HOZÁS BŐVÍTÉSSEL	31
5)	Számok, törtek reciproka	34
6)	Törtek szorzása	34
7)	Osztás	37
8)	Reciprok	37
9)	Gyakorlásuk	38
10)	Fejezd be a mondatot: „Aki nem egyszerűsít,	39
VI)	Tizedes törtek	41
1)	Szorzás-osztás 10 hatványaival	41
2)	Mit is jelentenek a tizedes törtek?	42
3)	Műveletek valódi törtté alakítás nélkül	43
4)	Átalakítás valódi törtté	45
VII)	Zárójelek kezelése	47
1)	Műveleti sorrend	47
2)	Tagok, tényezők	47
3)	Zárójelek kezelése	48
VIII)	Emeletes törtek – és a törtek gyakorlása	48
1)	Az emeletes törtek (örömködő ördögök köbön)	48
2)	Oszthatóság emlékeztető	49
3)	Törtek – minden mennyiségben	49
IX)	Ismétlés	52
A SZÁMOK ÁTTEKINTÉSE		58
I)	A természetes számok köre	58
1)	Definíció - alapok	58
2)	A tízes és a kettes számrendszer – bevezetés	59

3)	Egyéb számrendszerek	60
4)	Műveletek a természetes számokon	61
5)	Egy kis számelmélet	62
6)	Osztók	64
7)	Négyzetszámok	67
8)	Számok osztóinak „keresgelése”	67
9)	LNKO	69
10)	Legkisebb közös többszörös	71
11)	Gyakorlás	73
II)	Az egész számok	75
1)	Definíció - alapok	75
2)	A részhalmazokról bővebben	77
3)	A – mindig – elvégezhető műveletek az egész számok körében	78
III)	A racionális számok és egy kicsit a valósokról	78
1)	Definíció: racionális számok	78
2)	Az eddig megismert számhalmazok viszonya	80
3)	A racionális számok felírása	80
4)	Az elvégezhető műveletek a racionális számok testében	81
5)	Valósak	82
IV)	Egy kicsit a halmazokról	82
1)	Halmaz megadása:	82
2)	A Venn-diagram	82
3)	Halmaznak minden típusból csak egy eleme van	83
V)	Gyakorlás	83
VI)	Egyéb műveletek és relációk a racionális számokon	84
1)	Szám ellentettje és reciproka	84
2)	Szám és abszolútértéke	84
3)	Szám egészrésze	84
4)	Szám törtrésze	85
5)	Szám szignuma	85
VII)	Jelek	86
1)	Jelek neve	86
2)	Írd melléjük az értéket	86

3)	Számhalmazok kapcsolata.....	86
4)	Egyéb jelek a számoknál.....	87
5)	Gyakorlás.....	87
HATVÁNYOZÁS.....		89
I)	Definíció és azonosságok.....	89
1)	Bevezetés.....	89
2)	Definíció.....	89
3)	Hatvány szorzat alakban – szorzat hatvány alakban.....	90
4)	Azonos alapú hatványok szorzata.....	90
5)	Azonos alapú hatványok hányadosa és az <i>egész kitevők</i>	91
6)	Azonos alapú, egész kitevőjű hatványok szorzata, hányadosa.....	93
7)	Szorzat hatványa.....	95
8)	Tört hatványa.....	96
9)	Hatvány hatványa.....	96
10)	Összeg, különbség hatványa.....	99
11)	Gyakorlás.....	99
II)	Számok normálalakja.....	100
1)	Bevezető.....	100
2)	Tíz hatványai.....	101
3)	Írd át normálalakra.....	101
4)	Írd át helyiértékes alakra a normál alakú számot.....	101
5)	Írd ide a normál alak definícióját szavakkal.....	101
	Def.: \forall nem nulla valós szám egyértelműen felírható olyan kéttényezős szorzatként, ahol az első tényező abszolút értéke az $[1;10[$ intervallumba esik, a második tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa.....	101
6)	Írd át normálalakba.....	101
7)	Műveletek normálalakra hozott számokkal.....	102
BETŰK HASZNÁLATA.....		105
I)	Bevezetés.....	105
1)	Alapok.....	105
2)	A műveletek kommutativitása, sorrendje, zárójelek.....	106
3)	Kifejezés értelmezés tartománya.....	106
4)	Írjuk fel jelekkel.....	106

5)	Számok jelzése	107
6)	Írd föl „általában”	109
7)	Változások, kapcsolatok, százalék	110
8)	Ügyes felírások – ügyelj a szimmetriára	111
II)	Műveletek algebrai kifejezésekkel: együttható-változó – helyettesítési érték, egyneműek 112	
1)	Elnevezések.....	112
2)	Helyettesítési érték.....	113
3)	Egynemű kifejezések összevonása - vond össze az egyneműeket.....	113
4)	Egytagúak szorzása	115
III)	Egyszerűbb egyenletek	117
1)	A mérlegelv bevezetése.....	117
2)	Egyenletek felállítása, megoldása - bevezető.....	118
3)	Egyenletek felállítása, megoldása - gyakorlás	119
4)	Egyenletek felállítása, megoldása – törtegyütthatók – még egyenletszorzás nélkül	120
IV)	Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval zárójel-fölbontás.....	121
1)	Szemléltetés.....	121
2)	Egytagú tényezővel több tagú tényező szorzása.....	121
3)	Helyettesítési érték - behelyettesítés.....	123
4)	Egytagok osztása - egyszerűsítsünk.....	123
5)	Egyenletmegoldás.....	123
V)	Több tag szorzása több taggal	124
1)	Bevezetés, szemléltetés.....	124
2)	Többtagúak szorzása.....	125
3)	Két tag összegének, különbségének a négyzete	129
4)	Ismétlés: bontsd föl, majd vonj össze – figyelj – nagy zárójelek!!	130
	SZORZATTÁ-ALAKÍTÁS	131
I)	Szorzáttá alakítás.....	131
1)	Csak szám emelhető ki; a főegyüttható pozitív legyen!.....	131
2)	Betű is kiemelhető	131
II)	Teljes négyzet.....	135
1)	Szorzáttá alakítás előtt mindent kiemelünk!.....	135
2)	Mindent kiemelünk, a főegyüttható pozitív, csökkenő fokszám stb.	135

III)	Egy különleges alak $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	136
1)	Odafele – végezd el a szorzást – CSAK AZ EREDMÉNYT ÍRD LE!	136
2)	Idefele - alakítsd szorzattá.....	137
3)	Egyelőre intuíciót kívánó alak $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$	138
IV)	Egyenletek.....	139
1)	Egyszerűbb egyenletek.....	139
2)	Törtés egyenletek – KUNKORI!.....	140
3)	Egyenlet = állítás.....	142
4)	Egyenletmegoldás szorzattá alakítással	143
5)	Oldd meg	143
V)	Algebrai törtek	146
1)	Definíció.....	146
2)	Kezelésük.....	146
3)	Add meg a következő kifejezések ÉT-át, majd egyszerűsíts – ahol lehet	148
4)	Egyszerűsíts!	149
5)	Add meg az ÉT-t, majd egyszerűsíts	150
6)	Törtek összevonása – szorzattá alakítása	151
VI)	Szöveges egyenletek.....	152

SZÁMOLÁS

I) Összeadás - kivonás

1) Összeadás

Add össze -50 -tól 52 -ig az egész számokat (találj valami ügyes ötletet, és akkor nem nagy munka!)

Mivel bármilyen sorrendben összeadhatjuk, ezért a -50 -hez az 50 -et, a -49 -hez a 49 -et ... a -2 -höz a 2 -őt, a -1 -hez az 1 -et (a 0 nem számít), vagyis csak az 51 és 52 marad ki, így az összeg 103 .

Szorozd össze -10 -tól 12 -ig az egész számokat! (Ha átgondolod, nem kell sokat dolgoznod...)

Mivel köztük van a 0 , és ha valamit 0 -val megszorozok, akkor a végeredmény 0 lesz.

2) Összeadás táblázatban – soronként haladj előre

Így kezdődik: $45+12=$						
+	12	57	98	45	26	49
45	57	102	143	90	71	94
37	49	94	135	82	63	86
93	105	150	191	138	119	142
56	68	113	154	101	82	105
19	31	76	117	64	45	68
98	110	155	196	143	124	147

Így kezdődik: $15+75=$						
+	75	83	28	97	56	34
15	90	98	43	112	71	49
63	138	146	91	160	119	97
97	172	180	125	194	153	131
48	123	131	76	145	104	82
32	107	115	60	129	88	66
59	134	142	87	156	115	93

Végezd el a 100 tagú műveletet! Találj egy ügyes ötletet, hogy könnyű legyen...

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 95 - 96 + 97 - 98 + 99 - 100 =$$

$$\text{Páronként: } (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + (99-100) = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)$$

50 db pár van, tehát az összeg: -50

Végezd el a műveletet! Találj egy ügyes ötletet, hogy könnyű legyen... Nehogy „kiszorozd”, mert úgymint elrontod, és hely sincs hozzá...

$$123\,457 \cdot 234\,567 - 123\,456 \cdot 234\,567 =$$

Ha megnézzük, akkor $123\,457$ db. $234\,567$ -összegeből veszek el $123\,456$ darabot.

Így csak egy db. $234\,567$ marad, tehát ez a végeredmény.

Összeadás táblázatban – soronként haladj előre

Így kezdődik: $361+47=$

+	47	95	33	67	56	29
361	408	456	394	428	417	390
295	342	390	328	362	351	324
572	619	667	605	639	628	601
256	303	351	289	323	312	285
789	836	884	822	856	845	818
948	995	1043	981	1015	1004	977

Így kezdődik: $75+528=$

+	528	687	439	955	376	754
75	603	762	514	1030	451	829
137	665	824	576	1092	513	891
256	784	943	695	1211	632	1010
289	817	976	728	1244	665	1043
348	876	1035	787	1303	724	1102
497	1025	1184	936	1452	873	1251

Van 3 láda: A,B,C. Mindegyiken egy felirat. Legfeljebb az egyik igaz. Hol az arany?

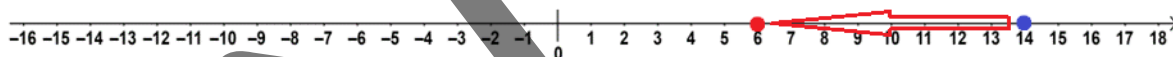
A	B	C
Az arany itt van	Az arany nincs itt	Az arany az A-ban van

Válasz magyarázattal: Ki kell próbálni mindet. Ha az A-ban van, akkor az A is, B is igaz. Tehát nincs ott. Ha a B-ben van, akkor egyik sem igaz. Ha a C-ben van, akkor akkor csak a B igaz, tehát a C-ben van.

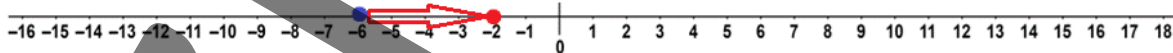
3) Kivonás

A számegyenesen jelöld nyíllal a műveletet, és jelöld az eredményt!

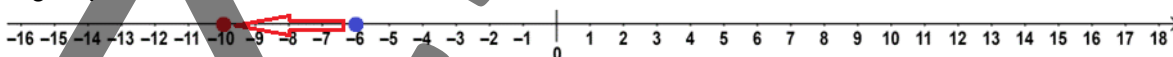
$14 - 8 =$



$-6 + 4 =$



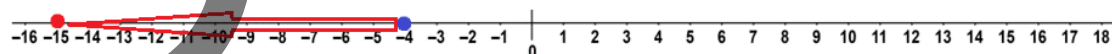
$-6 - 4 =$



$-4 + 11 =$



$-4 - 11 =$



* Van egy 6 méteres kötelem. Hogyan tudom bebizonyítani vele, hogy egy gerenda pontosan 13 méter?

Vagy: $13 \times 6 = 78$, vagyis ha lemérek 78 méter távolságot, akkor pontosan 6-szor tudom rátenni a gerendát.

4) Táblázatban

A bal oldalsó számból vond ki a felsőt!

Így kezdődik: $86 - 0 =$						
-	0	6	42	67	71	88
86	86	80	44	19	15	-2
79	79	73	37	12	8	-9
54	54	48	12	-13	-17	-34
46	46	40	4	-21	-25	-42
39	39	33	-3	-28	-32	-49
4	4	-2	-38	-63	-67	-84

Így kezdődik: $95 - 7 =$						
-	7	15	49	61	72	84
95	88	80	46	34	23	11
77	70	62	28	16	5	-7
63	56	48	14	2	-9	-21
48	41	33	-1	-13	-24	-36
26	19	11	-23	-35	-46	-58
5	-2	-10	-44	-56	-67	-79

* Leírom a következő számokat egy-egy cetlire külön-külön: 1; 1; 4; 5; 6; 7; 7; 8; 9; 9

Miért nem lehet szétosztani 2 csoportba papírokat úgy, hogy a két csoportban található számok összege ugyanannyi legyen? (Nem kötelező egyenlő darabra osztani a két csoportot.)

Azért, mert a tíz szám összege páratlan. Ha a két csoportban az összeg ugyanannyi, akkor őket összeadva páros lenne az összeg. Ez ellentmondás.

Van-e három különböző, 6-nál nagyobb pozitív természetes szám, melyek összege 23? Ha van, mutasd meg, melyek azok. Ha nincs, magyarázd meg, miért!

Nincs, mert a 3 legkisebb ilyen összege is már nagyobb 23-nál: $7 + 8 + 9 = 24$

A bal oldalsó számhoz add hozzá a felsőt!

Így kezdődik: $-20 + 5 =$						
+	5	13	44	56	78	89
-20	-15	-7	24	36	58	69
-37	-32	-24	7	19	41	52
-43	-38	-30	1	13	35	46
-51	-46	-38	-7	5	27	38
-76	-71	-63	-32	-20	2	13
-89	-84	-76	-45	-33	-11	0

Így kezdődik: $-88 + 43 =$						
+	43	328	177	445	236	952
-88	-45	240	89	357	148	864
-157	-114	171	20	288	79	795
-192	-149	136	-15	253	44	760
-283	-240	45	-106	162	-47	669
-556	-513	-228	-379	-111	-320	396
-865	-822	-537	-688	-420	-629	87

- 5) Negatív számok hozzáadása számhoz, illetve kivonása számból
 Fejzd be a mondatot: Egy szám ellentettje a szám -1 -szerese.

13,4 ellentettje: $-13,4$ -20 ellentettje: 20 0 ellentettje: 0

Végezd el az alábbi műveleteket, majd ellenőrizd őket az órai füzetből.

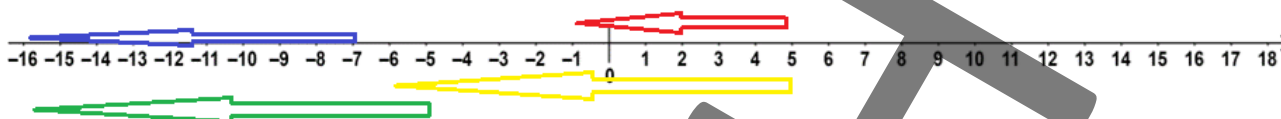
Csak akkor lépj tovább, ha ez megy! Számegyenesen rajzold őket a megadott színnel:

Piros: $5+(-6) = -1$

Kék: $-7+(-9) = -16$

Sárga: $5+(-11) = -6$

Zöld: $-5+(-11) = -16$



Fejzd be a mondatot írásban: „Ha negatív számot adunk valamihez, akkor az ellentettjét vonjuk ki.

Negatív kivonása – ami elé szín is van írva, azt ábrázold!

Piros: $5-(-6) = 11$

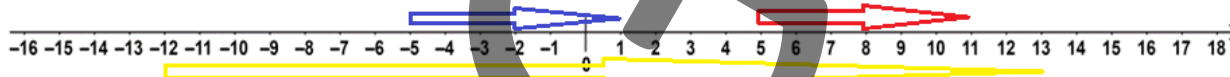
$72-(-28) = 100$

Kék: $-5-(-6) = 1$

$-72-(-28) = -44$

Sárga: $-12-(-25) = 13$

$14-(-39) = 53$



Fejzd be a mondatot írásban: „Ha negatív számot vonunk ki valamiből, akkor valójában a negatív szám ellentettjét adjuk hozzá.

Végezd el a műveleteket:

$53+78 = 131$

$53+29 = 82$

$53-78 = -25$

$53-29 = 24$

$-53+78 = 25$

$-53+29 = -24$

$-53-78 = -131$

$-53-29 = -82$

- 6) Táblázat

Így kezdődik: $73+(-22)=$							Így kezdődik: $73-(-22)=$						
+	-22	16	-47	34	-70	89	-	-22	16	-47	34	-70	89
73	51	89	26	107	3	162	73	95	57	120	39	143	-16
-57	-79	-41	-104	-23	-127	32	-57	-35	-73	-10	-91	13	-146
35	13	51	-12	69	-35	124	35	57	19	82	1	105	-54
-87	-109	-71	-134	-53	-157	2	-87	-65	-103	-40	-121	-17	-176
61	39	77	14	95	-9	150	61	83	45	108	27	131	-28
-92	-114	-76	-139	-58	-162	-3	-92	-70	-108	-45	-126	-22	-181

7) Gyakorlás

Melyik az a szám, amit 24-hez kell adni, hogy 50-et kapjunk?

A 26

Mennyi $50-24=26$

Melyik az a szám, amelyet 30-hoz kell adni, hogy -39 -et kapjunk?

A -69

Mennyi $-39-30=-69$

Végezd el a műveletet!		
$-10-32=-42$	$3-8=-5$	$-3+8=5$
$35-(-24)=59$	$-12-8=-20$	$-8-(-10)=2$
$-2-10=-12$	$-34+21=-13$	$32+(-35)=-3$
$-23-(-12)+21=10$		$-45-(-8)=-37$
$12-45-10=-53$		$3-(-3)=6$
$-5-(-21)=16$	$4+(-10)=-6$	$13+(-2)=11$
$-4-9=-13$	$9-15=-6$	$-3-20=-23$
$23-(-48)=71$	$-36+70=34$	$-45-36=-81$
$-65-51=-116$	$37-(-38)=75$	$-100+35=-65$

8) Nagyobb számok összeadása - kivonása

Igy kezdődik: $230+48=$							Igy kezdődik: $153-(-236)=$						
+	48	-47	56	-65	84	-91	-	-236	478	-149	871	-787	895
230	278	183	286	165	314	139	153	389	-325	302	-718	940	-742
-340	-292	-387	-284	-405	-256	-431	-544	-308	-1022	-395	-1415	243	-1439
450	498	403	506	385	534	359	659	895	181	808	-212	1446	-236
-560	-512	-607	-504	-625	-476	-651	-395	-159	-873	-246	-1266	392	-1290
670	718	623	726	605	754	579	777	1013	299	926	-94	1564	-118
-780	-732	-827	-724	-845	-696	-871	-976	-740	-1454	-827	-1847	-189	-1871



II) Szorzás

1) Szorzás – úgy ahogy az órán tettük!

Így kezdődik: 2·12=							Így kezdődik: 2·15=						
×	12	13	15	17	18	19	×	15	17	19	28	32	46
2	24	26	30	34	36	38	2	30	34	38	56	64	92
4	48	52	60	68	72	76	4	60	68	76	112	128	184
0	0	0	0	0	0	0	5	75	85	95	140	160	230
7	84	91	105	119	126	133	7	105	119	133	196	224	322
8	96	104	120	136	144	152	8	120	136	152	224	256	368
9	108	117	135	153	162	171	9	135	153	171	252	288	414

Hat db. különböző természetes számot összeszorozok. Magyarázd el meg, hogy miért nem kaphatok 540-et! (Érdekes kis számok szorzatára felbontanod!)

Mo.: 0 nyilván nem szerepelhet. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Ez a 6 legkisebb jó természetes, de már az ő szorzatuk is nagyobb, mint 540.

2) Nullára, nullákra végződő számokkal történő szorzás, és gyakorlás

Így kezdődik: 5·15=							
×	15	17	22	28	31	35	47
5	75	85	110	140	155	175	235
7	105	119	154	196	217	245	329
11	165	187	242	308	341	385	517
17	255	289	374	476	527	595	799
24	360	408	528	672	744	840	1128
37	555	629	814	1036	1147	1295	1739

Így kezdődik: 10·6=			
*	6	14	35
10	60	140	350
100	600	1400	3500
20	120	280	700
200	1200	2800	7000
40	240	560	1400
400	2400	5600	14000
50	300	700	1750

Így kezdődik: 3·41=							
×	41	47	58	75	83	87	94
3	123	141	174	225	249	261	282
5	205	235	290	375	415	435	470
6	246	282	348	450	498	522	564
7	287	329	406	525	581	609	658
8	328	376	464	600	664	696	752
9	369	423	522	675	747	783	846

Így kezdődik: 10·27=			
*	27	54	93
10	270	540	930
100	2700	5400	9300
20	540	1080	1860
200	5400	10800	18600
40	1080	2160	3720
400	10800	21600	37200
50	1350	2700	4650

3) Gyakorlás

Szorozd össze (okosan!):

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{7}{6}\right) \left(\frac{8}{7}\right) \left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{10}{9}\right) = \frac{10}{5} = 2$$

Tíz különböző nemnegatív egész (vagyis természetes) számot összeszorozok, és a szorzat végeredménye 0. Melyik a legkisebb a tíz szám közül és miért az?

Mo.: Mivel a szorzat 0, ezért a 0-nak szerepelnie kell. És mivel különböző természetesek, ezért csakis a 0 lehet a legkisebb közülük.

4) A 10-és 20 közötti számok szorzása.

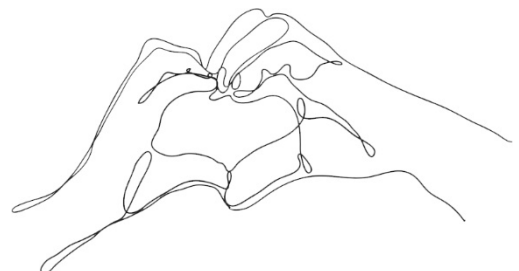
Így kezdődik: 14·11=									Így kezdődik: 15·19=								
×	11	13	15	12	17	19	18	16	×	19	11	13	14	17	12	15	16
14	154	182	210	168	238	266	252	224	15	285	165	195	210	255	180	225	240
11	121	143	165	132	187	209	198	176	13	247	143	169	182	221	156	195	208
13	143	169	195	156	221	247	234	208	12	228	132	156	168	204	144	180	192
17	187	221	255	204	289	323	306	272	18	342	198	234	252	306	216	270	288
19	209	247	285	228	323	361	342	304	16	304	176	208	224	272	192	240	256
15	165	195	225	180	255	285	270	240	11	209	121	143	154	187	132	165	176
16	176	208	240	192	272	304	288	256	19	361	209	247	266	323	228	285	304
18	198	234	270	216	306	342	324	288	18	342	198	234	252	306	216	270	288

* Írd fel azt a legkisebb természetes számot, mely számjegyeinek összege 80.

Mo.: Mennél kevesebb jegy kell, ezért a legtöbb 9-est használom. 9db már túl sok, ezért 8 db. 9-es. Ez már 72. Egy db. 8-as kell még, hiába nagy, ha kisebb számjegyet használok, akkor legalább 2 db. kell még, akkor meg több jegyű lenne... Vagyis: 899 999 999

Írd föl az összes olyan háromjegyű természetes számot, amelyek jegyeinek szorzata 8. (Van belőlük néhány... Ja, ne feledd: 0-val szabad ugyan szorozni, de akkor a végeredmény...)

Mo.: 222; 118, 181, 811; 124, 142, 214, 241, 412, 421

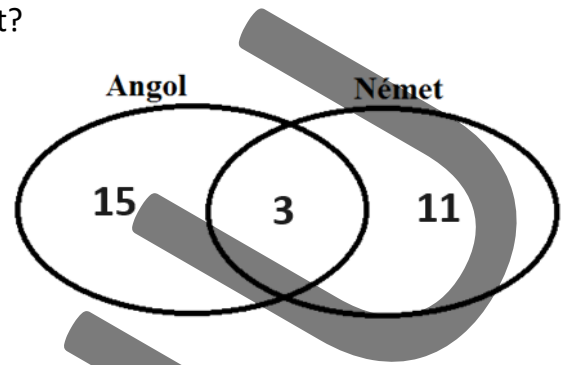


Egy osztályba 29-an járnak. Mindenki tanul legalább egy nyelvet. Angolt 18-an, Németet 14-en tanulnak. Hányan tanulják mindkét nyelvet?

Légy szíves, ilyen ábrában gondolkodj:

Mo. $18+14=32$. Mivel az összegbe kétszer számoltuk azokat, akik mindkettőt tanulják, ezért épp ennyivel több az összeg az osztálylétszámnál: $32-29=3$.

Vagyis 3-an tanulják mindkét nyelvet.



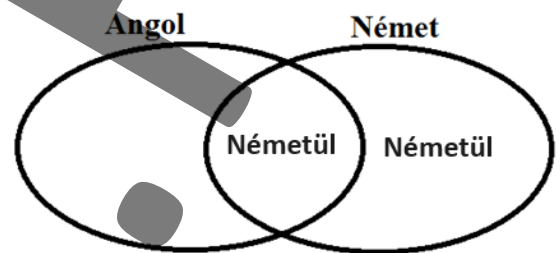
5) A négyzetszámok 1-25-ig

* Egy osztályba 26-an járnak. Angolt és Németet tanulnak; legalább az egyiket, de van, aki mindkettőt. Angolt 22-en, és kétszer annyian tanulnak németet, mint ahányan mindkettőt. Hányan tanulnak németül?

Mo.: Mivel a németül tanulók duplája a mindkét nyelvet tanulóknak, ezért ha középre beírom a „Németül” tanulók számát, akkor a csak németül tanulókhöz is ugyanazt kell írnom.

Ha összeadom az Angolul és Németül tanulókat:

$= (22) + (\text{Németül} + \text{Németül})$, akkor azokba kétszer számoltam bele a mindkettő nyelvet tanulókat, tehát azt le kell vonni belőle: $22 + \text{Németül} + \text{Németül} - \text{Németül}$. Ez adja az osztálylétszámot: 26-ot. Vagyis $22 + \text{Németül} = 26$, így Mindkettőt 4-en, csak németet 4-en, és 18-an csak angolul tanulnak.



Legalább hány diák jár abba az osztályba, ahol *biztosan* van 4 olyan tanuló, aki ugyanabban a hónapban született? (Először próbálkozz mondjuk 30-cal!)

Mo.: Ha mondjuk 30-an járnak, akkor a 12 hónapra simán el lehet osztani úgy őket úgy, hogy egyik hónapba se kerüljön 3-nál több. Pl.: 10 hónapba 3, kettőbe egy sem.

De ha minden hónapot feltöltök 3 gyerekekkel, akkor az 36 gyerek. Vagyis, ha 37 gyerek jár, akkor biztos nem lehet minden hónapot 4-nél kevesebb gyerekekkel feltölteni, így legalább 37-en vannak.

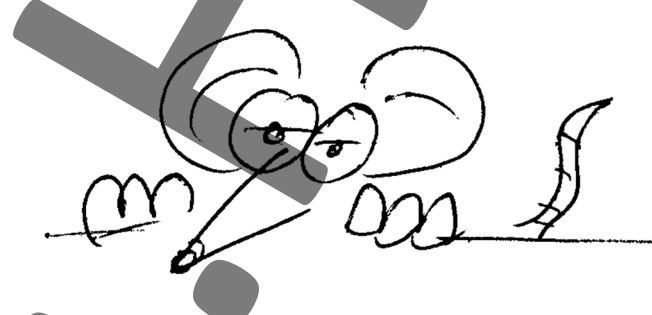
Írd föl egymás után az összes négyzetszámot:

$0^2=0$	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$
$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$	$7^2=49$
$8^2=64$	$9^2=81$	$10^2=100$	$11^2=121$
$12^2=144$	$13^2=169$	$14^2=196$	$15^2=225$
$16^2=256$	$17^2=289$	$18^2=324$	$19^2=361$
$20^2=400$	$21^2=441$	$22^2=484$	$23^2=529$
$24^2=576$	$25^2=625$		

6) Az 5-re végződők négyzete

Az 5-re végződők négyzete	
Szám	Négyzete
15	225
25	625
55	3025
75	5625
95	9025

Az 5-re végződők négyzete	
Szám	Négyzete
125	15625
145	21025
155	24025
175	30625
185	34225



7) Gyakorlás

Egy táblára felírom -10 -tól $+10$ -ig az egész számokat ($-10; -9; \dots -1; 0; 1; 2; 3; \dots 10$). Ezután a tábláról letörlek kettő számot, és visszaírom az összegüket a táblára. Majd megint letörlek két számot a tábláról, és megint visszaírom az összegüket a táblára.

a) Kezdetben hány szám van a táblán?

-10 -tól -1 -ig 10 db, 1 -től 10 -ig 10 db és végül a 0 : 21 db.

b) Egy lépés után mennyivel csökken a táblán maradó számok darabszáma?

Kettőt törlek, egyet visszaírok: 1-gyel csökken a táblán maradók száma.

c) Hány ilyen lépés után marad egy szám a táblán?

A 20. lépés után.

d) Egy lépés után mi nem változik ezek közül: a táblán található számok különbsége, összege, szorzata, hányadosa?

Az összegük nem változik, bármilyen sorrendben, bárhogy csoportosítva is adom őket össze.

e) Mi az utolsó szám, ami a táblán marad?

Mivel az összeg nem változik, és kezdetben az összeg 0 -volt, az utolsó szám, ami a táblán marad, a 0 .

(Hiszen $-10 + 10 = 0$, $-9 + 9 = 0$, ... $-1 + 1 = 0$, vagyis párbaállítva kiderül, hogy 0 az összeg.)

III) A Prímszámok – és a hatványozás alapjai

1) Prímszámok definíciója

Írd le fejből a prímszámok definícióját! (osztójuk - ~~osztályuk~~)

Def.: A prímszámok azok az 1-nél nagyobb természetes számok, melyeknek az 1-en és önmagukon kívül több természetes osztójuk nincs.

Tudd (gondolkodva, nem bemagolva) folyamatosan felsorolni az első 15 prímszámot, és írd is föl őket ide: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Ahogy az órán: húzd át a 2 többszöröseit, a 3 többszöröseit stb. és a végén karikázd be a fennmaradó „kiszitált” prímszámokat:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Két prímszám összege: 45. Melyik lehet ez a kettő? Hány ilyen pár lehet és miért?

Mo.: mivel ha az egyik nem 2, akkor mindkét prím páratlan, ezért az összegüknek párosnak kell lenniük. De 45 páratlan. Tehát az egyiknek 2-nek kell lenni. A másiknak így 43-nak és ez prím is! (Miért kell megnézni, hogy prím-e a 43? Azért, mert ha a példa úgy szól, hogy két prím összege 47, akkor nem lenne megoldás...)

Próbáld meg 4 prímszám összegére bontani!

Pl.: ~~2;2;2;39~~ pl: 2; 11; 15; 17 ✓

Töltsd ki a táblázatot: vagy végezd el a műveletet, vagy írd oda, minek a négyzete – ha négyzetszám! Ha „semmi”, akkor írd oda: NA (nincs adat)!
(NA=not available, not applicable)



pl.: NA	235	$25^2=$	625
$238+77=$	315	NA	341
$23 \cdot 8=$	184	$125^2=$	15625
$17 \cdot 19=$	323	$519+395=$	914
$23^2=$	529	$24^2=$	576
NA=	381	$12^2=$	144
$19^2=$	361	$34 \cdot 8=$	272
$16 \cdot 15=$	240	$13 \cdot 11=$	143
$13^2=$	169	$14^2=$	196
$18^2=$	324	$14 \cdot 15=$	210
$11^2=$	121	$21^2=$	441
$22^2=$	484	$13^2=$	169
$12 \cdot 19=$	228	$165^2=$	27225
$345+678=$	1023	$11 \cdot 19=$	209
$65^2=$	4225	$14 \cdot 17=$	238
$185^2=$	34225	$16^2=$	256
$13 \cdot 18=$	234	$348-219=$	129
$13^2=$	289	$195^2=$	38025
$15^2=$	225	$12^2=$	144
$75^2=$	5625	$18^2=$	324
$485+297=$	782	$145^2=$	21025

2) Hatványok – prímszámok

a) Írd föl hatványalakba a következő

szorzatokat, ami pedig hatvány alakban van, azt írd át szorzat alakba:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$$

$$11 \cdot 11 = 11^2$$

$$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$$

Írd föl a három legnagyobb kétjegyű prímszámot: 97; 89; 83

Írd fel azokat a kétjegyű prímeket, melyek jegyeinek szorzata is prím!

13, 31, 17, 71

NE feledd, a 91 a leggonoszabb kétjegyű, mert az hazudja magáról, hogy prím, pedig...

b) Írd föl hatványalakban a következőket, és írd is le az értéküket:

Pl.: kettő a negyediken: $2^4=16$

Öt a köbön: $5^3=125$

Hét ad kettő: $7^2=49$

Három ad három: $3^3=27$

Száz az elsőn: $100^1=100$

Tizenhárom a négyzeten: $13^2=169$

Kilenc a másodikon: $9^2=81$

Tizennyolc a négyzeten: $18^2=324$

Kettő a köbön: $2^3=8$

c) Írd föl fejből a kettő tanult hatványait növekvő sorrendben:

$$2^0=1; 2^1=2; 2^2=4; 2^3=8; 2^4=16; 2^5=32; 2^6=64; 2^7=128; 2^8=256; 2^9=512; 2^{10}=1024$$
$$2^{11}=1048; 2^{12}=4096$$

d) Írd le hatványalakban a következőket, és szavakkal írd alá, ahogy mondjuk a hatványt:

$$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,1^3$$

$$(-3)(-3)(-3)(-3) = (-3)^4$$

$$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$$

0,1 a köbön = 0,001

-3 ad négy = 81

10 a másodikon, a négyzeten

Állítsd a következő számokat növekvő sorrendbe: $(-3)^4$; 27; $(-4)^3$; 3^4 ; $(-5)^2$; 0^{25} ; 100^0
 $(-4)^3 < 0^{25} < 100^0 < (-5)^2 < 27 < 3^4 = (-3)^4$

e) Írd le a 0 mondókáját!

A 0 mondókája: A 0-t oszthatjuk, de 0-val nem osztunk és 0^0 nincs értelmezve.

f) Írd le a következő számok tanult hatványait:

$$2: 2^0=1 \quad 2^1=2 \quad 2^2=4 \quad (\text{ezt a sort csak mondd végig})$$

$$3: 3^0=1 \quad 3^1=3 \quad 3^2=9 \quad 3^3=27 \quad 3^4=81 \quad 3^5=243 \quad 3^6=729$$

$$4: 4^0=1 \quad 4^1=4 \quad 4^2=16 \quad 4^3=64 \quad 4^4=256 \quad 4^5=1024 \quad 4^6=4096$$

$$5: 5^0=1 \quad 5^1=5 \quad 5^2=25 \quad 5^3=125 \quad 5^4=625 \quad 5^5=3125 \quad 6: 6^0=1 \quad 6^1=6 \quad 6^2=36 \quad 6^3=216$$

$$7: 7^0=1 \quad 7^1=7 \quad 7^2=49 \quad 7^3=343 \quad 8: 8^0=1 \quad 8^1=8 \quad 8^2=64 \quad 8^3=512$$

$$9: 9^0=1 \quad 9^1=9 \quad 9^2=81 \quad 9^3=729$$

Tedd ki a relációjelet ($<$ v. $=$ v. $>$) közéjük. Pl: $2^6 < 9^2$

$$2^7 < 12^2$$

$$7^3 < 5^4$$

$$13^2 > 3^4$$

$$6^3 < 21^2$$

$$4^5 = 2^{10}$$

$$3^5 > 5^3$$

$$200^0 = 2^0$$

$$(-5)^7 < 5^6$$

3) Hatványok és négyzetszámok gyakorlása, visszakeresés

Töltsd ki a táblázatot!

9^3	729	18^2	324
2^8	256	125^2	15625
15^2	225	7^3	343
$(-9)^3$	-729	3^5	243
2^9 v. 8^3	512	11^2	121
5^3	125	175^2	30625
$19 \cdot 13$	247	$(-5)^3$	-125
NA	381	14^2	196
15^2	225	2^6	64
17^2	289	5^4	625
2^5	32	6^3	216

Hány négyzetszám van 500-ig? (A négyzetszámok: 0; 1, 4, 9, 16, 25 stb., vagyis az egész számok négyzetei.)

Mivel $22^2=484$ és a következő négyzetszám már a 23^2 már 529, ezért 23 db. (mivel a 0-t is hozzászámoljuk.)

* Mutasd meg, hogy nem lehet két csoportba bontani 1-től 12-ig a számokat úgy, hogy a két csoportban található számok szorzata megegyezzen (nem kell egyforma darabszámúnak sem lennie a két csoportnak)!

Mo.: Pl. azért, mert ha a bal csoportban ott van a 11, akkor a jobb csoportban nem lesz 11-gyel osztható szám, vagyis a bal csoport osztható lesz 11-gyel, a jobb csoport nem.

Egy különös növény naponta megduplázza a kiterjedését a tó felületén. Már a tó huszad részét befedi. Hány nap kell, hogy végleg beborítsa a tavat?

Mo.: 4 nap esetén az egyhuszadot 16-tal szorzom, de az még csak 16/20 terület. De ha már 5 nap telik el, akkor 32-vel szorzok, és 32/20-ad már nagyobb mint 1. Vagyis 5 nap duplázás kell: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (1/20) > 1$

4) Azonos alapú hatványok szorzata

$$2^6 \cdot 2^{10} = 2^{16}$$

$$2^6 \cdot 2^{10} \cdot 2^{20} = 2^{36}$$

$$3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^6 = 3^{21}$$

Két dobókockával dobunk: egy kékkel és egy pirossal (alább színezd ki őket!). A kék kockán található szám legyen a hatvány alapja, a piroson pedig a kitevő.

A hatványalakokat színessel (kék alap, piros kitevő), a végeredmény számokat tollal írd!

Melyik lesz a legnagyobb, és a legkisebb értékű hatvány?

Legnagyobb hatvány és értéke: 6^6

Legkisebb: $1^1=1$

A legkisebbet összesen hányféleképp lehet felírni? $1^1, 1^2 \dots 1^6$

Melyik az a két hatványérték, amely pontosan kétféleképp is megjelenhet? Írd föl a két-két hatványt és az azonos értéket!

$$2^2 \text{ és } 4^1=4; \quad 2^4 \text{ és } 4^2=16$$

Melyik a nagyobb: kék ötös és piros hatos, vagy kék hatos és piros ötös?

$$5^6 \text{ v. } 6^5$$

$5^6=125 \cdot 125$ $6^5=216 \cdot 36$ Mivel a 125 több mint kétszerese a 36-nak, a 216 pedig nincs duplája a 125-nek, ezért az 5^6 a nagyobb.

Hány különböző hatványt tudunk dobni, ha nem számít, hogy van köztük azonos értékű?

6 kék, és minden egyes kék megjelenhet 6 piros kitevővel: $6 \cdot 6=36$

Nem kötelező: hány különböző értéket kaphatunk összesen?

Az 1 hatványai mind 1-et érnek. A 2 hatványnál van 2 azonos értékű pár. A 3 és 5 hatványai, mivel prímek, csak egyféleképp állhatnak elő. A 4 hatványából egyet láttunk, a többi nem jó, a 6 hatványaiban vannak (2·3)-as párok, más ilyen alap nincs.

Tehát: $36-5-2=29$.



5) Ismétlő gyakorlás

A prímszámok definíciója:

Def.: A prímszámok azok az 1-nél nagyobb természetes számok, melyeknek az 1-en és önmagukon kívül több természetes osztójuk nincs.

Írd le az első 11 prímszámot: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$-45 - 97 = -142$	$(-15)^2 = 225$	$-82 - (-19) = -63$	$17 \cdot 14 = 238$
$(-2)^7 = -128$	$19^2 = 361$	$16 \cdot 16 = 256$	$3^5 = 243$
$17 \cdot 13 = 221$	$(-3)^4 = 81$	$18 \cdot 17 = 306$	$22^2 = 484$
$5^4 = 625$	$2^9 = 512$	$36 \cdot 9 = 324$	$144 = 12^2$

Melyik az 100 előtti utolsó prímszám? A 97

$165^2 = 27225$	$12^0 = 1$	$13^2 = 169$	$4^5 = 2024$
$11^2 = 121$	$289 = 17^2$	$7^3 = 343$	$18^2 = 324$
$13^2 = 169$	$(-5)^3 = -125$	$-23 - (-27) = 4$	$35^2 = 1225$

Mondóka: Azonos alapú hatványokat... Írd le a teljes mondatot!

Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Add meg az a legkisebb kétjegyű prímszámot, amely jegyeinek a szorzata is prím!

13

Melyik a leggonoszabb kétjegyű szám? Mínek álcázza magát?

A 91. Prímnek hazudja magát, de $91 = 7 \cdot 11$

Add meg azt a legnagyobb kétjegyű prímet, amelynek a szájegyeinek az összege is prím!

Ha mindkettő jegy páratlan, akkor az összeg páros lesz, tehát nem jó.

Két páros összege is páros. Tehát az egyik páratlan, a másik páros.

2-re nem végződhet, így 2-vel kezdődik. Innen már könnyű: a 29.

$17 \cdot 16 = 272$	$12 \cdot 19 = 228$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$
$17^2 = 289$	$128 = 2^7$	$3^5 = 243$	$17 \cdot 15 = 255$
$0^0 = \text{nincs értelmese}$	$-23 + (-68) = -91$	$19^2 = 361$	$216 = 6^3$
$3^7 \cdot 3^8 = 3^{15}$	$12 \cdot 18 = 216$	$196 = 14^2$	$21^2 = 441$
$-48 - 97 = -145$	$(-5)^3 = -125$	$11^8 \cdot 11^0 = 11^8$	$2^5 = 32$

IV) Egy kis számelmélet – alapfokon

1) Oszthatósági szabályok

a) Oszthatóság

Írd le a teljes mondatot:

pl: 2 osztja a 10-et, mert van olyan egész, mellyel megszorozva a kettőt tízet kapok, ez pedig az 5.

„5 osztja a 35-öt, mert van olyan egész, mellyel megszorozva az 5-öt 35 kapok, ez pedig a 7.

„3 nem osztja a 22-öt, mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a 3-at 22-öt kapok.

7 osztja a 84-et, mert van olyan egész, mellyel megszorozva a 7-et 84-et kapok, ez pedig a 12.

11 nem osztja a 2518-at, mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a 11-et 2518-at kapok.

A tanult oszthatósági szabályok alapján a 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 25 közül melyek osztják a következő számot: 188 496 Az osztók: 2; 3; 4; 6; 8; 9; 11

b) Gyakorlásuk

A 3_4_ hiányos 4-jegyű számból a 2. és a 4. számjegy hiányzik. Egészítsd ki a számot úgy, hogy 4-gyel és 3-al is osztható legyen, és a lehető legnagyobb legyen a kapott szám!

Mo.: Az utolsó jegy a 0; 4; 8 lehet. De úgy a legnagyobb, ha a 2. helyen a legnagyobb áll. Ha 9, akkor $3+9+4=16$. Ehhez a 0;4;8 közül a 8-at kell adni 3-mal is osztható legyen a szám (mert az összeg akkor 24). Tehát: 3948

Írj fel egy olyan 5 jegyű számot, amely osztható:

5-tel és 9-cel is: 99945

8-cal és 3-mal is: 34800

8-cal és 11-gyel is: 70400

3-mal, 4-gyel és 5-tel is: 21240

Írd mellé, hogy igaz, vagy hamis az állítás:

- Egy természetes szám „akkor, és csak akkor” („pontosan akkor”) osztható 2-vel, ha jegyeik oszthatók kettővel: Hamis (elég az utolsó jegy)
- Ami négyvel osztható, az kettővel is osztható: Igaz
- Egy szám osztható 3-mal, ha osztható 9-cel: Igaz
- Egy szám osztható 5-tel, ha osztható 10-zel: Igaz
- Egy szám ha osztható 8-cal, akkor 4-gyel is: Igaz.
- Egy szám akkor és csak akkor osztható hattal, ha osztható kettővel és hárommal is: Igaz

A következő 6 jegyű számból hiányzik a második és a negyedik számjegy: 5_6_20
Egészítsd ki az alábbiak szerint úgy, hogy a legkisebb illetve a legnagyobb legyen!

Legyen 2-vel osztható:	Legkisebb 506020	Legnagyobb 596920
Legyen 9-cel osztható:	Legkisebb 506520	Legnagyobb 596520
Legyen 8-cal osztható:	Legkisebb 506120	Legnagyobb 596920
Legyen 6-tal osztható:	Legkisebb 506220	Legnagyobb 596820
Legyen 11-gyel osztható:	Legkisebb 506220	Legnagyobb 596420

c) Mely tanult számokkal osztható a következő szám:

12 346 152: (1); 2; 3; 4; 6; 8

5 400: (1); 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25

3 564: (1); 2, 3, 4, 6, 9, 11

2) Osztások egyjegyű számokkal és 10-zel, fejben

* Tudjuk, hogy a 12-nek pontosan 6 db. természetes osztója van: az 1, 2, 3, 4, 6, 12. Melyek azok a természetes számok 200-ig, amelynek PONTOSAN három db. természetes osztója van? Keress először egy-két ilyen, és akkor rájöhetsz!

Mo.: pl. a 9. Osztói: 1, 3, 9. A 12 nem jó, mert osztói: 1,2,3,4,6,12. Az 1-12, 2-6, 3-4 párok, mert a párok szorzata 12. Vagyis olyan szám kell, amelyben A legkisebb párja a legnagyobb, stb. stb., de van középen egy, ami a saját maga párja, mint az 1, 3, 9-nél.

Vagyis akkor a négyzetszámok lesznek ezek, hiszen pl. 36: 1,2,3,4, 6, 9,12,18,36

Vagyis a jók: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196

Oszd el fejben! Ha van maradék, akkor írd le: Minta: 7-tel osztom a 254-et: $254=36 \cdot 7 + 2$

$$344=43 \cdot 8$$

$$162=27 \cdot 6$$

$$453=90 \cdot 5 + 3$$

$$327=54 \cdot 6 + 3$$

$$674=74 \cdot 9 + 8$$

$$520=130 \cdot 4$$

$$357=51 \cdot 7$$

$$700=77 \cdot 9 + 7$$

Írj olyan számot, amely minden jegye 5-ös, és osztható 3-mal:

555

Írj olyan számot, amely minden jegye 5-ös, és osztható 11-gyel:

55 v. 5555

Írj olyan számot, amely minden jegye 8-as, és osztható 9-cel:

888 888 888

Írj olyan számot, amely minden jegye 2-es, és osztható 6-tal:

222

Nem köt.: Mi az utolsó számjegye a következő 1920 tényezőből álló szorzatnak:
 $K=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \dots\cdot 1920$ (Magyarázd is meg!) (1920-ban alapították a Szent Margit Gimit)
Mo.: mivel van benne 10-es szorzó, azért biztos, hogy 0.

** És mi az utolsó 400 jegye? (Magyarázd is meg!)

Mivel 960 db. páros és $1920/5=384$ db. öttel osztható szám van, ezért biztos, 384 db. 0 már van a végén.

De a 25-tel oszthatóak 2 db. 5-ös prímtényezőt visznek a szorzatba, ezért $1900/25=76$ -tal több 0 van még legalább. Vagyis bőven 400 felett van a 0-k száma...

Oszd el fejben maradékosan:

$$257:5 = 51+2 (=53) \text{ 51 maradt a 2}$$

$$734:9 = 81 \text{ maradt az 5}$$

$$373:4 = 93 \text{ maradt az 1}$$

$$1671:8 = 208 \text{ maradt a 7}$$

3) Számok prímfelbontása

a) „Oszlop módszer”: Bontsd prímeke oszlop-diagrammal: 16 500 és 1485

b) Bontsd föl „okosan” prímeke a következő számokat: fa diagrammal – fa struktúrával:

$$1\ 250=2\cdot 5^4$$

$$2\ 250$$

Nem köt.: Hány 0-ra végződik a következő szám: $K=2^{20} \cdot 7^{13}$. Magyarázd is meg!
Ez már egy kanonikus alak. Mivel nincs benne 5-ös prím, ezért nem végződik 0-ra.

Bontsd fel prímekekre a fa struktúra logikáját használva, de már ne rajzolj!

$$\text{Pl.: } 1200=12 \cdot 10 \cdot 10=(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)=2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$19600=14^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2=2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$25000=5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3=2^3 \cdot 5^5$$

$$2400=2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2=2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$324000=18^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3=2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$$

- c) Melyik lehet az a két prím, amelynek az összege 63? Miért csak ez az egy prímpár lehet?
Mivel két páratlan prím összege páros, ezért szerepelni kell a 2-nek. $2+61=63$
Szerencsére a 61 is prím. (Hiszen pl. a 67-et így nem lehet!)

* Miért lehetsz biztos abban, hogy nincs 3 db. olyan prímszám (akár néhány azonos is lehet), melyek összege: 12124, szorzatuk pedig 101 234 566 689. Gondold át, írd le a választ!

Mo.: 3 prím összege úgy páros, ha mind páros: de $2 \cdot 2 \cdot 2$ az csak 8. Vagy ha pontosan egy db. páros van köztük: a 2. De akkor a szorzatnak is párosnak kellene lennie...

** Miért lehetsz biztos abban, hogy nincs 4 db. olyan prímszám (akár néhány azonos is lehet), melyek összege: 573 268, szorzatuk pedig 701 196 738 533 335 109 682. Gondold át, írd le a választ!

Páros az összeg:

- vagy 4 db. 2-es: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ az csak 16.
- vagy 2 db 2-es és 2 db. pt prím: ebben az esetben 4-gyel lenne osztható a szorzat, de az nem osztható.
- vagy 4 db. páratlan prím. De akkor a szorzat páratlan lenne...

- d) Írd le ide szó szerint a számelmélet alaptételét – fejből!

Bármely 1-nél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható föl prímszámok szorzatára a sorrendtől való eltérés erejéig.

Vizsgáld meg, hogy egyenlő-e a következő két szám:

$$\text{Mo.: } 120 \cdot 16 \cdot 35 \cdot 125 \cdot 39 \cdot 49 \text{ illetve } 500 \cdot 36 \cdot 98 \cdot 13 \cdot 28 \cdot 25$$

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7^2 \text{ illetve } 2^2 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 5^2$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13$$

Vagy: ugyanannyival osztogatom a két oldalt.

$$120 \cdot 16 \cdot 35 \cdot 125 \cdot 39 \cdot 49 \text{ illetve } 500 \cdot 36 \cdot 98 \cdot 13 \cdot 28 \cdot 25$$

$$12 \cdot 16 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 39 \cdot 49 \text{ illetve } 50 \cdot 36 \cdot 98 \cdot 13 \cdot 28$$

$$16 \cdot 35 \cdot 3 \text{ illetve } 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 28$$

$$2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Hány 0-ra végződik a következő szám: $K=2^{20} \cdot 5^{13}$. Miért?

Mo.: 13 db-ra, mert $K=(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 5) \cdot 2^7$

Ez pedig 13 db. $(2 \cdot 5)$ pár, ami 13 db. 10-es szorzó.

A 128-at szorzom 13 db. 10-essel, ami még 13 db. 0-t ad, vagyis 16 jegyű a szám.

* Hány 0-ra végződik a következő K szám: $K=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 25$. (Vagyis összeszoroztam 1-től 25-ig a természetes számokat). Miért?

Mo.: mivel 2-es prímtényező több van benne, mint 5-ös, ezért azt kell megszámolni, hogy hány db. 5-ös prímtényező van.

5-tel osztható az 5, 10...25: $25/5=5$, tehát 5 db.

De a 25-ben van még egy 5-ös tényező, ez a 6. Tehát 6 db. 0-ra végződik a szám.

4) Két szám LNKO-ja alapszinten

Találd meg a következő számpárok LNKO-ját:

$$(45;25)=5 \cdot (9;5)=5$$

$$(54;15)=3 \cdot (18;5)=3$$

$$(42;54)=6 \cdot (7;9)=6$$

$$(70;144)=2 \cdot (35;72)=2$$

Egyszerűsítsd a következő törteket:

$$\frac{50}{35} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{56}{21} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{24}{144} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{45}{108} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{77}{121} = \frac{7}{11}$$

$$\frac{63}{91} = \frac{9}{13}$$

$$\frac{1440}{120} = 12$$

Válaszd ki a következő számok közül a relatív prím-párokat. Minél többet:

144; 169; 44; 27; 10; 50. Írd föl őket párban. Pl.: $(10;27)=1$

$(144;169)=1$ $(169;44)=1$ $(169;27)=1$ $(169;10)=1$ $(169;50)=1$ $(44;27)=1$ $(27;10)=1$
 $(27;50)=1$

Egészítsd ki a hatjegyű szám két hiányzó jegyét úgy, hogy a legkisebb legyen és osztható legyen:

3-mal: 305526

11-gyel: 305536

6-tal: 305526

4-gyel: 305516

Írd föl az a legkisebb számot, amely ötjegyű, jegyei szorzata 0, és van benne 7-es, 6-os és 2-es számjegy! (a 007 az nem háromjegyű, mert akkor négyjegyű is: 0007)

Legkisebb: kezdődjék 2-vel, majd utána rögtön a 0 jöjjön kétszer: 20067

5) Újabb oszthatósági szabályok

Írd le a következő oszthatósági szabályokat:

6-tal való oszthatóság szabálya: Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, mert $2 \cdot 3 = 6$ és $(2;3)=1$ (relatív prím)

15-tel: Egy szám akkor és csak akkor osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel, mert $3 \cdot 5 = 15$ és $(3;5)=1$

42-vel: Egy szám akkor és csak akkor osztható 42-vel, ha osztható 6-tal és 7-tel, mert $6 \cdot 7 = 42$ és $(6;7)=1$

36-tal: Egy szám akkor és csak akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel, mert $4 \cdot 9 = 36$ és $(4;9)=1$ (relatív prím)

Egészítsd ki úgy, hogy igaz legyen az oszthatóság (a vonalakon 1-1 számjeggyel), és a szám a lehető legkisebb legyen (de ne 0-val kezdődjék)!

$$15 \overline{) 165}$$

$$45 \overline{) 8235}$$

$$22 \overline{) 8228}$$

$$24 \overline{) 81072}$$

$$12 \overline{) 123156}$$

6) A 0-ra végződés

Írd le, hogy mi a föltétele annak (a kanonikus alakot tekintve), hogy egy természetes szám pontosan 5 db. 0-ra végződjék:

Mo.: a kanonikus alakban a 2 és az 5 kitevői közül az egyik pontosan 5, a másik nem kisebb, mint 5.

Legalább 3 db. 0-ra végződjék: a kanonikus alakban a 2 és az 5 kitevőinek a minimuma 3.

Hány 0-ra végződik a következő két szám:

$$x = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13^2: \quad 4 \text{ db.}$$

$$y = 625 \cdot 45 \cdot 14 \cdot 36 \cdot 8: \quad \text{Az 5-ös és 2-es kitevőit figyelem:}$$

$$5^4; 5; 2; 2^2; 2^3: \quad \text{vagyis 5 db. 0-ra.}$$

7) Két természetes szám Legkisebb Közös Többszöröse – LKKT-je

$$[6;15] = 3 \cdot [2;5] = 30$$

$$[14;21] = 7 \cdot [2;3] = 42$$

$$[10;24] = 2 \cdot [5;12] = 120$$

$$[13;26] = 13 \cdot [1;2] = 26$$

Írd föl a következő két szám lnko-ját és lkkt-ét (a két szám egy szorzat alakban van), az eredmény is jó bármilyen szorzat alakban!

24·35 és 25·34:

51·72·37 és 15·34·111

Mo.: ne feledjük, hogy a két szomszédos szám mindig relatív prím!!!

Lnko: $(24·35 ; 25·34) = 10·(12·7 ; 5·17) = 10$

Lkkt: $[24·35 ; 25·34] = 10·(12·7 ; 5·17) = 10·12·7·5·17$

$(51·72·37 ; 15·34·111) = 2·9·17·37(3·4 ; 5) = 2·9·17·37$

$[51·72·37 ; 15·34·111] = 2·9·17·37·3·4·5$

Add meg a legkisebb közös többszöröst!

$[144; 400] = 4·[36; 100] = 4·4·[9; 25] = 16·9·25$ $[225; 120] = 15·[15; 8] = 15·15·8$

$$\frac{5}{18} - \frac{7}{45} = \frac{25}{90} - \frac{14}{90} = \frac{11}{90}$$

Ha egy családban van 9 gyerek, akkor mondhatjuk-e biztosan, hogy van olyan évszak (ősz, tél stb.), amelyben 3 gyerek is született? Miért

Mo.: Igen, mert ha max. 2 születik mindegyik a hónapban, az még csak 8 gyerek.

Legalább hány diák utazik a buszon, ha tudjuk, hogy biztos van négy diák, aki ugyanabban a hónapban született? Miért?

Mo.: Ha maximum három diák született egy hónapban, akkor az 36 gyerek, vagy kevesebb. Így ha már 37-en vannak, akkor nem lehet mindegyik hónapban 3 vagy kevesebb.

Van 6 db. doboz, és 22 db. golyó. Véletlenszerűen szétosztom őket a 6 dobozba. Mely állításokat mondhatja valaki biztosan az alábbiak közül? Írd mellé: Igaz, Hamis

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legalább 1 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legalább 3 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legalább 4 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legalább 5 db. golyó van. Hamis

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legalább 6 db. golyó van. Hamis

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legfeljebb 20 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legfeljebb 11 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legfeljebb 4 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legfeljebb 3 db. golyó van. Igaz

Biztos lesz olyan doboz, amelyben legfeljebb 2 db. golyó van. Hamis

Legalább 1 dobozban legalább 3 golyó lesz. Igaz

Legalább 2 dobozban legalább 3 golyó lesz. Hamis

Legalább 1 dobozban legalább 4 golyó lesz. Igaz

Legalább 2 dobozban legalább 4 golyó lesz. Hamis

8) Fejben osztás gyakorlása

Fejben számold ki a végeredményt:

$145:5=29$

$54:3=18$

$96:8=12$

$98:7=14$

$156:3=52$

$48:3=16$

$810:9=90$

$76:4=19$

$192:2=96$

$168:7=24$ (1 hét 168 óra)

$286:13=22$

$192:12=16$

Bontsd fel a következő számokat mennél több osztópárra: pl: $36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6$

$60=1\cdot 60=2\cdot 30=3\cdot 20=4\cdot 15=5\cdot 12=6\cdot 10$

$120=1\cdot 120=2\cdot 60=3\cdot 40=4\cdot 30=5\cdot 24=6\cdot 20=8\cdot 15=10\cdot 12$

$98=1\cdot 98=2\cdot 49=7\cdot 14$

$140=1\cdot 140=2\cdot 70=4\cdot 35=5\cdot 28=7\cdot 20=10\cdot 14$

$242=1\cdot 242=2\cdot 121=11\cdot 22$

$243=1\cdot 243=3\cdot 81=9\cdot 27$

$51=1\cdot 51=3\cdot 17$

$91=1\cdot 91=7\cdot 13$

$105=1\cdot 105=3\cdot 35=5\cdot 21=7\cdot 15$

$72=1\cdot 72=2\cdot 36=3\cdot 24=4\cdot 18=6\cdot 12=8\cdot 9$

Egészítsd ki még egy számjeggyel – a vonalra – úgy, hogy az osztás egész számot eredményezzen, majd végezd is el fejben az osztást:

$924:22=42$

$252:36=7$

$408:24=17$

$396:33=12$

$468:18=26$

$324:36=9$

$225:45=5$

$165:15=11$

$528:24=22$

Végezd el – vagy írd föl, hogy minek hányadik hatványa!

$12\cdot 17=204$

$18\cdot 12=216$

$19\cdot 15=285$

$13^2=169$

$19^2=361$

$145^2=21025$

$3^5=243$

$4^5=1024$

$5^3=125$

$16=2^4=4^2$

$729=3^6=9^3$

$64=2^6=4^3=8^2$

$343=7^3$

$289=17^2$

$196=14^2$

Írd le a két leggonoszabb kétjegyűt és írd melléjük a szorzattá-alakításukat!

Főgonosz: $91=7\cdot 13$ és az algonosz: $51=3\cdot 17$

Számold ki!

$(96;120)=6\cdot(16;20)=6\cdot 4\cdot(4;5)=24$

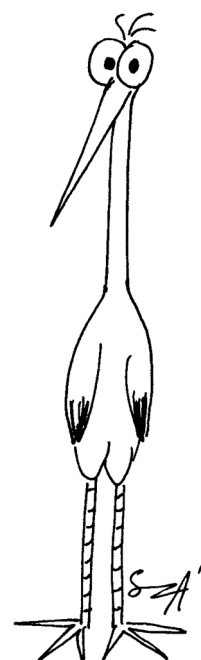
$[96;120]=6\cdot 4\cdot 4\cdot 5=480$

$(98;70)=7\cdot(14;10)=14\cdot(7;5)=14$

$[98;70]=14\cdot 7\cdot 5=490$

$(153;408)=3\cdot(51;136)=3\cdot 17\cdot(3;8)=51$

$[153;408]=3\cdot 17\cdot 3\cdot 8$



V) Törtek

1) Fajták

Először nézd meg a füzetet, majd becsukása után írd föl:

$$2 \text{ db. „áltörtet”}: \frac{15}{8}; \frac{20}{3}$$

$$2 \text{ db. vegyes törtet}: 2\frac{3}{5}; 1\frac{4}{7}$$

$$2 \text{ db. tizedes törtet}: 3,14159; 0,125$$

$$2 \text{ db. valódi törtet}: \frac{5}{7}; \frac{19}{100}$$

Írd ide a közösleges törték fajtaít:

2) Egymásba alakításuk - később

3) Egyszerűsítés

Egyszerűsítsd – gondolkodva, ne kis lépésekben!

$$\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{42}{168} = \frac{21}{84} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{28}{84} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{51}{85} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{72}{48} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{108}{144} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{242}{110} = \frac{121}{55} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{52}{130} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{54}{243} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{48}{128} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1200}{2000} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1500}{6250} = \frac{150}{625} = \frac{30}{125} = \frac{6}{25}$$

Írd fel közösleges tört alakban a következőket:

$$2,24 = 2\frac{24}{100} = 2\frac{6}{25}$$

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$0,016 = \frac{16}{1000} = \frac{2}{125}$$

4) Törtek összeadása-kivonása: KÖZÖS NEVEZŐRE HOZÁS BŐVÍTÉSSEL.

a) Bővítsd a következő törtéket:

$$5\text{-tel: } \frac{14}{15} = \frac{70}{75}$$

$$6\text{-tal: } \frac{24}{33} = \frac{144}{198}$$

$$3\text{-mal: } \frac{17}{19} = \frac{51}{57}$$

b) Bővítés (egészítsd ki, hogy egyenlő legyen a kettő tört)

$$\frac{3}{17} = \frac{9}{51}$$

$$\frac{8}{15} = \frac{40}{75}$$

$$\frac{11}{42} = \frac{55}{210}$$

$$\frac{14}{15} = \frac{98}{105}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{66}{154}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{576}{512}$$

c) Alakítsd valódi törtté

$$3\frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{25}{7}$$

$$-2\frac{14}{35} = -2\frac{2}{5} = -\left(2\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

$$d) \frac{21}{98} - 3 = \frac{3}{14} - 3 = \frac{3 - 42}{14} = -\frac{39}{14}$$

$$1 - 6\frac{51}{85} = 1 - \left(6\frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{33}{5}\right) = \frac{5 - 33}{5} = -\frac{28}{5}$$

e) Figyelem: mind a műveletek elvégzése előtt és utána is: egyszerűsíts!

Ha nem egyszerűsítesz, odaát sütögetni fognak – itt egyszerűn csak magaddal szúrsz ki...



$$\frac{15}{20} + \frac{35}{42} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\frac{56}{64} + \frac{26}{24} = \frac{7}{8} + \frac{13}{12} = \frac{21 + 26}{24} = \frac{47}{24}$$

$$\frac{36}{15} + \frac{16}{60} = \frac{36}{15} + \frac{4}{15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{21}{12} + \frac{55}{88} = \frac{7}{4} + \frac{5}{8} = \frac{14}{8} + \frac{5}{8} = \frac{19}{8}$$

$$\frac{12}{28} - \frac{120}{126} = \frac{3}{7} - \frac{20}{21} = \frac{9 - 20}{21} = -\frac{11}{21}$$

$$\frac{28}{35} + \frac{48}{75} = \frac{4}{5} + \frac{16}{25} = \frac{36}{25}$$

$$\frac{26}{91} - \frac{102}{51} = \frac{2}{7} - 2 = \frac{2 - 14}{7} = -\frac{12}{7}$$

$$\frac{20}{64} + \frac{9}{84} = \frac{5}{16} + \frac{3}{28} = \frac{35}{112} + \frac{12}{112} = \frac{47}{112}$$

$$\frac{104}{169} + \frac{99}{121} = \frac{8}{13} + \frac{9}{11} = \frac{88 + 117}{143} = \frac{205}{143}$$

$$\frac{5}{8} - 3 = \frac{5}{8} - \frac{24}{8} = -\frac{19}{8}$$

$$\frac{216}{360} - \frac{225}{105} = \frac{6}{10} - \frac{15}{7} = \frac{3}{5} - \frac{15}{7} = \frac{21}{35} - \frac{75}{35} = -\frac{54}{35}$$

$$1 - \frac{13}{7} = \frac{7 - 13}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$\frac{256}{160} - \frac{120}{225} = \frac{16}{10} - \frac{8}{15} = \frac{8}{5} - \frac{8}{15} = \frac{24 - 8}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\frac{24}{36} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$$

f) További gyakorlás

$$2\frac{242}{33} - 3\frac{6}{75} = 2\frac{22}{3} - 3\frac{2}{25} = \frac{28}{3} - \frac{77}{25} = \frac{700}{75} - \frac{241}{75} = \frac{459}{75} = 6\frac{19}{75}$$

Ezt az előbbi vegyestört fajtát majd lehet egy kicsit ravaszabban, de csak ha megnőttél...

$$\frac{135}{108} + \frac{144}{72} = \frac{5}{4} + 2 = \frac{5}{4} + \frac{8}{4} = \frac{13}{4}$$

$$2\frac{35}{98} + 1\frac{56}{35} = 3 + \frac{5}{14} + \frac{8}{5} = 3 + \frac{25+112}{70} = 3 + \frac{137}{70} = 4\frac{67}{70}$$

Az előbbi összeadásnál szabad így (2+1=3), de kivonásnál ezt a módszert most még meg se próbáld! Csakis közösleges-törtté alakítással tedd!!!

$$\frac{65}{169} - \frac{289}{68} = \frac{5}{13} - \frac{17}{4} = \frac{20-221}{52} = -\frac{201}{52}$$

$$\frac{225}{15} - \frac{324}{90} = 15 - \frac{18}{5} = \frac{75-18}{5} = \frac{57}{5}$$

$$1\frac{2}{6} + \frac{42}{5} = \frac{4}{3} + \frac{42}{5} = \frac{20+126}{15} = \frac{146}{15} = 9\frac{11}{15}$$

Emlékezz! Aki nem egyszerűsít, azt majd a gyehennában leegyszerűsítik...

$$\frac{630}{90} - \frac{126}{112} = 7 - \frac{63}{56} = 7 - \frac{9}{8} = \frac{56-9}{8} = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}$$

$$\frac{125}{150} - \frac{242}{55} = \frac{5}{6} - \frac{22}{5} = \frac{25-132}{30} = -\frac{107}{30}$$

$$1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{5}{6} = 6 + \frac{8+9+10}{12} = 6 + \frac{27}{12} = 8\frac{1}{4}$$

$$3\frac{4}{5} - 2\frac{2}{10} = (3-2) + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) = 1\frac{3}{5} \quad \text{Vigyázz, ez így veszélyes, ha nem megy, alakítsd}$$

közöslegest törtté, ahogy a következő készül!

$$2\frac{35}{40} - 3\frac{10}{24} = 2\frac{7}{8} - 3\frac{5}{12} = \frac{23}{8} - \frac{41}{12} = \frac{69-82}{24} = -\frac{13}{24}$$

$$\frac{10}{12} + \frac{33}{22} = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{14}{15} - \frac{15}{16} = \frac{224-225}{240} = -\frac{1}{240} \quad (\text{Ne feledd, a szomszédos számok relatív prímek!})$$

$$\frac{10}{17} - \frac{10}{16} = \frac{10}{17} - \frac{5}{8} = \frac{80-85}{136} = -\frac{5}{136}$$

$$\frac{26}{56} + \frac{24}{70} + \frac{6}{8} + \frac{3}{35} = \frac{13}{28} + \frac{12}{35} + \frac{3}{4} + \frac{3}{35} = \frac{65+48+105+12}{140} = \frac{230}{140} = \frac{23}{14}$$

$$\frac{14}{36} + \frac{3}{42} + \frac{11}{18} + \frac{6}{14} = \frac{7}{18} + \frac{1}{14} + \frac{11}{18} + \frac{6}{14} = \frac{49+9+77+54}{126} = \frac{189}{126} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{51}{34} - \frac{26}{72} + \frac{15}{54} - \frac{56}{63} = \frac{3}{2} - \frac{13}{36} + \frac{5}{18} - \frac{8}{9} = \frac{54-13+10-32}{36} = \frac{19}{36}$$



5) Számok, törtek reciproka

Írd föl a következő számok reciprokát:

$$\frac{1}{20} \leftrightarrow 20$$

$$-\frac{4}{6} \leftrightarrow -\frac{3}{2}$$

$$2\frac{4}{3} \leftrightarrow \frac{3}{10}$$

$$8 \leftrightarrow \frac{1}{8}$$

Minek a reciproka a $\frac{2}{13}$? A $\frac{13}{2}$ -nek

Írd föl 24 reciprokát: $24 \leftrightarrow \frac{1}{24}$

Minek a reciproka a $23 \leftrightarrow \frac{1}{23}$

Egy szám megegyezik a reciprokával. Mi lehet ez? (Vigyázz, kettő ilyen van!)

Mo.: Az 1 és a -1 . (Véletlenül sem a 0! Mert 0-val nem osztunk!)

Mennyit kapok, ha egy számot megszorozom a reciprokával?

Mo.: 1-et

Melyik számnak nincs reciproka és miért?

Mo.: A 0-nak. Mert 0-val nem osztunk!

6) Törtek szorzása

a) Figyelem! Vegyestört! Ellenség! Át kell alakítani...

$$2\frac{4}{13} \cdot 2\frac{3}{18} = \frac{30}{13} \cdot \frac{39}{18} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{3} = 5$$

b) Figyelem! A műveletek elvégzése előtt és utána is: egyszerűsíts – lefele is – keresztbe is! Egyszerűsíts! Különben odaát sütögetni fognak – ideát egyszerűen csak magaddal szúrsz ki...

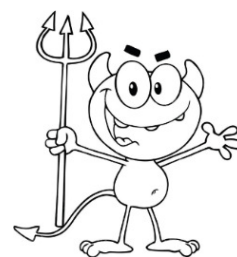
$$\frac{48}{110} \cdot \frac{33}{54} = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{63}{120} \cdot \frac{28}{27} = \frac{7}{30} \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{90}$$

$$\frac{23}{29} \cdot \frac{29}{23} = 1$$

$$\frac{21}{15} \cdot \frac{26}{8} = \frac{7}{5} \cdot \frac{13}{4} = \frac{91}{20}$$

$$\frac{35}{45} \cdot \frac{27}{21} = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{7} = 1$$



c) Ne feledd: aki nem egyszerűsít...

$$\frac{90}{98} \cdot \frac{63}{81} = \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{9} = \frac{5}{7}$$

$$\left(1\frac{6}{9}\right) \cdot \left(2\frac{15}{21}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{19}{7} = \frac{95}{21} = 4\frac{11}{21}$$

$$\left(3\frac{2}{14}\right) \cdot \left(1\frac{6}{22}\right) = \frac{22}{7} \cdot \frac{28}{22} = 4$$

$$\left(2\frac{5}{15}\right) \cdot \left(\frac{16}{70}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{35} = \frac{8}{15} \quad \frac{50}{13} \cdot \frac{13}{25} = 2$$

$$\left(2\frac{121}{363}\right) \cdot \left(1\frac{85}{119}\right) = \left(2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1\frac{5}{7}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{12}{7} = 4$$

A 0 mondókája: A 0-t oszthatjuk, de 0-val nem osztunk és 0^0 nincs értelmezve.

$$\frac{56}{42} \cdot \frac{63}{40} = \frac{8}{6} \cdot \frac{9 \cdot 7}{8 \cdot 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{90}{288} \cdot \left(-\frac{36}{75}\right) = -\frac{90}{2 \cdot 144} \cdot \frac{36}{75} = -\frac{18}{2 \cdot 12} \cdot \frac{3}{15} = -\frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{3}{20}$$

$$-\frac{48}{243} \cdot \left(-\frac{162}{240}\right) = +\frac{16}{81} \cdot \frac{81}{120} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{338}{102} \cdot \frac{289}{65} = \frac{169}{51} \cdot \frac{17 \cdot 17}{13 \cdot 5} = \frac{13}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{221}{15}$$

d) Szorzás egész számmal

$$\frac{14}{15} \cdot 3 = \frac{14}{5}$$

$$\frac{3}{289} \cdot 34 = \frac{3}{17} \cdot 2 = \frac{6}{17}$$

$$\frac{17}{18} \cdot (-54) = -\frac{17}{1} \cdot 3 = -51$$

$$\frac{200}{150} \cdot 15 = \frac{20}{15} \cdot 15 = 20$$

$$8 \cdot \frac{35}{84} = 2 \cdot \frac{35}{21} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$30 \cdot \frac{4}{6} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$-80 \cdot \frac{1}{48} = -10 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$100 \cdot \frac{10}{200} = 5$$



e) Gyakorlás



$$\frac{75}{175} - \frac{15}{42} = \frac{3}{7} - \frac{5}{14} = \frac{6-5}{14} = \frac{1}{14}$$

$$\frac{1500}{70} \cdot \frac{63}{42} = \frac{150}{7} \cdot \frac{9}{6} = \frac{150}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{225}{7}$$

$$\frac{55}{56} \cdot \frac{42}{121} = \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{44}$$

$$\frac{51}{34} + \frac{72}{45} = \frac{3}{2} + \frac{8}{5} = \frac{15+16}{10} = \frac{31}{10}$$

$$\frac{24}{63} - \frac{6}{28} = \frac{24}{63} - \frac{3}{14} = \frac{24}{9 \cdot 7} - \frac{3}{2 \cdot 7} = \frac{48}{2 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{27}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{21}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{15}{21} \cdot \frac{242}{150} \cdot \frac{81}{48} \cdot \frac{50}{33} = \frac{1}{21} \cdot \frac{22}{1} \cdot \frac{81}{48} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{21} \cdot \frac{11}{1} \cdot \frac{27}{24} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1}{7} \cdot \frac{11}{1} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1}{7} \cdot \frac{11}{1} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{1} = \frac{165}{56}$$

$$14 \cdot \frac{33}{42} = 2 \cdot \frac{33}{6} = 11$$

$$\frac{98}{343} \cdot 35 = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} \cdot 35 = 10$$

$$\frac{169}{50} \cdot \left(-\frac{75}{39}\right) = -\frac{13}{2} \cdot \frac{3}{3} = -\frac{13}{2}$$

$$\frac{12500}{56} \cdot \left(-\frac{35}{2500}\right) = -\frac{125}{8} \cdot \frac{5}{25} = -\frac{25}{8}$$

$$\frac{63}{112} \cdot 8 = \frac{9}{16} \cdot 8 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{121}{34} \cdot \frac{91}{55} = \frac{11}{2 \cdot 17} \cdot \frac{13 \cdot 7}{5} = \frac{7 \cdot 11 \cdot 13}{170} = \frac{1001}{170}$$

Érdeemes emlékezni: 1001 éjszaka meséi:

$$7 \cdot 11 \cdot 170$$

$$7 \text{ nap: } 7 \cdot 24 = 168 \text{ óra}$$

$$\frac{27}{65} \cdot \frac{48}{125} \cdot \frac{39}{54} \cdot \frac{50}{54} = \frac{1}{5} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{54} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{75}$$

7) Osztás

a) Törtek osztása

$$\frac{1}{7} : \frac{1}{8} = \frac{1}{7} \cdot \frac{8}{1} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{10}{12} : \frac{21}{15} = \frac{10}{12} \cdot \frac{15}{21} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{42}$$

$$\frac{42}{110} : \frac{7}{33} = \frac{42}{110} \cdot \frac{33}{7} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{7}{3} : \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1$$

$$\frac{28}{35} : \frac{12}{18} = \frac{28}{35} \cdot \frac{18}{12} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{15}{35} : \frac{18}{84} = \frac{3}{7} \cdot \frac{84}{18} = \frac{1}{1} \cdot \frac{12}{6} = 2$$

Amivel osztok, annak a reciprokával szorzok!

$$\frac{121}{26} : \frac{22}{39} = \frac{121}{26} \cdot \frac{39}{22} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{33}{4}$$

$$\frac{125}{98} : \frac{50}{56} = \frac{125}{98} \cdot \frac{56}{50} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{2} = \frac{10}{7}$$

b) Egész osztva törttel v. tört osztva egészszel

$$12 : \frac{3}{5} = 12 \cdot \frac{5}{3} = 20$$

$$\frac{14}{35} : 4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{60}{49} : \frac{6}{49} = \frac{60}{49} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{49}$$

$$\frac{100}{3} : 10 = \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{10}{3}$$

$$91 : \frac{13}{2} = 91 \cdot \frac{2}{13} = 14$$

$$\frac{2}{14} : \frac{35}{35} = 2 \cdot \frac{35}{14} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\frac{75}{21} : 50 = \frac{75}{21} \cdot \frac{1}{50} = \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$

$$18 : \frac{9}{2} = 18 \cdot \frac{2}{9} = 4$$

8) Reciprok

(Nézd meg a füzetben!) Írd föl a reciprokaikat:

$$7 \leftrightarrow \frac{1}{7}$$

$$2 \frac{4}{10} \leftrightarrow \frac{5}{12}$$

$$-\frac{2}{5} \leftrightarrow -\frac{5}{2}$$

$$-8 \leftrightarrow -\frac{1}{8}$$



Mely pozitív számok kisebbek a reciproknál?

Mo.: az egynél kisebbek. (vagyis a 0 és egy közöttiek. Pl.: $\frac{3}{5}$)

Mely negatív számok *nagyobbak* a reciproknál?

Mo.: a -1 -nél nagyobbak. (Vagyis a -1 és 0 közöttiek. Pl.: $-\frac{3}{5}$)

Fejezd be: Ha egy számot és a reciprokát összeszorozzuk, akkor... mindig 1-et kapunk.

9) Gyakorlásuk

(Tudod, aki nem egyszerűsít – lásd ábra...)

a) Osztás

$$-\frac{42}{56} : \left(1 \frac{12}{63}\right) = -\frac{6}{8} \cdot \frac{63}{75} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{63}{25} = -\frac{63}{100}$$

$$\frac{121}{60} : \frac{42}{55} = \frac{121}{60} \cdot \frac{55}{42} = \frac{11}{10} \cdot \frac{7}{5} = \frac{77}{50}$$

$$\frac{48}{49} : \frac{64}{35} = \frac{48}{49} \cdot \frac{35}{64} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{225}{26} : \frac{30}{52} = \frac{225}{26} \cdot \frac{52}{30} = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{2} = 15$$

$$\frac{77}{98} : \frac{66}{84} = \frac{77}{98} \cdot \frac{84}{66} = \frac{7}{14} \cdot \frac{12}{6} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\frac{16}{242} : \frac{76}{55} = \frac{16}{242} \cdot \frac{55}{76} = \frac{4}{22} \cdot \frac{5}{19} = \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{19} = \frac{10}{209}$$

$$\frac{338}{75} : \left(-\frac{52}{75}\right) = -\frac{338}{75} \cdot \frac{75}{52} = -\frac{169}{26} = -\frac{13}{2}$$

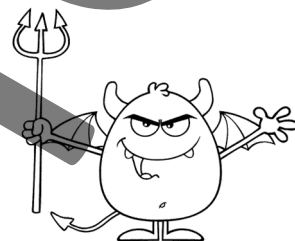
$$\frac{340}{147} : \frac{51}{105} = \frac{340}{147} \cdot \frac{105}{51} = \frac{20 \cdot 17}{3 \cdot 49} \cdot \frac{3 \cdot 35}{3 \cdot 17} = \frac{20}{3 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 5}{3} = \frac{100}{21}$$

$$25 : \frac{35}{14} = 25 \cdot \frac{14}{35} = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10$$

$$\frac{35}{14} : 25 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ (fujj, tizedestört)}$$

$$\frac{56}{55} : \frac{42}{121} = \frac{56}{55} \cdot \frac{121}{42} = \frac{8}{5} \cdot \frac{11}{6} = \frac{44}{15}$$

$$\frac{48}{90} : \frac{56}{75} = \frac{48}{90} \cdot \frac{75}{56} = \frac{24}{45} \cdot \frac{75}{56} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$$



b) Vegyesen – 2024-09-23



$$\frac{1200}{196} = \frac{1200}{196} \cdot \frac{84}{120} = \frac{10}{14} \cdot \frac{6}{1} = \frac{30}{7}$$

$$\frac{72}{48} = \frac{8}{7} \cdot \frac{35}{48} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{16900}{1300} = \frac{16900}{144} \cdot \frac{60}{1300} = \frac{169}{12} \cdot \frac{5}{13} = \frac{13}{12} \cdot \frac{5}{1} = \frac{65}{12}$$

$$\frac{126}{54} : 9 = \frac{63}{27} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

$$\frac{63}{14} : 27 = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{15}{35} = 15 \cdot \frac{42}{35} = 3 \cdot \frac{42}{7} = 18$$

$$\frac{75}{45} = 75 \cdot \frac{24}{45} = 5 \cdot \frac{24}{3} = 40$$

$$\frac{30}{7} = \frac{30}{7} \cdot \frac{1}{180} = \frac{1}{42}$$

$$40 : \frac{72}{27} = 40 \cdot \frac{27}{72} = 40 \cdot \frac{3}{8} = 15$$

$$14 : \frac{35}{10} = 14 \cdot \frac{10}{35} = 4$$

$$\frac{289}{34} = \frac{289}{21} \cdot \frac{1}{34} = \frac{17}{42}$$

$$40 : \frac{40}{63} = 40 \cdot \frac{63}{40} = 63$$

$$\frac{210}{105} = \frac{210}{18} \cdot \frac{1}{105} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$28 : \frac{7}{2} = 28 \cdot \frac{2}{7} = 8$$

$$10 : \frac{26}{169} = 10 \cdot \frac{169}{26} = 10 \cdot \frac{13}{2} = 65$$

10) Fejezd be a mondatot: „Aki nem egyszerűsít,

a) Először a zárójelben található végessük el mindig!

$$\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) : 6 = \frac{7}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$



$$\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) : \frac{15}{2} = \left(\frac{6}{4} + \frac{9}{4}\right) : \frac{15}{2} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{6}\right) : \frac{20}{21} = \left(\frac{24}{42} - \frac{28}{42}\right) : \frac{20}{21} = -\frac{2}{42} \cdot \frac{21}{20} = -\frac{1}{10}$$

$$\left(\frac{32}{35} + \frac{10}{56}\right) : \frac{36}{35} = \left(\frac{32}{35} + \frac{5}{28}\right) : \frac{36}{35} = \left(\frac{128}{140} + \frac{25}{140}\right) : \frac{36}{35} = \frac{153}{140} \cdot \frac{35}{36} = \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{16}$$

$$\left(\frac{54}{63} - \frac{51}{68}\right) : \frac{15}{70} = \left(\frac{6}{7} - \frac{3}{4}\right) : \frac{15}{70} = \left(\frac{24}{28} - \frac{21}{28}\right) : \frac{15}{70} = \frac{3}{28} \cdot \frac{70}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{5}{9} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{71}{90} - \frac{6}{15}\right) = \left(\frac{20-27}{36}\right) : \left(\frac{71}{90} - \frac{36}{90}\right) = -\frac{7}{36} \cdot \frac{90}{35} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{243}{121}\right) \cdot \left(-\frac{125}{54}\right) \cdot \left(-\frac{242}{85}\right) \cdot \left(-\frac{289}{225}\right) = -\frac{9}{1} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{45} = -\frac{1}{1} \cdot \frac{25}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{17}{5} = -17$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\left(4 - \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{15}{34} + \frac{2}{3} \right) \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \right) \cdot 15 = \left(\left(\left(\frac{17}{5} \cdot \frac{15}{34} + \frac{2}{3} \right) \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \right) \cdot 15 = \left(\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \right) \cdot 15 = \\ & = \left(\frac{13}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \right) \cdot 15 = \left(\frac{13}{10} + \frac{5}{6} \right) \cdot 15 = \frac{64}{30} \cdot 15 = 32 \end{aligned}$$

Egy lépésnél több dolgot is tegyél meg:

$$\frac{\frac{9}{15} + \frac{26}{140}}{4 - \frac{6}{7}} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{13}{70}}{\frac{22}{7}} = \frac{55}{70} \cdot \frac{7}{22} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{38}{4 - \frac{5}{8}}}{2 + \frac{8}{9}} = \frac{\frac{38}{2 + \frac{27}{8}} \cdot \frac{1}{9}}{2 + \frac{3}{8}} = \frac{38}{19} = 38 \cdot \frac{8}{19} = 16$$

$$\frac{5 - \frac{5}{7}}{2 - \frac{5}{28}} = \frac{30}{7} \cdot \frac{28}{51} = \frac{10}{1} \cdot \frac{4}{17} = \frac{40}{17}$$

b) Tedd ki a relációjelet!

$$\frac{18}{7} \boxed{>} \frac{32}{13}$$

⇕

$$\frac{234}{91} > \frac{224}{91}$$

$$-\frac{27}{8} \boxed{>} -\frac{40}{11}$$

⇕

$$-\frac{297}{88} > -\frac{320}{88}$$

Egy dobozban van valamennyi golyó. Kiveszem a négy-hetedét, és maradt benne 69 golyó. Mennyi volt benne eredetileg?

Mo.: a $\frac{3}{7}$ -e maradt benne. Akkor az $\frac{1}{7}$ mennyiség $69/3=23$, a teljes mennyiség 161.

VI) Tizedes törtek

1) Szorzás-osztás 10 hatványaival

$$0,7 \cdot 10 = 7$$

$$0,7 \cdot 100 = 70$$

$$0,7 \cdot 10\,000 = 7\,000$$

$$0,7 \cdot 1\,000\,000 = 700\,000$$

$$0,015 \cdot 10 = 0,15$$

$$0,015 \cdot 100 = 1,5$$

$$0,015 \cdot 10\,000 = 150$$

$$0,015 \cdot 1\,000\,000 = 15\,000$$

$$-20,036 \cdot 10 = -200,36$$

$$-20,036 \cdot 100 = -2003,6$$

$$-20,036 \cdot 10\,000 = -200\,360$$

$$-20,036 \cdot 1\,000\,000 = -20\,036\,000$$

$$-35,02 \cdot 10 = -350,2$$

$$0,004\,3 \cdot 100 = 0,43$$

$$-10,000\,36 \cdot 10\,000 = -100\,003,6$$

$$0,000\,003\,6 \cdot 1\,000\,000 = 3,6$$

$$0,000\,013\,01 \cdot 100\,000 = 1,301$$

$$123,4 : 10 = 12,34$$

$$123,4 : 100 = 1,234$$

$$-123,4 : 1\,000 = -0,123\,4$$

$$-123,4 : 10\,000 = -0,012\,34$$

$$123,4 : 100\,000 = 0,001\,234$$

$$123,4 : 1\,000\,000 = 0,000\,123\,4$$

$$0,25 : 10 = 0,025$$

$$-0,25 : 100 = -0,0025$$

$$0,25 : 1\,000 = 0,000\,25$$

$$0,0092 : 10\,000 = 0,000\,000\,92$$

$$-0,000\,092 : 100\,000 = -0,000\,000\,000\,92$$

$$-0,01 : 1\,000 = -0,000\,01$$

2) Mit is jelentenek a tizedes törtek?

a) Számok alaki-, helyi- és valódi értéke

Írd följük a helyiértékeket, majd írd föl a számot a valódi értékek összegeként:

$$3\ 2\ 0\ 6\ 7 = \overset{10000}{3}\ \overset{1000}{2}\ \overset{100}{0}\ \overset{10}{6}\ \overset{1}{7} = 3 \cdot 10\ 000 + 2 \cdot 1\ 000 + 0 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

$$1\ 2\ 0\ 0\ 5\ 1 = \overset{100\ 000}{1}\ \overset{10^4}{2}\ \overset{10^3}{0}\ \overset{100}{0}\ \overset{10}{5}\ \overset{10^0}{1} = 1 \cdot 100\ 000 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

$$7\ 4\ 3\ 1\ 0\ 8 = \overset{10^5}{7}\ \overset{10^4}{4}\ \overset{10^3}{3}\ \overset{10^2}{1}\ \overset{10}{0}\ \overset{1}{8} = 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

Rakd ki a reláció jelet: (< > =)

$$-12 \cdot 15 > -13 \cdot 14$$

$$\frac{197}{11} < \frac{197}{12}$$

Számold ki:

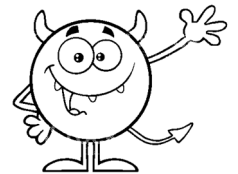
$$28,002 \cdot 100 = 2\ 800,2$$

$$-4,3 : 100 = -0,043$$

$$0,000\ 36 \cdot 100 = 0,36$$

Emlékezz a kisördögre!

$$\left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdot \left(\frac{7}{14} + \frac{8}{5}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \frac{21}{10} = -\frac{7}{2}$$



$$\frac{21}{10} : \frac{14}{15} = \frac{21}{10} \cdot \frac{15}{14} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{63}{42} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{8}{21} + \frac{8}{14}\right) = \left(\frac{9-4}{6}\right) : \left(\frac{16+24}{42}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{42}{40} = \frac{7}{8}$$

Írd föl a számot valódi értékek összegeként!

$$1\ 230 = 1 \cdot 1000 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 1$$

$$13\ 401 = 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 1\ 000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

b) Mi bújik meg a tizedesvessző mögött?

Írd följük a helyiértékeket, majd írd föl a számot a valódi értékek összegeként:

$$1\ 907,106 = \overset{1000}{1}\ \overset{100}{9}\ \overset{10}{0}\ \overset{1}{7}\ \overset{0,1}{1}\ \overset{100}{0}\ \overset{10^{-3}}{6} = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 0,1 + 0 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$$5\ 06,0409 = 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6 \cdot 10^0 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 0,001 + 9 \cdot 10^{-4}$$

c) Írd föl tizedestörttel a számot:

$$7 + 2 \cdot \frac{1}{10000} + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 0,01 + 5 \cdot 100 = 8\,507,030\,2$$

$$3 \cdot 10^1 + 4 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot 0,1 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10^3 = 7\,530,204$$

3) Műveletek valódi törtté alakítás nélkül

a) Összehasonlítás

Tedd növekvő sorrendbe: $-1,06; 0,25; 2; -0,75; 1,2; 1,08; -0,4; -1,2; 0,03; * 1,9$
 $-1,2; -1,06; -0,75; -0,4; 0,03; 0,25; 1,08; 1,2; 2 = 1,9 = 2$

Tedd ki a relációjelet !

$$301 < 301,01$$

$$0,006 > 0,000\,9$$

$$0,002\,1 < 0,002\,101$$

$$12,405 < 12,4051$$

$$-5,01 < -5$$

$$-0,000\,76 < -0,000\,076$$

$$-0,021 > -0,021\,01$$

$$-10,030\,2 > -10,030\,21$$

Tedd növekvő sorrendbe:

$$2,25; \frac{5}{2}; 2\frac{1}{3}; \frac{33}{15} \rightarrow \frac{33}{15} < 2,25 < 2\frac{1}{3} < \frac{5}{2}$$

Tedd növekvő sorrendbe:

$$-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}; -1; -1\frac{1}{3}; 0; -0,009$$

$$-\frac{7}{5} < -1\frac{1}{3} < -1 < -\frac{4}{5} < -\frac{3}{5} < -0,009 < 0$$

Tedd növekvő sorrendbe:

$$-0,01; -3; -3,01; -0,02; -0,15; -0,015; -0,021$$

$$-3,01 < -3 < -0,15 < -0,021 < -0,02 < -0,015 < -0,01$$

b) Összeg, különbség

Végezd el az alábbi műveleteket! (Nézd meg az órai anyagot...)

$$\begin{array}{r} 24,5 \\ 5,93 \\ + 0,89 \\ \hline 31,32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,049 \\ 94,753 \\ + 0,908 \\ \hline 100,710 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,999 \\ 99,099 \\ + 0,999 \\ \hline 110,097 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4,9368 \\ 93,0997 \\ 82,9889 \\ + 0,9996 \\ \hline 182,0250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,53 \\ - 0,45 \\ \hline 0,08 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101,605 \\ -100,645 \\ \hline 0,96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,000 \\ - 3,937 \\ \hline 1,063 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24,5 \\ - 5,93 \\ \hline 18,57 \end{array}$$

Először nézd meg az órai anyagot, majd végezd el a műveletet!

$$8,012 - 13,348 = -(13,348 - 8,012) = -5,336$$

$$2,053 - 19,279 = -(19,279 - 2,053) = -17,226$$

c) Szorzás, osztás – végezd el a következő műveleteket

$$18 \cdot 97 =$$

$$37 \cdot 28 =$$

$$73 \cdot 807 =$$

$$297 \cdot 307 =$$

AZ OSZTÁSNÁL HA ELŐSZÖR ÁTÍROD TÖRT ALAKBA, LEHET, HOGY TUDSZ EGYSZERŰSÍTENI. KÉSŐBB MÁR ÁT SE KELL ÍRD, CSAK EGYSZERŰSÍTS ELŐSZÖR:

$$45:24 = \frac{45}{24} = \frac{15}{8} = 15:8 = 1,875$$

$$26:14 = 13:7 = 1,85714\dot{2}$$

$$76:36 = 19:9 = 2,1\dot{1}$$

$$380:18 = 190:9 = 21,1\dot{1}$$



$$455:35=91:7=13$$

$$169:78=13:6=2,1\dot{6}$$

$$4,5 \cdot 4,5=45 \cdot 45/100=2025/100=20,25$$

$$3,15:4,5=315:450=63:90=7:10=0,7$$

$$748:77=68:7=9,71428\dot{5}$$

$$45:0,27=4500:27=500:3=166,6\dot{6}$$

Rakd ki a relációjelet (<, >, =) a párok közé!

$$-0,12 > -0,123$$

$$-4,2 = -\frac{21}{5}$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{13}{25} = \frac{26}{50}$$

$$\frac{3}{7} \boxed{>} \frac{21}{50}$$

⇕

$$\frac{21}{49} > \frac{21}{50}$$

$$\frac{71}{119} > \frac{71}{118}$$

$$-2,19 < -2,109$$

$$-0,099 < -0,09$$

4) Átalakítás valódi törtté

a) Véges (szakaszos) tizedes törtek

Álakítsd át közösleges törtté, majd egyszerűsíts!

$$0,54 = \frac{54}{100} = \frac{27}{50}$$

$$2,25 = 2\frac{25}{100} = 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$-1,32 = -1\frac{32}{100} = -1\frac{8}{25} = -\frac{33}{25}$$

$$-2,05 = -2\frac{5}{100} = -2\frac{1}{20} = -\frac{21}{20}$$

b) Először a százalékokról

150 beteg 30%-a omega variánsos. Hány ilyen beteg van?

$$150 \cdot \frac{30}{100} = 45$$

2000 fős falu 72% már be van oltva. Hányan vannak beoltva?

$$2000 \cdot \frac{72}{100} = 1440$$

A 700 fős iskola 45%-a lány. Hány fiú van?

$$\text{Össz-Lányok: } 700 - 700 \cdot \frac{45}{100} = 385 \quad \text{vagy úgy, hogy 55% a fiú: } 700 \cdot \frac{55}{100} = 385$$

Írd tizedes tört alakba a következő számokat: (Aki nem egyszerűsít...)

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{7}{8} = -0,875$$

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\frac{42}{28} = \frac{3}{2} = -1,5$$

$$-\frac{18}{45} = -\frac{2}{5} = -0,4$$

$$\frac{63}{35} = \frac{9}{5} = \frac{18}{10} = 1,8$$

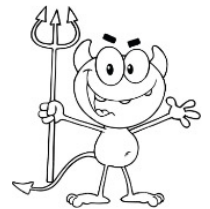
c) A végtelen szakaszos tizedes törtek

Írd fel tizedes tört alakban (előtte érdemes egyszerűsíteni ☺)

$$\frac{15}{27} = \frac{5}{9} = 0,5\dot{5}$$

$$\frac{15}{35} = \frac{3}{7} = 0,428571\dot{}$$

$$\frac{125}{30} = \frac{25}{6} = 4,1\dot{6}$$



Alakítsd át közöséges törtté:

$$3,42 = \frac{339}{99}$$

$$- 3,424242424242424242... = S$$

$$\frac{342,4242424242424242...}{339,0000} = \frac{100S}{99S}$$

$$= \frac{100S}{99S}$$

Nem köt.: Alakítsd át közöséges törtté:

$$0,512 = \frac{512}{999}$$

$$- 0,512512512512512512... = S$$

$$\frac{512,512512512512512512...}{512,0000} = \frac{1000S}{999S}$$

$$= \frac{1000S}{999S}$$

VII) Zárójelek kezelése

1) Műveleti sorrend

Végezd el, figyelj a műveleti sorrendre!

$$-4 + 2 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 = -4 + 18 - 45 = -31$$

$$1 - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4^2 - 10 \cdot 3 = 1 - 50 + 48 - 30 = -31$$

2) Tagok, tényezők

Adott a következő összeg: $1 \cdot 2 - 3(4 - 5 \cdot 6) + (7 - 8)(9 \cdot 10 - 11 \cdot 12) \cdot 13$

Írd föl, hogy melyik:

a 2. tag 2. tényező 2. tag: $5 \cdot 6$ a 3. tag 1. tényező: $(7 - 8)$

3. tag 2. tényező 2. tag 1. tényező: 11

Nevezd meg a következőket! (Pl.: 4: „2. tag 2. tényező 1. tag”)

A 13: 3. tag 3. tény

Az 5: 2. tag 2. tény 2. tag 1. tény

A $(4 - 5 \cdot 6)$: 2. tag 2. tény

A 10: 3. tag 2. tény 1. tag 2. tény

Adott a következő összeg: $(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 6 - 7))(8 \cdot 9 \cdot 10 - 11) + (12 \cdot 13 - 14)(15 + 16 \cdot 17 \cdot 18)$

Írd föl, hogy melyik:

a 2. tag 1. tény 1. tag: $12 \cdot 13$ 1. tag 2. tény: $(8 \cdot 9 \cdot 10 - 11)$

1. tag 1. tény 2. tag 3. tény 1. tag: $5 \cdot 6$

Nevezd meg a következőket!

A 18: 2. tag 2. tény 2. tag 3. tény

Az $12 \cdot 13$: 2. tag 1. tény 1. tag

A 2: 1. tag 1. tény 1. tag 2. tény

A 7: 1 tag 1. tény 2. tag 3. tény 2. tag

Végezd el a műveletet: $(-5) \cdot [(-3) - (-5)] - (-9 + 12) \cdot [(+7) + (-4)] = -5(2) - 3(3) = -19$

Végezd el: $9,7 - (0,72 + 1,98) - (3,8 + (2 - 1,4) - 4) = 9,7 - 2,7 - (3,8 + 0,6 - 4) = 7 - 0,4 = 6,6$

Töltsd ki a táblázatot – ha valami „semmi” oda azt írd: na (= nincs adat)!

$7^3=$	343	$16^2=4^4=2^8$	256
$(-2)^7=$	-128	$2^9=$	512
$35^2=$	1225	$17^2=$	289
$-3^5=$	-243	$9^3=$	729
$2^9=8^3=$	512	$13^2=$	169
$145^2=$	21025	$115^2=$	13225
$19 \cdot 13=$	247	$5^4=$	625
NA=	381	$14^2=$	196
$15^2=$	225	$2^3 \cdot 2^6=$	512
$17^2=$	289	$3^4=$	81
$6^3=$	216	$4^3=$	64

3) Zárójelek kezelése

Bontsd föl a zárójeleket úgy, hogy közben mondd hangosan, amikor szorzol – hogy mivel szorzol – ahogy órán! A végeredmény *nem* kell, de a szorzásokat el kell végezni! ☹

$$15(4-13)-11(5-17)+23(4-5+9)-19(19-13)= 60-195-55+187+92-115+207-361+247$$

$$-(2+11)+11(-5+3)-13(12-14-2)-15(15-13)=$$

$$-2-11-55+33-156+182+26-225+195$$

$$(2+11)-(-5+3)+11(1-12+15)+(15-13)-15(4-15+12)=$$

$$2+22+5-3+11-132+165+15-13-60+225-180$$

$$-11(12-13)-(25+21)+13(-18+12-15)-17(18-19-11)+(3-4)=$$

$$-132+143-25-21-234+156-195-306-323+187+3-4$$

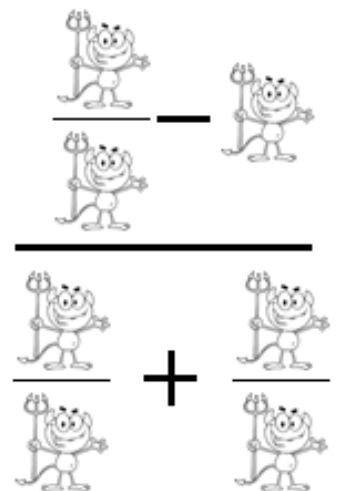
VIII) Emeletes törtek – és a törtek gyakorlása

1) Az emeletes törtek (örömködő ördögök köbön)

Írd át emeletes törtté, majd számold ki: $\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{6} - 6\right) =$

$$= \frac{2 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} - 6} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{35}{6}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{-35} = -\frac{2}{5}$$

$$\left(-\frac{35}{56} - \frac{4}{4}\right) : \left(\frac{9}{3} + \frac{72}{30}\right) = \frac{-\frac{5}{8} - \frac{8}{8}}{-\frac{90}{30} + \frac{72}{30}} = -\frac{13}{8} : \left(-\frac{30}{18}\right) = \frac{13}{8} \cdot \frac{5}{3} = \frac{65}{24}$$



2) Oszthatóság emlékeztető

A 140#1\$04 nyolcjegyű számban nem ismerjük a # -el és a \$ -al helyettesített számjegyeket.

a) Hány olyan számot kaphatunk – a hiányzó jegyek pótlásával – amelyek 9–cel oszthatók?

Írd föl a b) legnagyobb ilyen számot, és a c) legkisebbet is!

Mo.: Mivel az ismert jegyek összeg 10, ezért a két ismeretlen összegének 8-nak kell lenni.

#=0 \$8 -tól egészen#=8 \$=0-ig: vagyis 9 ilyen szám lehet.

A legnagyobb 140**8**1**0**04, a legkisebb 140**0**1**8**04

3) Törtek – minden mennyiségben

A végeredmény egy valódi v. áltört legyen. Az „osztást :” érdemes átírni emeletes törtbe!

$$\frac{\frac{14}{6} \cdot \frac{10}{8} : \frac{21}{4} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{21} = 2 \cdot 20 \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{21} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$



$$\frac{\frac{12}{21} - \frac{5}{14}}{\frac{19}{20}} = \frac{\frac{12}{25} - 2}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{20}{19} = \frac{38}{5} \cdot \frac{20}{19} = \frac{38 \cdot 4 \cdot 20}{25 \cdot 5 \cdot 19} = \frac{32}{25}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{32}$$

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{30}{4} - \frac{4}{8} \right) = -\frac{11}{4} - \frac{28}{4} = -\frac{39}{4}$$

$$\frac{12}{15} - \left(\frac{25}{35} - \frac{12}{30} \right) = \frac{4}{5} - \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5} - \frac{11}{35} = \frac{17}{35}$$

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{8} \right) - \left(\frac{39}{26} - \frac{9}{4} \right) = \frac{25}{24} - \left(\frac{6}{4} - \frac{9}{4} \right) = \frac{25}{24} + \frac{3}{4} = \frac{43}{24}$$

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{10} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6} \right) = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$$

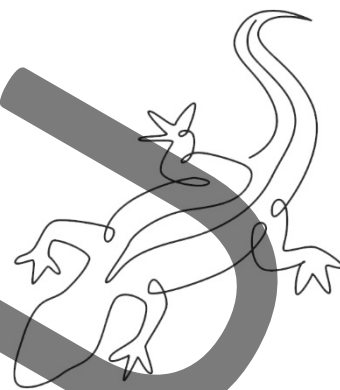
$$\left(\frac{12}{15} - \frac{22}{4} \right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{21}{14} \right) = \left(\frac{4}{5} - \frac{11}{2} \right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{2} \right) = -\frac{47}{10} - \frac{21}{10} = -\frac{68}{10} = -\frac{34}{5}$$

$$\left(\frac{12}{15} - \frac{4}{6} \right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{14}{21} \right) = \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4} \right) = -\frac{1}{6} : \left(\frac{19}{12} \right) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{12}{19} = -\frac{2}{19}$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8} \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{5}{24} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1 - \frac{3}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{4}{6}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 2 \cdot \frac{9}{3} = 6$$



$$\frac{18}{7} = \frac{18}{7} \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{35} = \frac{1}{50}$$

$$\frac{45}{30} = \frac{45}{14} \cdot \frac{35}{30} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{5}{1} = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

$$\frac{6}{15} = 6 \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left(2 - \frac{42}{15}\right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{49}{14}\right) = -\frac{4}{5} - \left(\frac{14}{6} - \frac{21}{6}\right) = -\frac{4}{5} + \frac{7}{6} = \frac{11}{30}$$

$$22 : \left(\frac{7}{3} - \frac{8}{5}\right) = 22 \cdot \frac{15}{11} = 30$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{9}{8}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{7}{24} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{7}{36}$$

$$\left(-\frac{4}{8} + \frac{3}{3}\right) : \left(-\frac{7}{8} - \frac{9}{10}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{71}{40}} = -\frac{20}{71}$$

$$9 : \left(\frac{7}{10} - \frac{8}{5}\right) = \frac{9}{-\frac{9}{10}} = -10$$

$$\frac{27}{7} : 3 = \frac{27/3}{7} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{27}{7} : 6 = \frac{27}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{14}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{105}{80} : \frac{42}{120} = \frac{21}{16} \cdot \frac{60}{21} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{20}{28} = 20 \cdot \frac{105}{28} = 5 \cdot \frac{105}{7} = 75$$

$$\frac{135}{55} : 9 = \frac{27}{11} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{11}$$

$$\frac{104}{65} = \frac{104}{15} \cdot \frac{1}{65} = \frac{8}{75}$$

$$\frac{100}{65} = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20$$

$$\frac{12}{21} = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

$$9 \cdot \frac{63}{35} = 9 \cdot \frac{35}{63} = 5$$

$$21 \cdot \frac{3}{7} = 21 \cdot \frac{7}{3} = 49$$

$$14 \cdot \frac{7}{3} = 14 \cdot \frac{3}{7} = 6$$

$$\frac{1 - \frac{\frac{2}{3}}{2 - \frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

IX) Ismétlés

Írd föl a következő számot valódi értékek összegeként:

$$5040,092 = 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 0,001$$

$$173,0504 = 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0,1 + 5 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot 0,001 + 4 \cdot 10^{-4}$$

Írd föl a következő számot: $6 \cdot 0,1 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot \frac{1}{1000} + 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 1 = 5307,602$

Rakd ki a relációjelet:

$$\frac{22}{17} < \frac{50}{26}$$

$$-7,01101 < -7,01011$$

$$-0,000202 < -0,000201$$

↕

$$\frac{22}{17} < \frac{25}{13}$$

Adott a következő kifejezés: $1(2-3)(4+5-6) - 7(8-9 \cdot 10)(11 \cdot 12-13) + 14(15+16 \cdot 17)$

Mi a (2-3): 1. tag 2. tény

Mi a 12: 2. tag 3. tény 1. tag 2. tény

Mi a 3. tag 2. tény 2. tag 1. tény: 16

Mi a 9: 2. tag 2. tény 2. tag 1. tény

Adott a következő kifejezés: $1(2-3)(4 \cdot 5 - 6(7+8)) + 9 \cdot 10(11-12 \cdot 13) - 14 \cdot 15 \cdot (16-17)$

Mi a (16-17)? 3. tag 3. tény

Mi a 12? 2. tag 3. tény 2. tag 1. tény

Mi a 8? 1. tag 2. tény 2. tag 2. tény 2. tag

Mi az 1. tag 1. tényező 2. tag 1. tényező: 2

Mi a 2. tag 3. tényező 2. tag: 12 \cdot 13

SZANG HU

Alakítsd valódi törtté (Egyszerűsíts is!)

$$2,48 = 2 \frac{48}{100} = 2 \frac{12}{25} = \frac{62}{25}$$

$$5,012 = 5 \frac{12}{1000} = 5 \frac{3}{250} = \frac{753}{250}$$

Írd le tizedes törttel:

$$\frac{100}{8} = 12,5$$

$$\frac{9}{11} = 0,81$$

* Írd föl valódi törttel: $0,52\bar{2} = \frac{522}{999}$

$$\begin{array}{r} - 0,522522522522522522522... = 5 \\ \hline 522,522522522522522522522... = 10005 \\ \hline 522,0000 = 9995 \end{array}$$

Írd föl a kanonikus alakját: $990\,000 = 3^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11$

Írd föl a kanonikus alakját: $243\,000 = 3^5 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3$

Hány 0-ra végződik a következő szám: $x = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2 : 3$, mert 3 db (2·5) pár van benne.

Hány 0-ra végződik a következő szám: $y = 125 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 36 \cdot 35$

Elég a 2-öt és az 5-öt figyelni a tényezőkből: $5^3 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2^4 \cdot 5$: 2^8 és 5^5 , tehát 5 db. 0-ra.

Melyik két prím összege lehet a 49?

Mivel pt az összeg, ezért az egyik páros, a másik pt. $2+47$. Szerencsére a 47 prím.

Írd le a számelmélet alaptételét:

Bármely 1-nél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható föl prímszámok szorzatára a sorrendtől való eltérés erejéig.

Fejezd be: 5 osztja a 35-öt mert van olyan egész, amellyel megszorozva az 5-öt 35-öt kapunk, ez pedig a 7.

Fejezd be: 4 nem osztja a 35-öt mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a 4-et 35-öt kapunk.

Egészítsd ki a számot négyjegyűre úgy, hogy a *legnagyobb* legyen, és igaz legyen rá az oszthatóság. Pl.: $12|_{58} \rightarrow 8580$

$$36|6912 \rightarrow$$

$$55|8910 \rightarrow$$

$$24|6960 \rightarrow$$

$$18|9612 \rightarrow$$

$$60|7560 \rightarrow$$

$$75|7200 \rightarrow$$

LKKT, LNKO

$$(39;65)=13(3;5)=13$$

$$[39;65]=13[3;5]=13 \cdot 3 \cdot 5=195$$

$$(48;84)=6(8;14)=12(4;7)=12$$

$$[48;84]=12[4;7]=12 \cdot 4 \cdot 7=336$$

Bonts föl a zárójelet: A végeredményt nem kell kiszámolni, de a szorzásokat el kell végezni!

$$-(15-3+7)+17(12-13-2)+(7-3)-2(-5-4)-(8-3)=$$

$$-15+3-7+204-221-34+7-3+10+8-8+3$$

$$12(5-3)-(12-3)+7(-5+4)+3(-4-3)+(15-4-7)-(11+23)=$$

$$60-36+12+3-35+28-12-9+15-4-7-11-23$$

$$-18(12-15+18)+(1-2+3)+15(7+11-15-18)-13(-12-19+13)=$$

$$-216+270-324+1-2+3+105+165-225-270+156+247-169$$

$$-(8-9+3)+17(13-19+17)-16(-16+17-4)-(3+5)+(2-8)-14(11-14+19)=$$

$$-8+9-3+221-323+289+256-272+64-3-5+2-8-154+196-166$$

Mennyi 28-nak a 30%-a?

$$28 \cdot \frac{30}{100} = 8,4$$

Mennyi 50-nek a 135%-a?

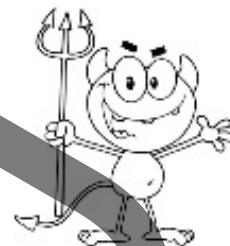
$$50 \cdot \frac{135}{100} = 67,5$$

Írd föl a számot: $7 \cdot 100 + 3 \cdot \frac{1}{10000} + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 0,01 + 9 \cdot 10 = 5790,0403$

Alakítsd át valódi törtté:

$$4\frac{70}{126} = 4\frac{35}{63} = 4\frac{5}{9} = \frac{50}{9}$$

$$-2\frac{28}{35} = -2\frac{4}{5} = -2\frac{4}{5} = -\frac{14}{5}$$



Alap-hatványok

Írd föl a 2 tanult hatványait: $2^1=$ $2^2=$ stb.:

$$2^0=1; 2^1=2; 2^2=4; 2^3=8; 2^4=16; 2^5=32; 2^6=64; 2^7=128; 2^8=256; 2^9=512; 2^{10}=1024$$

$$2^{11}=1048; 2^{12}=4096$$

Írd föl az 5 tanult hatványait:

$$5^0=1 \quad 5^1=5 \quad 5^2=25 \quad 5^3=125 \quad 5^4=625 \quad 5^5=3125$$

Írd föl a 3 tanult hatványait:

$$3^0=1 \quad 3^1=3 \quad 3^2=9 \quad 3^3=27 \quad 3^4=81 \quad 3^5=243 \quad 3^6=729$$

Írd föl a 6 tanult hatványait:

$$6^0=1 \quad 6^1=6 \quad 6^2=36 \quad 6^3=216;$$

Írd föl a 7 tanult hatványait:

$$7^0=1 \quad 7^1=7 \quad 7^2=49 \quad 7^3=343$$

* Alakítsd valódi- (vagyis ál-) törtté: $2,3\ddot{5} =$

Törtek

$$\frac{27}{7} : \frac{18}{21} = \frac{27}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{25}{14} : \frac{25}{35} = \frac{25}{14} \cdot \frac{7}{5} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{6}{15} = 6 \cdot \frac{7}{15} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$9 : \left(\frac{7}{10} - \frac{8}{5} \right) = 9 : \left(-\frac{9}{10} \right) = -9 \cdot \frac{10}{9} = -10$$

$$5 + \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{5} - \left(\frac{-28}{24}\right)}{\frac{5}{2} - \left(1 + \frac{10}{6}\right)} = 5 + \frac{\frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{6}{12}}{\frac{5}{2} - \frac{16}{6}} = 5 + \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{-\frac{1}{6}} = 5 + \frac{17}{6} \cdot (-6) = -12$$

$$\frac{\frac{12}{15} - \frac{4}{10}}{-\frac{105}{56}} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{-\frac{15}{8}} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{15} = -\frac{16}{75}$$

$$\frac{3 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{4}}{7} = \frac{3 + \frac{1 + \frac{3}{8}}{8}}{7} = \frac{3 + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{22}}{7} = \frac{3 + \frac{1}{16}}{7} = \frac{\frac{49}{16}}{7} = \frac{7}{16}$$

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} : \left(-\frac{8}{9}\right) + 1\right) : \frac{7}{3} + \frac{6}{7} = \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} + 1\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} = \left(\frac{11}{6} - \frac{9}{6}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$$

A SZÁMOK ÁTTEKINTÉSE

I) A természetes számok köre

1) Definíció - alapok

a) A természetes számok

Mennyi az első 10 természetes szám szorzata?

0, mivel az első természetes szám a 0.

$$\underline{1 \cdot [2-3 \cdot \{4-5\} (6 \cdot (7 \cdot 8-9)-10)+11 \cdot 12]} - (13-14) \cdot 15 - (16-17(18 \cdot 19+20)) \cdot 21$$

Mi a 2. tag 1. tényezője? (13-14)

Mi az 1. tag 2. tényező 2. tag 2. tényezője? {4-5}

Mi a 16? 3. tag 1. tény 1. tag

Mi a 18? 3. tag 1. tény 2. tag 2. tény 1. tag 1. tény

Mi a 7·8? 1. tag 2. tény 2. tag 3. tény 1. tag 2. tény 1. tag

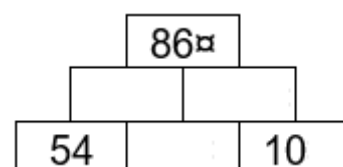
Írd föl az első öt természetes számot: 0, 1, 2, 3, 4

A „téglából” kirakott ábrán két szomszédos szám fölé az összegük kerül. Mely számok hiányoznak?

A $86 = 54 +$ Alsó-középső téglá + $10 +$ Alsó-középső téglá

$86 = 64 + 2 \times$ Alsó-középső téglá. $\Rightarrow 22 = 2 \times$ Alsó-középső téglá

Tehát középen alul a 11 van.



b) Jelek

Írd mellé jelekkel (mind igaz állítás!)

„Az 5 természetes szám”: $5 \in \mathbf{N}$

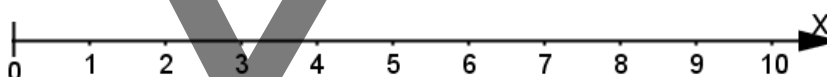
„A -3 nem természetes”: $-3 \notin \mathbf{N}$

„A nulla természetes szám”: $0 \in \mathbf{N}$

„A $2/3$ nem természetes”: $2/3 \notin \mathbf{N}$

c) Számegyenes:

Rajzolj számegyeneset, és írd rá centiméterenként az első tíz természetes számot.



Mi a két természetes szám szomszédja a 10 000 000-nak:

9 999 999 és a 10 000 001

d) Egymás követő természetesek összege

Add össze 1-től 100-ig a természetes számokat!

$$\begin{aligned} \text{Mo.:} \quad & 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 1 \text{ ló ára} \\ & + \frac{100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{2} = 1 \text{ ló ára} \\ & 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 = 2 \text{ ló ára} \end{aligned}$$

Ez 100 db. 101 „dolláros”, tehát 1 ló ára: $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Nem kötelező: add össze 2-től 100-ig a páros természetes számokat!

$$\begin{aligned} \text{Mo.:} \quad & 2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100 = 1 \text{ ló ára} \\ & + \frac{100 + 98 + 96 + \dots + 6 + 4 + 2}{2} = 1 \text{ ló ára} \\ & 102 + 102 + 102 + \dots + 102 + 102 + 102 = 2 \text{ ló ára} \end{aligned}$$

Ez 50 db. 102 „dolláros”, tehát 1 ló ára: $\frac{50 \cdot 102}{2} = 2550$



$$\left(\left(2 - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{6}{5} - \frac{3}{4} \right) \div \left[\left(3 - \frac{5}{7} \right) \frac{21}{8} - \frac{1}{4} \right] = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} - \frac{3}{4} \right) : \left(\frac{16}{7} \cdot \frac{21}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4} : \left(\frac{23}{4} \right) = \frac{5}{23}$$

2) A tízes és a kettős számrendszer – bevezetés

$$(29 - 12 \cdot (45 \cdot 4 \cdot (7 - 2) - 3)) \cdot 5 - 23 \cdot (14 + 15 \cdot 26) - (12 - 32)(34 \cdot 45 + 6)$$

Mi a 2. tag 2. tényezője? (14+15·26)

Mi az 1. tag 1. tényező 2. tag 2. tényező 2. tagja? 3

Mi az aláhúzott 6-os? 3. tag 2. tény. 2. tag

Mi az aláhúzott 4-es? 1. tag 1. tény. 2. tag 2. tény. 1. tag 2. tény.

Számold át 10-es számrendszerbe:

$$110110_2 = \overset{32}{1} \overset{16}{1} \overset{8}{0} \overset{4}{1} \overset{2}{1} \overset{1}{1} = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55$$

$$101010111_2 = \overset{256}{1} \overset{128}{0} \overset{64}{1} \overset{32}{1} \overset{16}{0} \overset{8}{1} \overset{4}{1} \overset{2}{1} \overset{1}{1} = 256 + 64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 343$$

Számold át 2-es számrendszerbe: $1653_{10} = 11001110101_2$

A legnagyobb helyiérték: 1024

$1653 - 1024 = 629 \Rightarrow 1$ db. 1024-es;

$629 - 512 = 117 \Rightarrow 1$ db 512;

256-os és 128-as nincs

$117 - 64 = 53 \Rightarrow 1$ db. 64-es;

$53 - 32 = 21 \Rightarrow 1$ db. 32-es;

$21 - 16 = 5 \Rightarrow 1$ db. 16-os

8-as nincs;

1 db. 4-es

2-es nincs és 1 db. 1-es van.

Természetesen van erre egy jó algoritmus, olyan, amelyet az írásban történő osztásnál is használsz: véges sok lépésben kiadja a végeredményt, de az majd csak akkor, ha már nagyok leszünk és okosak, és tudjuk bizonyítani is a működőképességét. Ez örökre meg tudod jegyezni: „2-es Kaszinó”

Nem köt.: Add össze az ötten osztható természetes számokat 5-től 500-ig.

Mo.: $5 + 10 + 15 + \dots + 490 + 495 + 500 = 1$ Ló ára

$+ 500 + 495 + 490 + \dots + 15 + 10 + 5 = 1$ ló ára

$505 + 505 + 505 + \dots + 505 + 505 + 505 = 2$ ló ára

Ha az első számsor minden tagját osztom 5-tel: megkapom a sorszámát...

Vagyis 100 db. 505 dollár, tehát 1 ló ára: $\frac{100 \cdot 505}{2} = 25250$

Számold át 2-es számrendszerbe: $358_{10} = 101100110_2$

A legnagyobb helyiérték: 256

$358 - 256 = 102$ 1 db. 256-os; 128-as nincs; $102 - 64 = 38$ 1 db. 64-es

$38 - 32 = 6$ 1 db. 32-es; 16-os és 8-as nincs; $6 - 4 = 2$ 1 db. 6-os

$2 - 2 = 0$ 1 db. 2-es; 1-es nincs

Egy természetes számot köbre emelek, az eredménynek pedig veszem a kanonikus alakját.

A kanonikus alakban megvizsgálom mindegyik kitevőt: miféle számok ezek, mivel lesz osztható mindegyik biztosan?

A kanonikus alakban minden prímtényezőből háromszor annyi lesz az eredeti számhoz képest, vagyis minden prímtényező kitevője megháromszorozódik, így a kitevők biztosan oszthatók 3-mal.

3) Egyéb számrendszerek

Számold át 10-es számrendszerbe a következő 3-as számrendszerbeli számot:

$2012_3 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 3 + 2 = 59$

Számold át 6-os számrendszerbe: $1\ 100_{10}$ -at!

$216\ 36\ 6\ 1$

X X X X Látható, hogy az 1296-os helyiérték már nem kell.

$1100 - 5 \cdot 216 = 20$. Vagyis a 216-os helyiértéken az 5 áll.

36-os nincs.

$20 - 3 \cdot 6 = 2$, vagyis a 6-osok helyén 3 áll.

Az egyesek helyén 2.

$1\ 100_{10} = 5032_6$

Nem kötelező: Számold át 7-es számrendszerbe: 839_{10} -et!

$343\ 49\ 7\ 1$

X X XX Látható, hogy nagyobb helyiérték már nem kell.

$839 - 2 \cdot 343 = 153 \Rightarrow 2$ db. 343-as.

$153 - 3 \cdot 49 = 6 \Rightarrow 3$ db. 49-es.

7-es nincs.

6 db. 1-es

$839_{10} = 2306_7$

4) Műveletek a természetes számokon

Írd át 10-es számrendszerbe a következő 2-es számrendszerbeli számot:

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1_2 = 205_{10}$$

Írd át 2-es számrendszerbe a következő 10-es számrendszerbeli számot: 221_{10} .

$$221_{10} = 11011101_2$$

a) Hány db. kétjegyű természetes szám van? b) Hány olyan kétjegyű természetes szám van, melyben a számjegyek szorzata 1? c) Hány olyan kétjegyű természetes szám van, melyben a számjegyek szorzata 0? d) Hány olyan kétjegyű természetes szám van, melyben a számjegyek szorzata nagyobb, mint 2?

a) 1-99-ig: 99 szám. Abból 9 nem megfelelő: $99 - 9 = 90$

b) 1 db., a 11

c) 10, 20... 90, vagyis 9

d) Azt könnyebb megmondani, hogy hány olyan, ahol a jegyek szorzata nem nagyobb kettőnél. Ezek a 0-ra végződők, illetve 11, 12, 21. Vagyis ahol nagyobb: $90 - 9 - 3 = 78$ db.

Számold át 2-es számrendszerbe: $1503_{10} = 10\ 111\ 011\ 111_2$

Írd át közösleges tört alakba a következő számokat – ha lehet, egyszerűsíts!

$$4,28 = 4 \frac{28}{100} = 4 \frac{7}{25} = \frac{107}{25}$$

$$2 = \frac{2}{1} \text{ (ezt az alakot úgy szeretjük, mint „Ablakos tót a hanyatt esést”!)}$$

$$0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$*) 5,1\dot{3}1\dot{6} = 5\ 126,5/999$$

5) Egy kis számelmélet

a) Oszthatóság

b) Alap oszthatósági szabályok

Égészítsd ki a következő számot úgy, hogy a *legnagyobb* legyen és igaz legyen az oszthatóság:

$$\begin{array}{r} 15 \mid \\ 855 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \mid \\ 756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \mid \\ 858 \end{array}$$

Írd föl kanonikus alakban:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$504\ 000 = 56 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$



c) Az összetett számok

Írd mellé, hogy Igaz/Hamis! (Csak az egyiket ☺)

Ami 5-tel és 3-mal osztható, az biztos osztható 15-tel.	Igaz
Ami 6-tal osztható, az osztható 3-mal.	Igaz
Ami 6-tal és 4-gyel osztható, az biztos osztható 24-gyel.	Hamis
A 18 db. 2-esből álló szám osztható 4-gyel.	Hamis
A 18 db. 2-esből álló szám osztható 6-tal.	Igaz
A 18 db. 2-esből álló szám osztható 11-gyel.	igaz
A 18 db. 8-asból álló szám osztható 72-vel.	Igaz
A 18 db. 8-asból álló szám osztható 44-gyel.	Igaz
2^{30} osztható 64-gyel.	Igaz

d) A relatív prímelek fontos tulajdonságai

Két relatív prím (természetes számok) szorzata = 600. Mik lehetnek ezek a relatív prímpárok? Írd fel ezeket a párokat!

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

1 és 600; 2^3 és 3·5; 3 és $2^3 \cdot 5$; 5 és $2^3 \cdot 3$

Ha egyszer megnövünk: 3 elemű halmaz hatványhalmaza számosságának a fele lehetőség van.

Miért nem lehet két prímszám szorzata 17 483 712 340 ?

Mert osztható 4-gyel is 5-tel is. Vagyis már $2^2 \cdot 5$ van a kanonikus alakban

Miért nem lehet két prímszám szorzata 15 300 567 ?

Mert osztható 9-cel, vagyis a szám = $3 \cdot 3$ -valami, vagyis már legalább 3 prím van benne.

Írd le a relatív prímelek definícióját és a tanult fontos tulajdonságát egy relatív prímpárnak! Tudd fejből!

Relatív prímelek: ha két pozitív természetes szám LNKO-ja 1, akkor az a két szám „relatív prím”.

Tétel: Ha két relatív prím oszt egy számot, akkor a szorzatuk is osztja. Amennyiben nem relatív prímelek, úgy nem biztos az oszthatóság.

Írd le növekvő sorrendben (fejben gondolkodva) a prímszámokat 71-ig (ez is prím)!

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ~~51~~ 53, 59, 61, 67, 71

e) Az egyértelmű prímfelbontás újra

Írd fel a 60 összes természetes osztóját – úgy érdemes, hogy párba állítva keresed őket, a legkisebttől: 1 – 60 2 – 30; 3–20; 4–15; 5–12; 6–10;

Add meg a 24-gyel való
oszthatóság szabályát:

Azok a számok oszthatók 24-gyel, melyek oszthatók 3-mal és 8-cal, mert $3 \cdot 8 = 24$ és $(3;8)=1$

Azok a számok oszthatók 72-vel, melyek oszthatók 9-cel és 8-cal, mert $9 \cdot 8 = 72$ és $(9;8)=1$

Add meg a 72-vel való
oszthatóság szabályát

Igaz-e, hogy $66 \mid 277\ 134$ -et? Miért?

Mo.: $2 \mid 277\ 134$; $3 \mid 277\ 134$ és $11 \mid 277\ 134$, és mivel a 2; 3; 11 páronként relatív prím ezért a szorzatuk, a 66 is oszt.

Egyenlő-e vagy sem a következő két szám: $A=28 \cdot 27 \cdot 250 \cdot 98 \cdot 300$ $B=4900 \cdot 42 \cdot 54 \cdot 500$

(Írd föl mindkettő kanonikus alakját!)

$A=2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3$ $B=2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3$ Vagyis egyenlők

Persze lehetne törtet csinálni belőlük, és egyszerűsíteni:

$$\frac{28 \cdot \cancel{27} \cdot \cancel{250} \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{300}}{49 \cdot \cancel{42} \cdot \cancel{54} \cdot \cancel{500}} = \frac{\cancel{28}^4 \cdot \cancel{98}^2 \cdot 3}{\cancel{49} \cdot \cancel{42}^2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 1, \text{ vagyis egyenlők.}$$

6) Osztók

a) Számok osztóinak jellemzői

$A=21 \cdot 52 \cdot 115 \cdot 135$ Hozd kanonikus alakra, utána határozd meg, hogy ezt az A számot osztják-e az alább következő számok, szorzatok - (osztja/nem osztja)!

Kanonikus alak: $A=2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23$

a) $27=3^3$ Igen

b) $20=2^2 \cdot 5$ igen

c) $250=2 \cdot 5^3$ nem

d) $242=2 \cdot 11^2$ nem

e) $21 \cdot 75=3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ Igen

f) $51 \cdot 112 \cdot 135$

Mivel $51=3 \cdot 17$, ezért a 17 miatt nem

Add meg ennek az A számnak még két különböző (de több prímből álló) osztóját!

$3^3 \cdot 7 \cdot 13$; $2^2 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 23$

Igaz-e az oszthatóság? (Igaz/Hamis)

$16 \mid 2^3 \cdot 3$ Hamis

$18 \mid 2^3 \cdot 3^4$ Igaz

$15 \mid 2^3 \cdot 3^4$ Hamis

$20 \mid 2 \cdot 5^3$ Hamis

$28 \mid 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ Hamis

$28 \mid 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ Hamis

$36 \mid 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ Hamis

$36 \mid 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ Hamis

$36 \mid 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11^4$ Igaz

Döntsd el a 4200 kanonikus alakra hozása után, hogy igazak-e a következő állítások!

$$\text{Kanonikus alak: } 4200=2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$16|4200 \text{ Hamis}$$

$$11|4200 \text{ Hamis}$$

$$15|4200 \text{ Igaz}$$

$$250|4200 \text{ Hamis}$$

$$343|4200 \text{ Hamis}$$

$$66|4200 \text{ Hamis}$$

$$24|4200 \text{ Igaz}$$

$$80|4200 \text{ Hamis}$$

$$225|4200 \text{ Hamis}$$

Összeszorozom 1-től 27-ig a természetes számokat. A végeredmény kanonikus alakjában mennyi a 3 kitevője?

Mo.: 9 db. 3-mal osztható van. Ez már 9 db. 3-as prímtényező.

De van a 9, 18, 27, vagyis 3 db. 9-cel osztható. Egy 3-ast már megszámoltam mindegyikben, tehát még 3-mal növelik még a kitevőt. De van még a 27. Ebben 3 db. 3-as van, azonban már 2-őt megszámoltunk, tehát 1-gyel növeli a kitevőt: $9+3+1=13$

b) Észrevételek

Ahogy az órán csináltuk: Adott a következő szám: $C=2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7^3$. Húzd alá, hogy melyik az igaz (osztja/nem osztja) és fejezd be a mondatot!

A $2^4 \cdot 5^6$ osztja/nem osztja a C számot, mert van olyan egész, amellyel megszorozva a $2^4 \cdot 5^6$ -t a C-t kapom, ez pedig a $3^3 \cdot 7^3$.

A $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ osztja/nem osztja a C számot, mert van olyan egész, amellyel megszorozva a $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ -t a C-t kapom, ez pedig a $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2$.

A $2^3 \cdot 11$ osztja/nem osztja a C számot, mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a $2^3 \cdot 11$ -t $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7^3$ -t kapnánk. (Mert mindig ott marad a 11.)

A $2^4 \cdot 3^4$ osztja/nem osztja a C számot, mert nincs olyan egész, amellyel megszorozva a $2^4 \cdot 3^4$ -t $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7^3$ -t kapnánk. (Mert a 3 kitevője minimum 4 marad.)

Milyen prímtényezőikkel, prímkhatványokkal szorozzuk meg a $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ számot, hogy biztos legyen az oszthatóság:

$$16|2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \underline{2^2}$$

$$121|2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \underline{11^2}$$

$$18|2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \underline{3}$$

$$245|2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \underline{5 \cdot 7}$$

c) Gondolkodtatók

A 3-5-7 három egymást követő páratlan prím. Miért nincs több ilyen?

Mert 3 db. egymást követő páratlan között mindig van egy 3-mal osztható

Hiszen ha az első osztható 3-mal, akkor már nem prím. Ha 3-mal osztva 1 a maradéka, akkor a 2-vel nagyobb szám osztható lesz 3-mal. Ha 3-mal osztva 2 a maradéka, akkor a 4-gyel nagyobb szám lesz osztható 3-mal.

Melyik év, hó, nap (dátum) volt az utolsó eddig, melyben minden számjegy páratlan?
(1956.10.23. pl. nem ilyen.)

1999.11.17

Melyik az a legnagyobb kétjegyű prím, mely jegyeinek szorzata is prím? Írd fel ezt a prímet, és a jegyei szorzatát is!

Mivel ha nem 1 az egyik jegy, akkor a szorzat már nem prím (nyilván 0 nem játszik.)

A másik jegynek prímnek kell lenni eleve: 31, 71. Vagyis a 71.

Melyik az a legkisebb háromjegyű prím, mely jegyeinek szorzata is prím? Írd fel ezt a prímet, és a jegyei szorzatát is!

Mivel ha nem az 1 kettő jegye is, akkor a szorzat már nem prím.

A 111 nem jó, 112 sem, 113 azonban jó. Jegyek szorzata 3.

* Egyszerűsíttem a következő törtet: $\frac{3^{20}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 30}$. Mennyi lesz egyszerűsítés után a számlálóban a 3 kitevője?

A nevezőben 1-től 30-ig 10 db. 3-mal osztható van, ez 3^{10} . De vannak 9-cel is oszthatók, melyek még egy-egy 3-assal járulnak hozzá: $[30/9]=3$ db. És végül van 1 db. 27-tel osztható. Tehát a 3 kitevője a nevezőben: $9+3+1=13$.

Vagyis egyszerűsítés után: $20-13=7$ lesz a kitevő.

d) Faktor

Számold ki fejben (érdemes az eggyel korábbit felhasználni a számolásnál...):

$$1!=1$$

$$2!=2$$

$$3!=6$$

$$4!=24$$

$$5!=120$$

$$6!=720$$

$$7!=5040$$

Mennyivel egyenlő? Faktoral felírva elég, nem kell kiszámolnod:

$$20 \cdot 19! = 20!$$

$$18! - 17 \cdot 17! = 18 \cdot 17! - 17 \cdot 17! = 1 \cdot 17! = 17!$$

Mennyivel egyenlő kiszámolva (konkrét természetes szám legyen a végeredmény!):

$$\frac{100!}{99!} = \frac{100 \cdot 99!}{99!} = 100$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$$

e) A 0-ra végződés

Hány 0-ra végződik: $2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^{21} \cdot 11^4 \cdot 13^8$:

6 db (2·5)-ös pár van benne, tehát 6 db. 0-ra.

Összeszorom 1-től 50-ig a természetes számokat. Hány 0-ra végződik a szorzat?

A kanonikus alakban a 2 kitevője nagyobb lesz, ezért az 5 kitevőjét kell nézni.

5-tel osztható 10 db. van. 25-tel: 2 db. Tehát $10+2=12$ db. 0-ra.

7) Négyzetszámok

Miért nem lehetnek az alábbiak négyzetszámok:

$$A=15!+7$$

15! végződése: 0.

7-re nem végződik négyzetszám

$$B=21!$$

A 19-es prímtényező csak egyszer

fordul elő a kanonikus alakban,

pedig ps-nak kellene lenni a kitevőjének.

$$C=10\,000\,100\,001$$

3-mal osztható, de 9-cel nem.

$$D=12\,345\,678\,912\,345$$

3-mal osztható, de 9-cel nem.

v.: az 5-re végződők négyzete

25-re végződik...

Írd a számok alá, amelyik négyzetszám, amelyik köbszám, vagy épp mindkettő (Pl.: 36 négyzetszám, mert $6^2=36$; és 216 köbszám, mert $6^3=216$ – vagy egyik sem).

$$A=2^4 \cdot 3^6 \cdot 7^8.$$

Négyzetszám,

$$(2^2 \cdot 3 \cdot 3^4)^2$$

$$C=13^3 \cdot 2^6 \cdot 7^{18}.$$

Köbszám: $(13 \cdot 2^2 \cdot 7^6)^3$

$$B=11^4 \cdot 3^5 \cdot 7^8.$$

Egyik sem.

$$D=2^{42} \cdot 3^6 \cdot 7^{18} \cdot 11^6 \cdot 23^{30}$$

Négyzet is, köb is:

* Mutasd meg, hogy 7 négyzetszám között mindig van 2 olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel

A négyzetszámok csak 0, 1, 4, 5, 6, 9-re végződhetnek. Ez 6 különböző végződés. 7 db.

négyzetszám között biztos van leglább 2 olyan, amelyek ugyanannyira végződik. Az ő

különbségük osztható 10-zel!

8) Számok osztóinak „keresgelése”

a) Párba állítás

Add meg a 24 osztóit, párba állítással.

1—24; 2—12; 3—8; 4—6;

Most már – a párba állítós módszer elvégzése után – könnyebben fel tudod írni a 60 osztóinak a szorzatát is: mennyi lesz?

1—60; 2—30; 3—20; 4—15; 5—12; 6—10;

6 db. pár van. Páronként a szorzat 60. Tehát az összes szorzata: 60^6 .

Melyik az a 200-nál kisebb legnagyobb szám, melynek pontosan 3 különböző osztója van. (Gondold meg, hogy mely számoknak van páratlan darab osztója! A párba-állítós módszernél jól látszódik!)

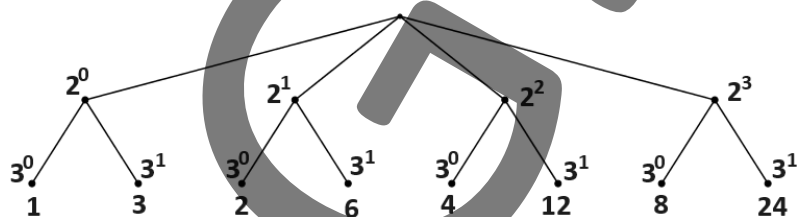
Mo. Mivel az osztókat párba lehet állítani, ezért elvileg páros db. osztója van egy számnak. Kivéve azokat, ahol egy osztónak önmaga a párja: vagyis a négyzetszámoknak van pt. osztója. Pl.: 16-nak: 1—16; 2—8; 4. Vagyis 5 db.

A legnagyobb 200-ig: $196=14^2$.

b) Fa struktúra

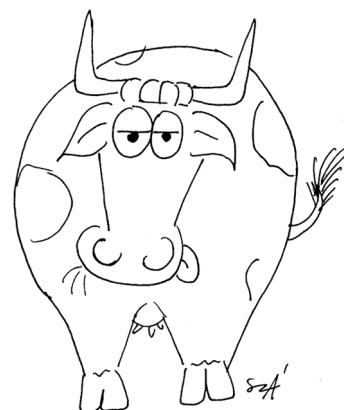
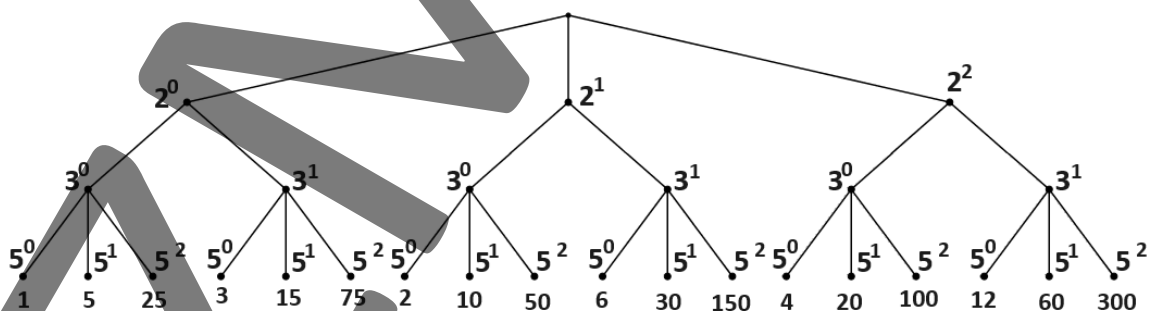
Fa struktúrával gyártsd le a 24 osztóit!

$$24=2^3 \cdot 3$$



Add meg az 300 osztóit a kanonikus alakjából fa-struktúrával.

$$300=2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$



Számold át 3-as számrendszerbe a 439_{10} -et!

$243 \ 81 \ 27 \ 9 \ 3 \ 1$
 $1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1_3$

c) Osztók száma

Hány osztója van a 196 000-nek? Prímfelbontás segítségével határozd meg!

$$196\ 000 = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$$

$$d(2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2) = (5+1)(3+1)(2+1) = 72$$

Hány osztója van a következő számnak? $A = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 3^4$ (Vigyázz, át kell írnod kano...)

$$A = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^3$$

$$d(2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^3) = (3+1)(7+1)(3+1) = 128$$

9) LNKO

a) Bevezetés

Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek a) pontosan 3 db. osztója van

b) pontosan 6 db. osztója van?

Mo.

• 3 db. osztó: $d(n) = 3$ Ez csak úgy áll elő, hogy egy prím a négyzetén: p^2 . Vagyis $2^2 = 4$.

• 6 db osztó: állhat a szám egy prímből: p^5 vagy kettő prímből: $p_1 \cdot p_2^2$.

$$p^5: \text{ a legkisebb a } 2^5 = 32$$

$$p_1 \cdot p_2^2: \text{ vagy } 2 \cdot 3^2, \text{ vagy } 3 \cdot 2^2$$

Vagyis a legkisebb a 12.

* Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek pontosan 12 db. osztója van?

Mo.: $12 = 12$ v. $2 \cdot 6$ v. $3 \cdot 4$ v. $2 \cdot 2 \cdot 3$

• Lehet p^{11} v. $p_1 \cdot p_2^5$ v. $p_1^2 \cdot p_2^3$ v. $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2$

$$p^{11}: \text{ a legkisebb a } 2^{11} = 2048$$

$$p_1 \cdot p_2^5: \text{ nyilván a nagyobb prím legyen kisebb hatványon: } 3 \cdot 2^5 = 96$$

$$p_1^2 \cdot p_2^3: 3^2 \cdot 2^3 = 72$$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Vagyis a legkisebb a 60.

ChatGpt: „Melyik az a legkisebb természetes szám, aminek pontosan 12 osztója van?”

És nem is annyira lüke :-)

Kérd meg anyucit, hogy őt küldje a suliba,

te meg otthon maradhatsz satnyulni :(

Adj meg 3 db. bonyolult közös osztóját a következő két számnak:

$$\text{NYOMTATOTTHOZ KÉPEST JAVÍTVÁ: } a = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \quad b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^3$$

$$\text{Mo.: } 2^3 \cdot 7; \quad 2^3 \cdot 5 \cdot 7^3; \quad 2^2 \cdot 5^2$$

Többszöröse-e a

20-nak a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Igen, a $2 \cdot 3^2$ -szerese

40-nek a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Nem, ui. nincs benne 5-ös prímtényező.

60-nak a $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2$

Nem, mert 2^2 -nak kellene lenni

81-nek a $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2$

Igen: $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ -szerese

b) Két vagy több szám LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJA (LNKO)

* Egy természetes számot köbre emelek. A végeredményt fölírom kanonikus alakban, majd veszem az összes kitevőt, és a kitevőket összeszorzom. Ez a szorzat 27 lett. (Ha csak egy kitevő van, akkor az a szorzat.) Sok ilyen eredeti szám lehet, de melyik közülük a legkisebb?

Mo.: A kitevők szorzata 27. Minden kitevő a háromszorosa lett a köbre emelés után.

Ha egy prím volt: p^9 .

Ha kettő: $p_1 \cdot p_2^3$

Ha három: $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ (nyilván egyéb több prím már nem lehet, mert akkor a szorzatban már legalább 3^4 lenne.)

2^9 v. $3 \cdot 2^3$ v. $2 \cdot 3 \cdot 5$. A legkisebb közülük a 30.

Mit jelent az, hogy a legnagyobb közös osztó egyben kitüntetett közös osztó? Írd le:

Az LNKO egyben KITÜNTETETT KÖZÖS OSZTÓ is. Vagyis minden közös osztó osztója az LNKO-nak és az ő osztói mind közös osztók.

c) Gyakorlásuk

Számold ki:

$$(840; 1800) = (2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad (405; 900) = (3^4 \cdot 5; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = 3^2 \cdot 5$$

$$(160; 250; 630) = (2^5 \cdot 5; 2 \cdot 5^3; 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 5$$

Két szám szorzata 750. A legnagyobb közös osztójuk az 5. Mi lehet ez a számpár? (Lehet, hogy több is van!). (Érdemes a kanonikus alakot figyelni!)

$$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

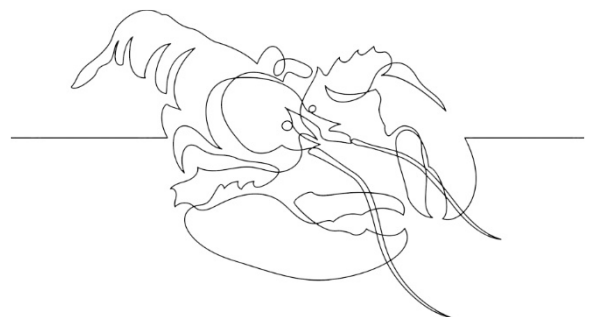
Mindkettőben nem lehet 2 és 3 sem, mert akkor az lnko-ban szerepelne a 2 v. a 3. 5-ös mindkettőben van, de az egyikben csak az 1. hatványon.

De összesen van 1 db. 2-es, 1 db. 3-as és 3 db. 5-ös a 750-ben

$A = 5 \cdot \text{valami}$ $B = 5^2 \cdot \text{valami}$.

A 2-est és a 3-ast ide-oda pakolhatjuk: $5 \cdot 2 \cdot 3$ és 5^2 , vagy $5 \cdot 2$ és $5^2 \cdot 3$

vagy $5 \cdot 3$ és $5^2 \cdot 2$, vagy 5 és $5^2 \cdot 2 \cdot 3$



Melyik az a *legkisebb kétjegyű* x szám, amelyre igaz a következő: $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; x) = 6$
 Mo.: $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; x) = 2 \cdot 3$. Vagyis $2 \cdot 3$ -nak kell benne lenni. De magasabb hatványon nem sem a 2, sem a 3. De ez még nem kétjegyű. Vagyis kell bele még egy prím, de 2; 3 és 5 már nem lehet, mert akkor nem 6 lenne az LNKO. Tehát a lehető legkisebb következő prím a 7. Vagyis: 42.

Melyik az a *legnagyobb kétjegyű* y szám, amelyre igaz a következő: $(2^5 \cdot 3^2; y) = 6$
 Mo.: $(2^5 \cdot 3^2; y) = 2 \cdot 3$. Vagyis $2 \cdot 3$ -nak kell benne lenni. De magasabb hatványon nem lehetnek. De ez még nem kétjegyű. Vagyis kell bele még egy prím, de 2; 3 már nem lehet, mert akkor nem 6 lenne az LNKO. Az 5-tel: 30, a 7-tel 42, a 11-gyel 66, 13-mal 78, a 17-tel már túl nagy, 5^2 -nel is és akkor már más típusú lehetőség nincs. Vagyis a jó a 78. (Vigyázat, 5^2 -nel még meg kellett vizsgálni, mert így vizsgálunk meg minden lehetőséget...)

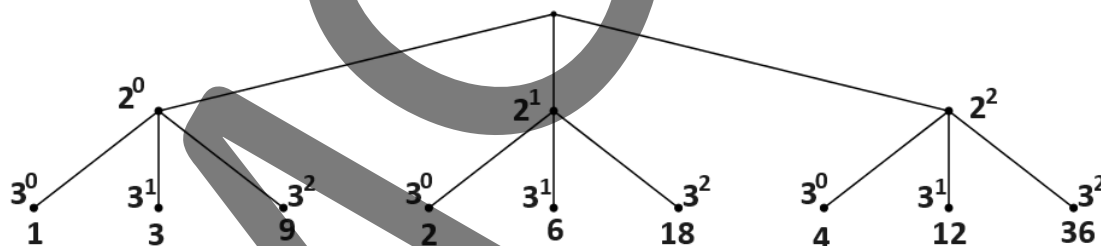
d) Az összes közös osztó fölírása:

Írd föl a következő két szám összes közös osztóját: $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $B = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

(Ha nem tudod, hogy kell: lásd órai anyag!)

Az LNKO kitüntetett közös osztó, vagyis minden közös osztó osztója az LNKO-nak és az ő osztói mind közös osztók.

Így először az LNKO kell, ami $2^2 \cdot 3^2$



10) Legkisebb közös többszörös

a) Bevezető

Írj le kettő olyan számot, amelyek többszöröse az $a = 3^2 \cdot 5^3$ -nak és $b = 2 \cdot 3^3$ -nak is (mindkettőnek!) Keresd meg a közös többszöröseik közül a legkisebbet is!

Mo.: $2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 11 \cdot 17$. A legkisebben nincs más prím, csak a 2, a 3 és az 5, de hogy többszöröse is legyen mindkettőnek: mindegyik a szereplő legnagyobb kitevőn:

$$2 \cdot 3^5 \cdot 5^4 = 2250$$

Kanonikus alak felhasználásával add meg a két szám legkisebb közös többszörösét.

$$[60; 405] = [2^2 \cdot 3 \cdot 5; 3^4 \cdot 5] = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$$



Add meg a $3^2 \cdot 5$ számnak 70-nel osztható legkisebb többszörösét!

$70=2 \cdot 5 \cdot 7$, vagyis a számból még hiányzik egy 2-es és egy 7-es: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Valójában ez a legkisebb közös többszörösük...

Add meg a 22-nek a 18-cal osztható legkisebb többszörösét!

$$[22;18]=[2 \cdot 11; 2 \cdot 3^2]=2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

b) Két vagy több szám legkisebb közös többszöröse (lkkt)

Számold ki az LNKO-t és az LKKT-t!

$$(36; 24) = (2^2 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$[36; 24] = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

$$(121; 33) = (11^2; 3 \cdot 11) = 11$$

$$[121; 33] = 11^2 \cdot 3 = 363$$

$$(256; 243) = (2^8; 3^5) = 1$$

$$[256; 243] = 2^8 \cdot 3^5 = 256 \cdot 243$$

Vegyük észre: a két szám relatív prím így az LKKT a szorzatuk!

$$(84; 48) = (2^2 \cdot 3 \cdot 7; 2^4 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3$$

$$[84; 48] = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$$

$$(80; 99) = (2^4 \cdot 5; 3^2 \cdot 11) = 1$$

$$[80; 99] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Vegyük észre: a két szám relatív prím így az LKKT a szorzatuk!

Írd le, hogy mitől kitüntetett közös többszörös a legkisebb közös többszörös!

Az LKKT így KITÜNTETETT KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS is, vagyis az LKKT minden közös többszörös osztója és neki minden többszöröse közös többszörös.

Több szám LNKO-ja, LKKT-je – kanonikus alakban add meg!

$$(2^3 \cdot 5^3; 3^2 \cdot 5^2; 2 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7) = 2 \cdot 5$$

$$[2^3 \cdot 5^3; 3^2 \cdot 5^2; 2 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7$$

$$(2^3 \cdot 5^3; 3^2 \cdot 5^2; 2^5 \cdot 3) = 1$$

(Pedig páronként nem relatív prímelek!)

$$[2^3 \cdot 5^3; 3^2 \cdot 5^2; 2^5 \cdot 3] = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

Itt már nem a szorzat az LKKT, mert nem kettő szám van csak!

11) Gyakorlás

a) ad a)

** Két szám négyzetének a különbsége 75. A legnagyobb közös osztójuk az 5. Melyik ez két szám?

Nyilván 5-tel osztható mindkettő. Először Próbálkozunk: 5 és 10 jó.

Több ilyen meg nem is lehet, mert növekszik a különbség.

(8. osztályban másképp is meg fogjuk tudni oldani!)

b) ad b)

Írj az x és az y helyre olyan számot, hogy igaz legyen az állítás. Vigyázz, lehet, hogy valamelyikből sok lehet!

$$(2^x \cdot 3^5 \cdot 7^2; 2^2 \cdot 3^y \cdot 11^3) = 2^2 \cdot 3^3.$$

x=2 v. több

y=3

$$[2^x \cdot 3^5 \cdot 7^2; 2^3 \cdot 3^y \cdot k] = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 7^3. \text{ (A } k \text{ egy prímszámhatvány)}$$

x=0-tól 3-ig bármi

y=7.

k=7³

** Két természetes szám összege 120. Az LNKO-juk 8. Mi lehet ez a két szám?

Ha 8 mindkettőt osztja, akkor ők 8x és 8y, úgy, hogy (x;y)=1. Az összegük 120, tehát

$$x + y = \frac{120}{8} = 15 \text{ Sok ilyen számpár van: (1;14) (2;13) (4;11) (7;8)}$$

Így: 8 és 112; 16 és 104; 32 és 88; 56 és 64.

$[x;y]=2^4 \cdot 3$ és $(x;y)=2$. Mi lehet az x és az y?

Mivel az LKKT-ben csak 2-es és 3-as van, ezért mindkettőben csak ilyen prím lehet.

Mivel 3-as nincs az LNKO-ban, ezért mindkettőben nem lehet egyszerre, de az LKKT-miatt az egyikben lennie kell.

LNKO=2, vagyis mindkettőben van 2-es. Ha mindkettőben 1-nél nagyobb kitevőn van, akkor az LNKO-ban is nagyobb lenne a 2 kitevője. De az LKKT miatt kell a 4. hatványon szerepelnie.

Tehát x=2; y=2⁴·3 vagy x=2·3 és y=2⁴

(x;y)=10 és [x;y]=700. Írj fel néhány ilyen számpárt!

$$(x;y)=2 \cdot 5; [x;y]=2^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

LKKT: csak 2, 5 és 7 szerepel.

LNKO: 2 és 5 mindkettőben, 7 csak az egyikben. 2 az egyikben 2. hatványon, a másikban az 1. hatványon. Az 5 ugyanígy.

pl: x=2²·5 y=2·5²·7; vagy: 2·5·7 y=2²·5² stb.

c)

*Mutasd meg: $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$

(Ötlet: írd minden tag helyett olyat (mindenhová ugyanaz kerül), ami nem nagyobb nála, de a végén könnyű összeadni az egészet!)

Mo.: Ha minden tag helyett $\frac{1}{200}$ -at írok, akkor a bal oldal csökken. De így is van belőle

100 db: $100 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2}$, vagyis a csökkentés után lett a bal oldal $\frac{1}{2}$. Így biztos, hogy

nagyobb volt $\frac{1}{2}$ -nél.

Mennyi a következő összeg: $200+201+202+\dots+399+400 = S$

Mo.: $200+201+202 + \dots + 399+400 = 1$ ló ára

$+ 400+ 399+398 + \dots + 201+200 = 1$ ló ára

$600+600+600 + \dots + 600+600 = 2$ ló ára

Ez 201 db. 600 dolláros, tehát 1 ló ára: $\frac{201 \cdot 600}{2} = 60300$.

Mennyi a következő összeg: $1-2+3-4+5-6 + \dots + 99-100 = S$

Párbaállítva: $(1-2)+(3-4)+\dots+(99-100) = 50 \cdot (-1) = -50$

d) ad d)

Hány olyan kétjegyű szám van, melynek minden számjegye különbözik?

(Ötlet: Néha egyszerűbb nem azt csinálni, amit konkrétan kérdeznek... Nem ebben olyan profik épp a kamaszok?)

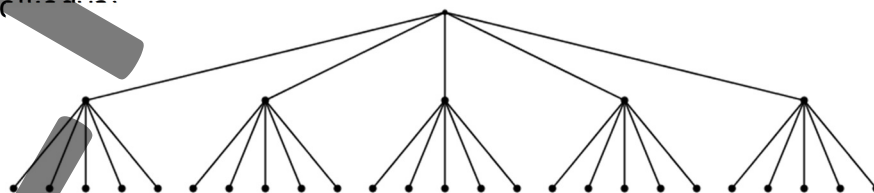
Egyszerűbb összeszámolni azokat, amelyekben azonosak a jegyek: 11, 22, ...99.

Kétjegyű 10-99-ig 90 db. van (!). Vagyis különböző jegyű kétjegyű: 81 db.

* Hány olyan 2 jegyű szám van, amely a számjegyeinek szorzata páratlan?

Mo.: csak akkor lesz a szorzat páratlan, ha nincs benne páros, vagyis a jegyek: 1;3;5;7;9.

Fa struktúrával gondold...



Első helyen 5 féle és a 2. helyen 5 féle jegy állhat: $5 \cdot 5 = 25$ db.

Írd le három olyan számot, amelyek páronként ugyan nem relatív prímek, de a három együtt már relatív prím-hármas ad. Érdekes kanonikus alakkal próbálkozni!

$(2 \cdot 3; 3 \cdot 5; 5 \cdot 2) = 1$

e) ad e)

* Hány olyan 2 jegyű szám van, amely a számjegyeinek szorzata páros?

Mo.: Akkor páros, ha van páros számjegy. De ez bonyolult. Azonban az előbb kiszámoltuk, hogy 25 olyan van, amelynél a jegyek szorzata páratlan, így $90 - 25 = 65$ olyan van, ahol páros a jegyek szorzata.

* Hány 0 áll a következő szám végén, ha elvégzem a szorzást: $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 200$

$$100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 200 = \frac{200!}{100!}$$

Elég az 5 kitevőjét figyelni, mert könnyen belátható, hogy 2-es prímtényezőből több van.

200!-ban: $[200/5] + [200/25] + [200/125] = 50 + 8 + 1 = 59$ az 5 kitevője.

100!-ban: $[100/5] + [100/25] = 20 + 4 = 24$ az 5 kitevője.

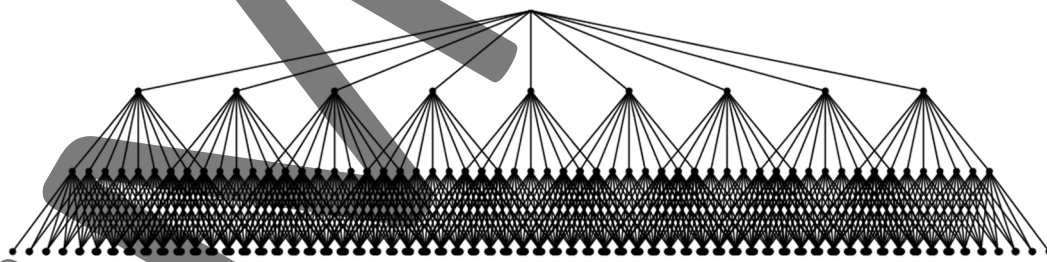
Tehát összesen 35 db. (2-5)-ös pár van, 35 0-ra végződik.

$18 | n$ és $20 | n$. Mi osztja biztosan még az n -t?

Az n a 18 és 20 többszöröse. A legkisebb közös többszörös kitüntetett közös többszörös, vagyis minden többszöröst oszt és neki minden többszöröse közös többszörös. $[18; 20] = 180$ Vagyis a 180 osztói mind jók.

** Hány olyan háromjegyű szám van, melynek minden számjegye különbözik?

Mo.: Fa struktúrában gondolkodva :-): 1. helyen 9 féle (1...9 mert 0 nem lehet), utána 9 féle (mert az első nem lehet, de 0 már igen), a 3. helyen 8 féle, mert az első és a második nem lehet.



Vagyis $9 \cdot 8 \cdot 7 = 648$ ilyen szám van.

II) Az egész számok

1) Definíció - alapok

a) Definíció

Írd föl az egész számok órán tanult definícióját!

Az egész számok azok a számok, amelyek fölírhatók 2 természetes szám különbségeként.

Írj föl 7 egymást követő egész számot úgy, hogy az összegük 0 legyen!

$-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$

Írj föl 4 egymást követő egész számot úgy, hogy a szorzatuk 0 legyen!

-1;0;1;2

Egy páratlan természetes számot megszoroztam 8-cal. Hányszorosára növekedett az osztóinak a száma? Magyarázd is meg...!

Mivel a kanonikus alakban nem volt 2, ezért 2^3 került a kanonikus alakba, ami a fánál négyfelé ágazik, vagyis 4-szeres lett az osztók száma.

b) Az egész számok halmazának a jele: \mathbf{Z} vagy \mathbb{Z}

Írd át 2-es számrendszerbe a 311-et!

$311_{10}=100110111_2$

Hány négyzetszám van 1-től 10 000 –ig? (A négyzetszámok: 0, 1, 4, 9, 16, 25..., vagyis a természetes számok négyzetei!)

$100 \cdot 100 = 10\,000$, ezért a 0-tól 100-ig tartó számok négyzetei lesznek a keresett négyzetszámok, ami összesen 101 db.

Egy szám számjegyeinek összege 15. Miért nem lehet négyzetszám? (A „csak” nem kielégítő válasz 😊)

Mivel az összeg 15, ezért 3-mal osztható, vagyis 3 szerepel a kanonikus alakban. De akkor 9-nek osztania kell a négyzetét. De 9 nem osztja a 15-öt, ezért nem lehet négyzetszám.

c) Hányan vannak az egész számok?

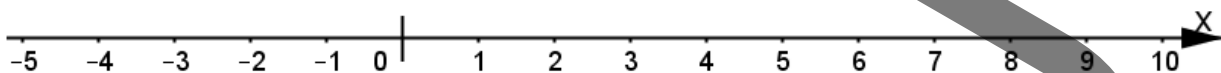
Adj ki egy utasítást egy bálban, hogy számolás nélkül megtudhassuk, hogy ugyanannyi fiú van-e, mint lány! Írd le!

Mo.: Minden fiú fogja meg egy lány kezét. Ha nem marad ki se lány, se fiú, akkor ugyanannyian vannak.

Miért nem lehet-e egy szám számjegyeinek szorzata 154? (A „csak” nem elég válasz 😊)
 $154=2 \cdot 7 \cdot 11$. Vagyis kellene egy 11-es számjegy is...

d) Ábrázolásuk számegegyenesen.

Ábrázold számegegyenesen -5 -től 10 -ig az egész számokat! Egység: 1 cm.



Hány db. osztója van az $n=2^{10} \cdot 10^5 \cdot 27^4$ számnak? (Vigyázz, ez még nem kanonikus alak!)
 $n=2^{15} \cdot 3^{12} \cdot 5^5$.

$$d(n)=(15+1)(12+1)(5+1)=16 \cdot 13 \cdot 6=1\ 248$$

$300|n$ és $1050|n$. Mit mondhatunk, mivel osztható biztosan az n ?

Az n a 300 és 1050 többszöröse. A legkisebb közös többszörös kitüntetett közös többszörös, vagyis minden többszöröst oszt és neki minden többszöröse közös többszörös. $[2^2 \cdot 3 \cdot 5^2; 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7]=2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ osztói mind jók.

e) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ Vagyis \mathbf{N} minden eleme \mathbf{Z} -nek is eleme.

* A $26\ 460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ számnak hány olyan osztója van, amely osztó osztható 20 -szal. (Egy kis segítség: $20=2^2 \cdot 5$)

Kiveszem belőle a $2^2 \cdot 5$ -öt (a 20 -at). Marad $3^3 \cdot 7^2$. Ennek az osztóit ha megszorozom 20 -szal, akkor kapom meg a 20 -szal osztható osztókat. Vagyis $(3+1)(2+1)=12$ db. 20 -szal osztható osztó van.

2) A részhalmazokról bővebben

Írd föl a részhalmaz, illetve a valódi részhalmaz definícióját szavakkal is, majd jelekkel is! (Lásd munkatankönyv...)

Definíció – Részhalmaz

Adott H halmaz. (Azt mondjuk, hogy) ... az A halmaz részhalmaza H halmaznak, ha az A halmaz minden eleme eleme a H -nak is.

$$A \subseteq H \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in H)$$

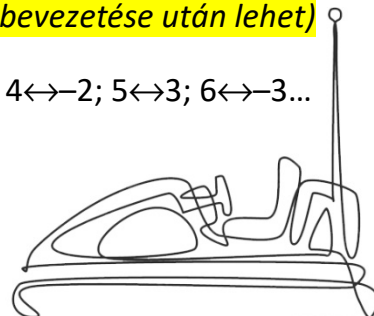
Definíció – Valódi részhalmaz: Adott H halmaz.

... az A valódi részhalmaza H halmaznak, ha A minden eleme eleme a H -nak is, de van olyan eleme H -nak, amely nem eleme az A halmaznak.

$$A \subset H \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \rightarrow y \notin A)$$

** Adj ki egy utasítást egy párbaállítós utasítást a természetes számok és a páros számok között, hogy kiderüljön, bármennyire hihetetlen is: valóban ugyanannyi természetes szám van, ahány páros természetes szám! (Ezt majd az egészrész bevezetése után lehet)

$$n \leftrightarrow \left[\frac{n+1}{2} \right] \cdot (-1)^{n+1}. \text{ Próbáljuk ki: } 0 \leftrightarrow 0; 1 \leftrightarrow 1; 2 \leftrightarrow -1; 3 \leftrightarrow 2; 4 \leftrightarrow -2; 5 \leftrightarrow 3; 6 \leftrightarrow -3 \dots$$



$[2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^6 \cdot 13; x] = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^7 \cdot 13$. (LKKT). Mi lehet az x ? (Írd el az összes lehetséges megoldást!)

Mo: $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{0-2} \cdot 11^7 \cdot 13^{0-1}$

Vagyis 6 ilyen lehet összesen!

$$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 11^7 \cdot 13^0 \quad 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 11^7 \cdot 13^1$$

$$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 11^7 \cdot 13^0 \quad 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 11^7 \cdot 13^1$$

$$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^7 \cdot 13^0 \quad 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^7 \cdot 13^1$$

3) A – mindig – elvégezhető műveletek az egész számok **körében**

Mely műveletek végezhetők el mindig az egész számok körében?

Az összeadás, szorzás és kivonás.

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{20-15}{24} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{27}{7} : 3 = \frac{27/3}{7} = \frac{9}{7}$$

III) A racionális számok és egy kicsit a valósokról

1) Definíció: racionális számok

a) Definíció

Írd le a racionális számok definícióját:

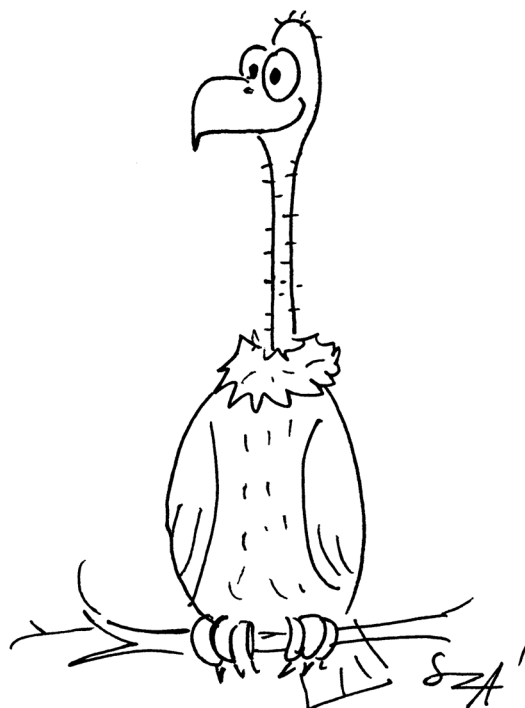
A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

$$\left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{18}\right) \left(1 + \frac{1}{19}\right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \dots \frac{18}{17} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{20}{19} = \frac{20}{5} = 4$$

b) Melyek ezek?

Írj föl három különböző racionális számot: egyet tört alakban, másikat tizedes tört alakban, a harmadikat végtelen szakaszos tizedes tört alakban.

$$\frac{17}{23} \quad 2,0\bar{3} \quad 5,1\bar{2}48$$



Írd föl a $2,3\dot{2}$ -öt tört alakban!

$$- 2,32323232323232323232... = S$$

$$\underline{232, 323232323232323232...} = 100S$$

$$230,0000 = 99S$$

$$S = \frac{230}{99}$$

Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$-\frac{3}{5}; 0,\dot{6}; -\frac{2}{3}; -1; -\frac{5}{3}; 0,035; -1,01; -0,99; 0,66$$

$$-\frac{5}{3} < -1,01 < -1 < -0,99 < -\frac{3}{5} < -\frac{2}{3} < 0,035 < 0,66 < 0,6$$

c) Jelük

A racionális számok halmazának a jele: **Q**.

(quotiens: hányszor, mennyiszor) Ratio: arány.

d) Ábrázoljuk számegeyenesen



Írj a 2,6-hoz közeli racionális számot: 2,7

Most írd meg egy olyat, amely még közelebb van hozzá: $\frac{2,6+2,7}{2} = 2,65$

(Kettejük között „félúton”)

És egy még közelebbit: $\frac{2,6+2,65}{2} = 2,625$

* Add össze: $2+5+8+11+14+\dots+302=S$

Mo.: $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 299 + 302 = 1$ ló ára

$+ \underline{302+299+296+293+\dots+5+2} = 1$ ló ára

$304+304+304+304+\dots+304+304 = 2$ ló ára

Adjunk minden első sorbeli számhoz 1-et és osszuk 3-mal: megvan a sorszám: tehát 101 db.

101 db. 304 dollár, tehát 1 ló ára: $\frac{101 \cdot 304}{2} = 15352$.

Melyik az a szám, amelyet ha négyzetre emelek:

$2^4 \cdot 3^6$ -t kapok: $2^2 \cdot 3^3$ -

$2^4 \cdot 5^6 \cdot 11^{10}$ -t kapok: $2^2 \cdot 5^3 \cdot 11^5$

$3^2 \cdot 5^8 \cdot 11^{12} \cdot 13^4 \cdot 23^{10}$ -t kapok: $3 \cdot 5^4 \cdot 11^6 \cdot 13^2 \cdot 23^5$ -t

Számold ki a családotod magasságának átlagát cm-ben!

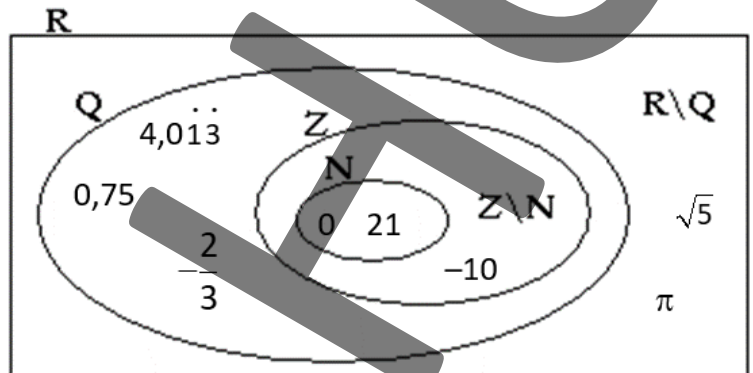
Miért nincs olyan természetes szám, amelyet négyzetre emelve: $2^4 \cdot 5^6 \cdot 11^5$ -t kapok?
Mert akkor párosnak kellene lennie minden kitevőnek.

Mit állapíthatsz meg ezek után a négyzetszámok kanonikus alakjában a kitevőkre nézve?

A négyzetszámok kanonikus alakjában a kitevők párosak, és ahol minden kitevő páros, az négyzetszám.

2) Az eddig megismert számhalmazok viszonya

Rajzold fel az órán is felrajzolt Venn-diagramot mely az eddig tanult számköröket, testeket ábrázolja, írd a halmazokra a nevüket, és írd minden területre két-két számot!



3) A racionális számok felírása

Oszd el a 10-et 7-tel! 7 -tel osztva egy természetes számot milyen hosszú lehet a keletkezett szakaszos tizedes törtben a szakasz hossza? Miért?

$10:7=1,428571...$

30

20

60

40

50

10

3 Megjelent újra a 3-as maradék. Vagyis elkezd ismétlődni

Nyilván 7-tel osztva ha 0 a maradék, akkor vége az osztásnak.

Ha nem 0, akkor 1, 2, 3, 4, 5, 6 lehet a maradék, vagyis a legkésőbb 7. lépésnél valamelyik megjelenik újra.

** Összeszorzom 1-től 40-ig a természetes számokat. Levágom a végéről a 0-kat. Az így kapott szám miért nem végződhet-e 7-re?

Mert több 2-es van, mint 5-ös prímtényező a kanonikus alakjában. Így, ha a 0-kat levágtam, akkor még marad 2-es prímtényező, vagyis páros a legutolsó nem 0 jegy.

Miért nem lehet egy szám számjegyeinek szorzata: 1045? (ötlet, nézd meg, mivel osztható a jegyek szorzata...)

$11 \nmid 1045$, vagyis kellene lennie egy 11-es számjegynek... De olyan nincs...

- 4) Az elvégezhető műveletek a racionális számok testében
 Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás (alattuk jegyzetelhetsz, próbálkozhatsz)!
 Vigyázz, sok becsapós van köztük: figyelj a negatív számokat, és a 0-hoz közel eső számokat is...

A racionális számok felírhatók végtelen szakaszos tizedes tört alakban. IGAZ (2.30000 :-)

Egy tört akkor negatív, ha a számláló és nevező előjele különbözik. IGAZ

Egy tört kisebb a reciprokánál. HAMIS pl.: $4/3$

A racionális számok testéből nem vezet ki az osztás. IGAZ

Egy negatív szám biztos kisebb a reciprokánál. HAMIS (pl.: $-1/3$)

Ami felírható két egész hányadosaként, az racionális. IGAZ

Egy szám és ellentettjének összege 0. IGAZ

A természetes számok köréből kivezet a kivonás. IGAZ

Két olyan szám van, mely egyenlő a reciprokával. IGAZ

Ha egy tört számlálója nagyobb, mint a nevezője, akkor ő 1-nél nagyobb: HAMIS $-\frac{5}{3}$

(De ha a számláló tartalmazza az előjelet, akkor igaz.)

A 0 reciproka 0. HAMIS (mert 0-val nem osztunk)

Amit fel tudok írni végtelen tizedes tört alakban, az racionális. HAMIS (mert a végtelen nem szakaszos tizedes tört már nem racionális)

Bármely egész előáll két egész hányadosaként. IGAZ

Számold át 10-es számrendszerbe: $1100111_2 = 103_{10}$

$$\begin{array}{cccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}_2$$

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

Számold át az 1512 -öt 5-ös számrendszerbe! $1512_{10} = 22022_5$

A legnagyobb használt helyiérték a 625-ösök.

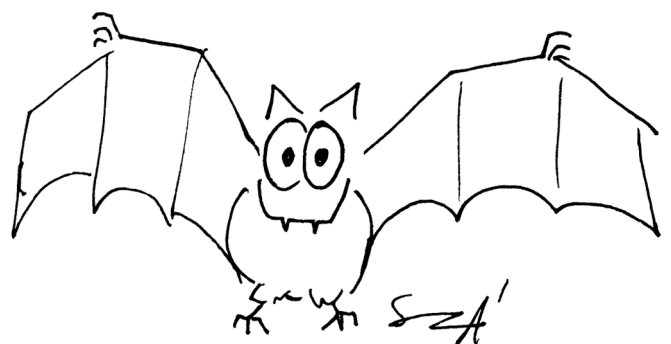
$$1512 - 2 \cdot 625 = 262$$

$$262 - 2 \cdot 125 = 12$$

25-ös nincs.

$$12 - 2 \cdot 5 = 2$$

$$2 - 2 \cdot 1 = 0$$



5) Valóságok

Tedd sorrendbe a következő számhalmazok jelét úgy, hogy igaz legyen a köztük tett részhalmaz jel!

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Írj ide két, nem racionális valós számot – vagyis *irracionális* számot:

π és $\sqrt{2}$

IV) Egy kicsit a halmazokról

1) Halmaz megadása:

a) Elemek felsorolása

Írd föl a 20-szal osztható kétjegyűek halmazát: $H = \{20; 40; 60; 80\}$

b) „A közelebbi osztály, és az elemekre jellemző vonás”

Írd föl a kört definiáló halmazt (ha nem megy fejből: ld. füzet!)

Adott Q pont és r sugár. $K = \{P \in S \mid d(P; Q) = r\}$

2) A Venn-diagram

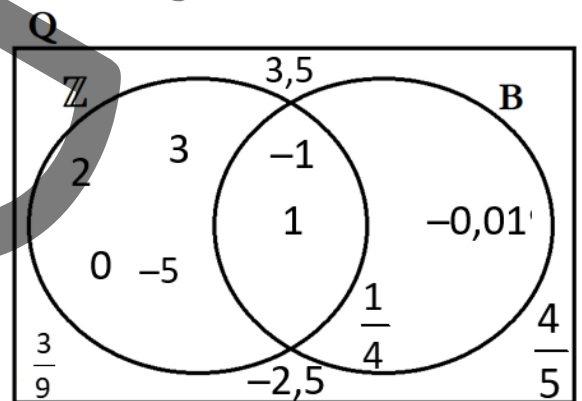
\mathbb{Z} = az egész számok, B = az egész számok reciprocai. Alaphalmaz: \mathbb{Q} (racionális számok)

Írd be a megfelelő helyre a következő számokat:

$\frac{4}{5}$; 2; 3; -2,5; 1; 0; -1; $\frac{1}{4}$; -0,01

$\frac{3}{9}$; -5; 3,5

Vizsgáld meg jól, hogy hová kell írnod őket!

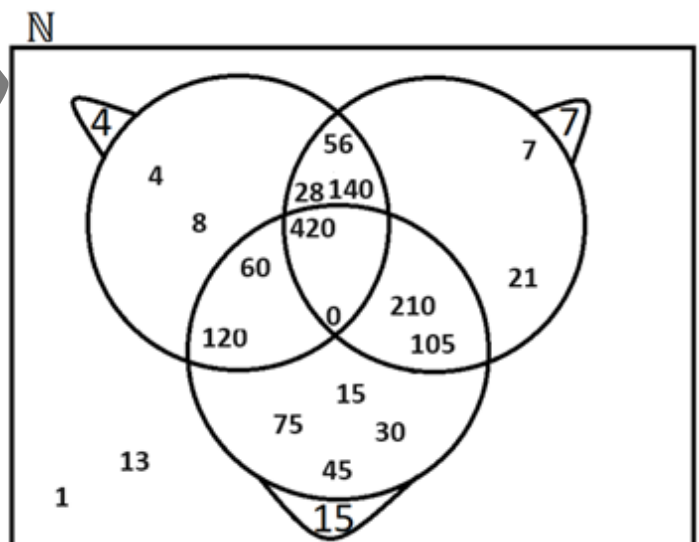


$A=4$ -gyel $B=7$ -tel $C=15$ -tel osztható természetes számok halmaza.

Összesen 8 különböző helyre lehet írni számot. Írd be a következő számokat a megfelelő helyekre:

13; 8; 30; 105; 140; 45; 28; 210; 420; 1; 0; 21; 4; 7; 15; 75; 60; 120; 56

Vedd észre, hogy középen a legkisebb közös többszörös áll, és annak a többszörösei állhatnak ott még.



Rajzoljuk fel az A=6-tal, B=10-zel, C=15-tel osztható számok halmazát.

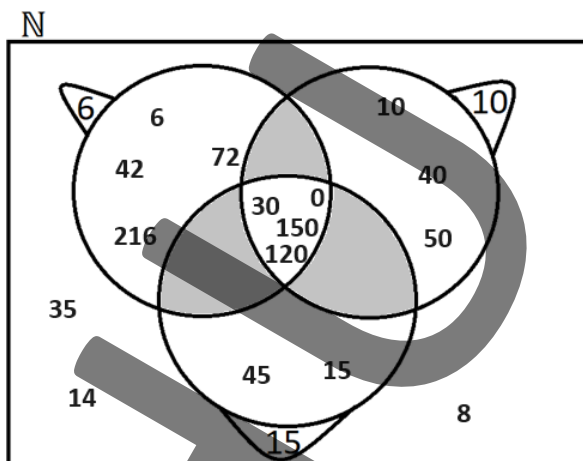
Alaphalmaz: \mathbb{N} .

Írd be a következő számokat a megfelelő helyekre:

6; 10; 14; 30, 120; 0; 40; 42; 45; 8; 35; 216; 150; 72; 15; 50

Satírozd be azokat a területeket, ahová nem lehet számot írni!

Vedd észre, hogy középen a legkisebb közös többszörös áll, és annak a többszörösei állhatnak ott még.



3) Halmaznak minden típusból csak egy eleme van

Írd föl a π számjegyeinek a halmazát! A π néhány tizedesjegyre:

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 ...

$H = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

V) Gyakorlás

Eldöntendő állítások: (Igaz/Hamis)

Ami racionális, az valós is.	Igaz
Van olyan egész, amely nem racionális.	Hamis (minden egész racionális)
Ami egész, a racionális is.	Igaz
Minden egész felírható két egész szám hányadosaként.	Igaz
A -3 irracionális szám.	Hamis (ő racionális: két egész hányadosa)
$0/13 = 0$	Igaz
Nincs olyan valós szám, amelyik felírható két egész hányadosaként.	Hamis (mert a racionálisok is valósak)
A π felírható két egész szám hányadosaként.	Hamis (mert ő irrac)
Két racionális különbsége valós szám.	Igaz
Ami 6-nak is és 10-nek is többszöröse, az 30-nak a többszöröse.	Igaz (mert 30 az LKKT-jük)
Ha az egészek halmazából elveszem a racionálisok halmazát: \emptyset -t kapok.	Igaz
Van két olyan valós, amelynek különbsége természetes.	Igaz
Két egész összege racionális.	Igaz
Két természetes hányadosa nem racionális.	Hamis (de, mert egész, tehát racionális is.)
Van olyan racionális, amely nem írható föl két egész hányadosaként.	Hamis

VI) Egyéb műveletek és relációk a racionális számokon

1) Szám ellentettje és reciproka

5 ellentettje: -5 5 reciproka: $\frac{1}{5}$ $-\frac{3}{7}$ ellentettje: $\frac{3}{7}$ $-\frac{3}{7}$ reciproka: $-\frac{7}{3}$

$-2,4$ ellentettje: $2,4$ $-2,4$ reciproka: $-\frac{1}{2,4} = -\frac{5}{12}$ $0,01$ ellentettje: $-0,01$

$0,01$ reciproka: $\frac{1}{0,01}$ Bővítve 100-zal a törtet: $\frac{1}{0,01} = \frac{100}{1} = 100$

2) Szám és abszolútértéke

Írd le a szám abszolútértékének a definícióját!

Egy nemnegatív szám abszolútértéke önmaga, egy negatívé a -1 -szerese:

Számold ki:

$$|-5| + |-8| - |-17| = 5 + 8 - 17 = -4$$

$$|-5-8| + |-17| = 13 + 17 = 30$$

$$|-5-|8-17|| = |-5-9| = 14$$

$$||-5-8|-17| = |13-17| = 4$$

Mely számok azok, melyet összeadva az abszolútértékükkel 0-át kapunk?

Mo.: a nem pozitívok. A pozitívokhoz hozzáadva az absz. értéküket: a duplájukat kapjuk.

3) Szám egészrésze

a) Írd le az egészrész definícióját!

Def.: Egy szám egészrésze a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.

b) Add meg a következő számok egészrészét!

$$[2,8] = 2$$

$$[-4,2] = -5$$

$$[13] = 13$$

$$[0,54] = 0$$

$$[-0,28] = -1$$

$$\left[\frac{45}{7} \right] = 6$$

$$\left[-\frac{59}{8} \right] = -8$$

$$[-2,8] = -3$$

$$[-0,48] = -1$$

$$[-123] = -123$$

$$\left[5\frac{7}{9} \right] = 5$$

$$\left[-2\frac{4}{5} \right] = -3$$

$$\left[\frac{5}{8} \right] = 0$$

$$\left[\frac{38}{7} \right] = 5$$

$$\left[-\frac{5}{8} \right] = -1$$

$$\left[-\frac{38}{7} \right] = -6$$

$$[3,9] = 4$$

c) Számold ki:

$[23,5] - [20,7] - [23,5 - 20,7] = 23 - 20 - [2,8] = 1$, vagyis egészrészek különbsége nem egyenlő a különbségek egészrészével. Nem mindegy, milyen sorrendben süti meg anyu a süti hozzávalóit.

$$[12,8 + 2,3] = [15,1] = 15$$

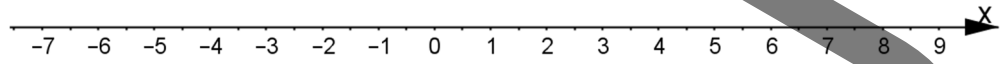
$$[12,8] + [2,3] = 12 + 2 = 14$$

$$[-1,6 - 2,2] = [-3,8] = -4$$

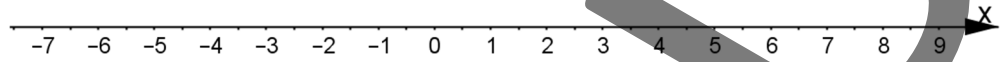
$$[-1,6] + [-2,2] = -5$$

d) Add meg intervallummal, és ábrázold is:

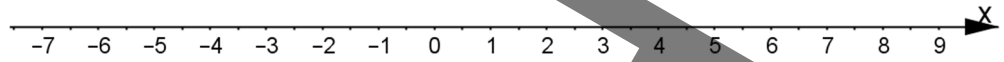
$$-4 < x \leq 3 \quad x \in]-4;3]$$



$$0 < x < 6 \quad x \in]0;6[$$



$$-7 \leq x < 5 \quad x \in [-7;5[$$



e) Meg van adva egy szám egészrésze. Milyen intervallumba esik a szám?

$$[x]=8 \quad x \in [8;9[$$

$$[x]=-8 \quad x \in [-8;-7[$$

Ellenőrizd is le egy-egy egésszel és egy-egy megfelelő nem egésszel, hogy jó-e, amit írtál!

4) Szám törtresze

Számold ki:

$$\{12,35\}=0,35$$

$$\{2,05\}=0,05$$

$$\{10,0\}=0$$

$$\{-2,3\}=0,7$$

$$\{0,025\}=0,025$$

$$\{-4,56\}=0,44$$

$$\{-0,85\}=0,15$$

$$\{-13\}=0$$

$$\left\{ \frac{17}{3} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$\left\{ \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$

$$\left\{ -\frac{27}{5} \right\} = \frac{3}{5}$$

$$\left\{ -\frac{3}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

Melyik az a szám, amelynek az egészrésze 5, a törtresze 0,3?

5,3

Melyik az a legnagyobb negatív szám, amelynek a törtresze 0,8?

-0,2

Melyik az a szám, amely egészrésze -7, törtresze 0,3. A -6,7

$$[[[1,1]+0,1]+0,2]= [[1+0,1]+0,2]= [1+0,2]=1$$

$$\{[-1,1]\}+ \{[-1,1]\}+ \{[-1,2]\}+ \{[-1,2]\}+ \{[-1,3]\}+ \{[-1,3]\} =$$

$$=0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

5) Szám szignuma

$$\text{sgn}([1512,34^2])=1$$

$$\{\text{sgn}(-12345,4)\}=\{-1\}=0$$

Veszek egy valós számot. Négyzetre emelem, hozzáadok 1,8-at. Mi lehet a végeredmény szignuma és miért?

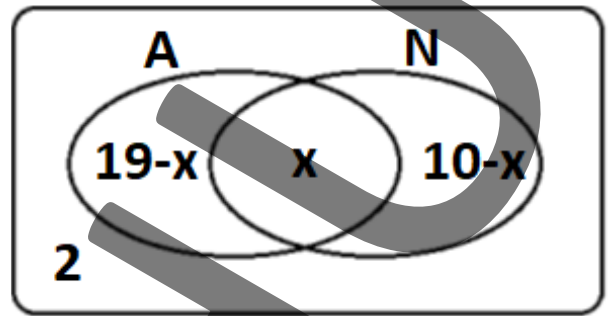
Egy valós négyzete 0, vagy nagyobb. Ha hozzáadok 1,8-at: 1,8 v. nagyobb szám lesz.

Tehát a szignum: 1.

Hasonlítsd össze a következő számokat: (<; =; >)

$$-13,01 > -13,0101 \quad 0,506 > 0,5006 \quad -8,011 > -8,012 \quad -0,005 < -0,0005$$

Egy 25 fős osztályban ketten fel vannak mentve nyelvből, a többi diák legalább egy nyelvet tanul: Angolt vagy Németet. Van, aki mindkettőt. 19-en tanulnak angolt, 10-en németet. Hányan tanulnak csak Angolt, csak Németet, illetve mindkettőt? Rajzolj!



$$19-x+x+10-x=29-x=25-2. \quad x=6$$

Tehát: csak Angol: 13; csak Német: 4, mindkettőt: 6.

VII) Jelek

1) Jelek neve

Az órai anyag megtanulása és egy kis pihenés után írd fel a következő jeleket, vagy írd oda a nevüket!

minden: \forall

és: \wedge

olyan, hogy: \rightarrow

„-ből” következnek: \Rightarrow

bármely: \forall

van: \exists

akkor és csak akkor: \Leftrightarrow

nem eleme: \notin

\emptyset Üres halmaz

\mathbb{R}^+ : Pozitív valósak

\in : eleme

létezik: \exists

pontosan akkor: \Leftrightarrow

egyértelműen létezik: $\exists!$

vagy: \vee

eleme: \in

Nincs olyan, hogy: $\nexists \dots \rightarrow$

Pontosan egy olyan van: $\exists!$

Nem létezik: \nexists

$\exists!$ Egyértelműen létezik; Pontosan egy olyan van

\Leftrightarrow akkor és csak akkor; pontosan akkor

\forall minden; bármely

2) Írd melléjük az értéket

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\}\} = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

3) Számhalmazok kapcsolata

Írd le a következő két kivonások eredményét:

$$\{\text{dobókockával dobható számok}\} \setminus \{\text{dobókockával dobható prímek}\} = \{1; 4; 6\}$$

$$\{\text{dobókockával dobható számok}\} \setminus \mathbb{N} = \{\}$$

Írd le szavaiddal a végeredményt: $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} = A$ nem egész racionálisok.

4) Egyéb jelek a számoknál

5) Gyakorlás

Írd melléjük szavakkal a „magyarra fordításukat”. Ami állítás, az mind igaz!

$a \notin \mathbf{Z}$ Az „a” nem egész

$\forall x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbf{N}$ Ha egy szám egész, akkor a négyzete természetes. Szébben: Egy egész szám négyzete természetes.

$x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}$ A természetes számok egészek. v. Ami természetes, az egész is.

$\exists! a \in \mathbf{Q} \rightarrow a^2 \leq 0$ Pontosan egy olyan racionális van, aminek a négyzete nem nagyobb 0-nál.

$\nexists b \in \mathbf{Z} \rightarrow b^2 \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ Nincs olyan egész, aminek a négyzete negatív (lenne).

$\nexists a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow [a] = a$ Nincs olyan irracionális szám, amely egyenlő az egészrészével.

$\nexists b \in \mathbf{Z} \rightarrow b \notin \mathbf{Q}$ Nincs olyan egész, amely nem racionális. v. Minden egész racionális is.

$(x \in \mathbf{N}^+ \wedge x^2 > 25) \Rightarrow x > 5$ Ha egy pozitív természetes négyzete nagyobb 25-nél, akkor ő nagyobb 5-nél.

$x; y \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow x/y \in \mathbf{R}$ Két pozitív természetes hányadosa valós.

$\exists x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 < x$ Van olyan valós, amely nagyobb a négyzeténél. (Van a négyzeténél nagyobb valós.)

$7|a \wedge 5|a \Rightarrow 35|a$ Ha 5 és 7 oszt egy számot, akkor 35 is osztja azt.

Írd melléjük v. alájuk a „lefordításukat” jelekre, vagyis jelekkel írd le őket. (Ha állítás, akkor az igaz.)

Az x nem természetes szám.

$x \notin \mathbf{N}$

Ha egy szám osztható 5-tel és 3-mal, akkor 15-tel is.

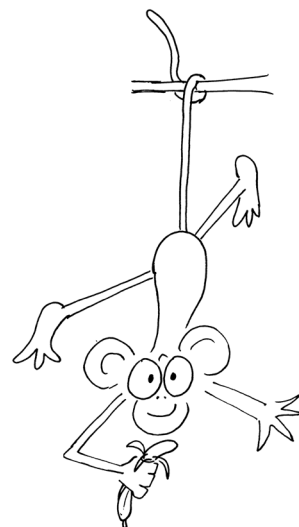
$5|a \wedge 3|a \Rightarrow 15|a$

Két egész összege egész.

$m; n \in \mathbf{Z} \Rightarrow m+n \in \mathbf{Z}$

Van olyan racionális szám, amely természetes is.

$\exists x \in \mathbf{R} \rightarrow x \in \mathbf{N}$



Nincs olyan valós, amelyik négyzete negatív lenne.

$$\nexists x \in \mathbf{R} \rightarrow x^2 < 0$$

Bármely nem nulla racionális szám reciproka is az.

$$\forall x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow 1/x \in \mathbf{Q}$$

Egyértelműen létezik egy olyan természetes szám, melynek reciproka is természetes szám.

$$\exists! x \in \mathbf{N} \rightarrow 1/x \in \mathbf{N}$$

Bármely két természetes különbsége egész.

$$\forall x, y \in \mathbf{N} \Rightarrow (x - y) \in \mathbf{Z}$$

Minden racionális szám négyzete racionális.

$$x \in \mathbf{Q} \Rightarrow x^2 \in \mathbf{Q}$$

Ha egy szám nem egész, akkor nem is természetes.

$$x \notin \mathbf{Z} \Rightarrow x \notin \mathbf{N} \quad \vee \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \Rightarrow x \notin \mathbf{N}$$

Bármely 1-nél nagyobb szám négyzete nagyobb 1-nél.

$$(x \in \mathbf{R} \wedge 1 < x) \Rightarrow 1 < x^2$$

Ha egy szám egész, akkor a négyzete is az.

$$x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbf{Z}$$

Pontosan egy olyan nem nulla természetes van, amely egyenlő a négyzetével.

$$\exists! x \in \mathbf{N}^+ \rightarrow x^2 = x$$

HATVÁNYOZÁS

I) Definíció és azonosságok

1) Bevezetés

Írd a szorzatot hatványalakban!

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \quad (-5)(-5)(-5)(-5) = (-5)^4 = 5^4$$

Írd fel a hatványt szorzat alakban és számold is ki!

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \quad 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

2) Definíció

$$(2^3)^2 = (2^3) \cdot (2^3) = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6$$

$$(5^3)^3 = (5^3)(5^3)(5^3) = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^9$$

Írd föl jelekkel (minden állítás igaz!)

Egyértelműn létezik olyan egész, amelynek a köbe -8 .

$$\exists ! x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^3 = -8$$

Van olyan természetes szám, melynek a reciproka is természetes.

$$\exists y \in \mathbb{N} \rightarrow \frac{1}{y} \in \mathbb{N}$$

Bármely nem 0 racionális szám reciproka is racionális.

$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$$

Ha egy szám törtrésze 0, akkor az a szám egész.

$$\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Nincs olyan szám, mely nagyobb az abszolút értékénél.

$$\nexists x \in \mathbb{R} \rightarrow x > |x|$$

Az a és b egész. Ekkor azt mondjuk, hogy $a \mid b$ akkor és csak akkor, ha van olyan egész,

mellyel a -t megszorozva b -t kapunk. (Ez az oszthatóság definíciója!)

$$a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Ekkor: } \dots a \mid b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \cdot a = b$$

Írd föl a valódi részhalmaz definícióját jelekkel!

$$A \subset H \Leftrightarrow ((x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \rightarrow y \notin A))$$

3) Hatvány szorzat alakban – szorzat hatvány alakban

Írd föl szorzat formájában, és számold is ki, ahol szám van. (pl.: $2^5=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=32$)

$$1^4=1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1=1$$

$$a^3=a \cdot a \cdot a$$

$$0^3=0 \cdot 0 \cdot 0=0$$

$$(-3)^4=(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)=81 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{125} \quad (-5)^2=(-5) \cdot (-5)=25$$

$$(-2)^7=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=-2^7=-128 \quad (-7)^3=(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)=-343$$

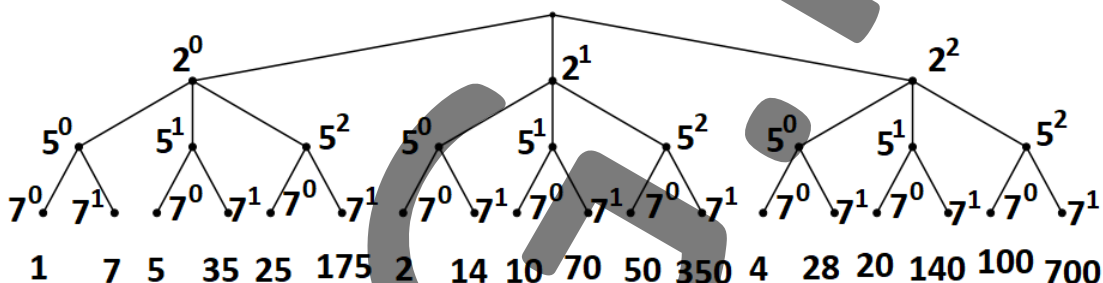
Számold ki kanonikus alakra hozással:

$$(98000 ; 7700)=(2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 ; 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11)=2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$[98000 ; 7700]=2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

Add meg a fenti két szám közös osztóit fa struktúrával (vagyis az LNKO osztóit).

A 2 miatt 3 felé, az 5 miatt 3 felé, a 7 miatt 2 felé ágazik a fa. Vagyis 18 kimenet lesz.



Mi lehet a „b”, ha:

$$(2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 ; b)=2^3 \cdot 5 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \quad \text{és} \quad [2^3 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 11^4 ; b]=2^4 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7^{13} \cdot 11^4 \cdot 13$$

$$b=2^4 \cdot 3^{0-1} \cdot 5^1 \cdot 7^{13} \cdot 11^{2-4} \cdot 13$$

Írd föl hatványalakok szorzataként:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x=3^4 \cdot x^3$$

$$(-2) \cdot y \cdot (-2) \cdot y \cdot (-2) \cdot y \cdot y=-2^3 \cdot y^4$$

4) Azonos alapú hatványok szorzata

a) Írd föl a szorzatot hatványalakban – és fejben számold is ki azt, amelyiket még tanultuk!

$$2^5 \cdot 2^3=2^8=256$$

$$3 \cdot 3^2 \cdot 3^4=3^7$$

$$5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4=5^9$$

$$10^8 \cdot 10^3=10^{11}$$

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5=2^{15}$$

$$3 \cdot 3^2=3^3=27$$

b) Egészítsd ki a mondókát! Azonos alapú... - lásd munkatankönyv!

Az azonos alapúakat vond össze (pl.: $2^5 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 2^8 \cdot 5^4$), növekvő prímsorrend!
(„kanonikus alak szerű” legyen)

$$3^5 \cdot 5^3 \cdot 3^{10} \cdot 3 \cdot 5^2 = 3^{16} \cdot 5^5$$

$$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^{10} \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^{11}$$

$$a^3 \cdot 5^3 \cdot a^{10} \cdot a \cdot 5^2 = 5^5 \cdot a^{14}$$

$$2^3 \cdot x^3 \cdot 5^1 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot 2 \cdot x = 2^5 \cdot 5^2 \cdot x^9$$

Végezd el a műveletet. Ha kell, először határozd meg az előjelet!

$$3^4 \cdot 3^8 \cdot (-3)^8 = 3^{20}$$

$$8^4 \cdot (-8)^9 = -8^{13}$$

$$a^4 \cdot a^8 \cdot a^{12} \cdot a = a^{25}$$

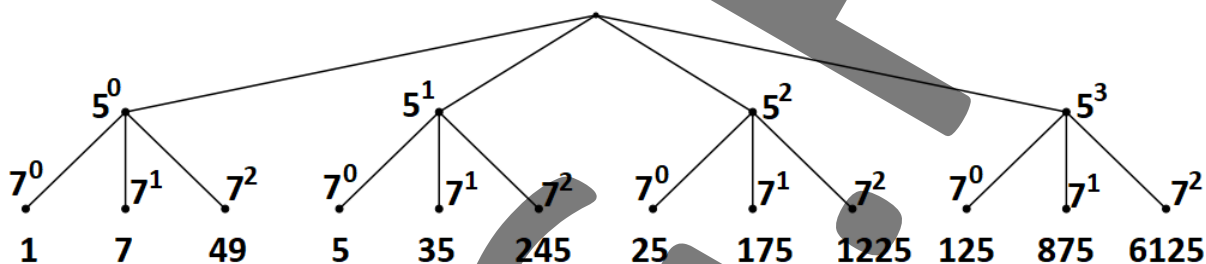
$$c^k \cdot c^m = c^{k+m}$$

$$5 \cdot (-5)^4 \cdot 5^8 = 5^{13}$$

$$a^k \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a = a^{k+7}$$

Hány osztója van a következő számnak: $5^3 \cdot 7^2$? Írd is le őket fa struktúrával!

$d(5^3 \cdot 7^2) = (3+1)(2+1) = 12$ Az 5 miatt négyfelé, a 7 miatt 3 felé ágazik a fa!



Egészítsd ki a második szám kitevőit, hogy igaz legyen (írd a vonalakra a kitevőt)!

$$(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7^{10} \cdot 11; 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^0 \cdot 11^{1-\infty} \cdot 13^0) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11.$$

5) Azonos alapú hatványok hányadosa és az egész kitevők

a) Bevezetés

Ne legyen tört, csak hatvány (egyszerűsíts)!

$$\frac{3^8}{3^3} = 3^5$$

$$\frac{10^9}{10^7} = 10^2$$

$$\frac{2^{15}}{2^{14}} = 2$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^3$$

$$\frac{a^5}{a^4} = a$$

$$\frac{a^5}{a^5} = a^0 = 1 \text{ (ha } a \neq 0)$$

b) A hányados mondókája

Végezd el az alábbi műveletet, és írd le a rá vonatkozó mondókát (fejből... ☺)

$$\frac{2^{10}}{2^7} = 2^3$$

Mondóka: lásd munkatankönyv!

c) Végezd el, az azonos alapúakat vond össze!

$$6^5 \cdot 5^3 \cdot 6^0 \cdot 5 \cdot 5^0 = 5^4 \cdot 6^5$$

$$3^0 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 5^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 5^2$$

$$x^2 \cdot 7^0 \cdot x^1 \cdot x \cdot 7^2 \cdot 7 = 7^3 \cdot x^4$$

d) Negatív egész kitevők

Írd föl negatív kitevővel, és (vagyis ne legyen tört!) prímtényezőt használj!

Pl.: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$

$$\frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

$$\frac{1}{5^4} = 5^{-4}$$

$$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

$$\frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

Számold ki: minta: $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} = 0,3$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,1$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

A negatív kitevős hatvány mondókája: A 2^{-3} egy pozitív szám: $\frac{1}{2^3}$, vagyis $\frac{1}{8}$, ami 0,125.

Írd föl az alábbi számokat 2, illetve az alatta levőket 3 hatványként:

$$32=2^5$$

$$16=2^4$$

$$4=2^2$$

$$2=2^1$$

$$1=2^0$$

$$\frac{1}{4}=2^{-2}$$

$$\frac{1}{32}=2^{-5}$$

$$\frac{1}{512}=2^{-9}$$

$$243=3^5$$

$$27=3^3$$

$$3=3^1$$

$$1=3^0$$

$$\frac{1}{3}=3^{-1}$$

$$\frac{1}{27}=3^{-3}$$

$$\frac{1}{81}=3^{-4}$$

$$\frac{1}{243}=3^{-5}$$

Add meg az előjelét!

$$(-5)^7 = \text{negatív}$$

$$(-5)^2 = \text{poz.}$$

$$-3^4 = \text{neg.}$$

$$(-3)^{-2}(-1)^0 = \text{poz.}$$

$$(-5)^{-4}(-1)^3 = \text{neg.}$$

$$-(-7)^{-6} = \text{neg.}$$

$$(-5)^4 = \text{poz.}$$

Írd föl úgy, hogy ne legyen negatív kitevő (tört alak legyen):

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

$$7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$1^{-3} = 1$$

Mennyi a kitevő? Írd alá!

$$2^x = \frac{1}{32}$$

$$x = -5$$

$$6^x = \frac{1}{216}$$

$$x = -3$$

$$5^x = \frac{1}{125}$$

$$x = -3$$

$$3^x = \frac{1}{27}$$

$$x = -3$$

Egyszerűsíts, majd a végeredményben ne legyen tört – csak egy hatvány legyen:

Minta: $\frac{5^7}{5^3} = 5^4$ Minta: $\frac{5^3}{5^7} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

$$\frac{5^7}{5^5} = 5^{7-5} = 5^2 = 25$$

$$\frac{3^7}{3^9} = 3^{7-9} = 3^{-2}$$

e) Írd le a 0 új mondókáját fejből!

A 0 új mondókája: A 0-t oszthatjuk, de 0-val nem osztunk és 0^0 nincs értelmezve. 0-nak csak pozitív természetes kitevőjű hatványa lehet, és az eredménye mindig 0.

6) Azonos alapú, egész kitevőjű hatványok szorzata, hányadosa

a) Bevezetés – írd fel a végeredményt hatványalakban, ne legyen tört!

$$\frac{7^8}{7^8} = 7^0 = 1$$

$$\frac{125}{5^5} = \frac{5^3}{5^5} = 5^{-2}$$

$$\frac{9}{81} = 9^{-1} = 3^{-2}$$

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{-3}$$

$$\frac{x^3}{-x^8} = -x^{-5}$$

$$\frac{(-a)^3}{(-a)^6} = \frac{-a^3}{a^6} = -\frac{a^3}{a^6} = -a^{-3}$$

$$\frac{2^{10}}{2^{11}} = 2^{-1}$$

$$\frac{2^3}{128} = \frac{2^3}{2^7} = 2^{-4}$$

$$\frac{7}{343} = \frac{7}{7^3} = 7^{-2}$$

$$\frac{x^2}{x^0} = x^2$$

$$\frac{x^3}{(-x)^8} = \frac{x^3}{x^8} = x^{-5}$$

$$\frac{(-a)^3}{-(-a)^7} = \frac{-a^3}{a^7} = -a^{-4}$$

b) Fejezd be: Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.

Végezd el a műveletet:

Minta: $3^{-4} \cdot 5^3 \cdot 3^3 \cdot 5^{-7} = 3^{-1} \cdot 5^{-4}$

$$7^4 \cdot 7^{-3} = 7$$

$$5^{-8} \cdot 5^8 = 5^0 = 1$$

$$(3)^0 \cdot b^{-6} \cdot a^{-8} \cdot b^8 \cdot a^{-7} \cdot b^7 = a^{-15} \cdot b^9$$

$$k^0 \cdot x \cdot x^{-5} \cdot x^8 \cdot y^{-3} \cdot y^3 = x^4$$

$$12^{-4} \cdot 12^{-5} = 12^{-9}$$

$$a^{-4} \cdot a^{-3} = a^{-7}$$

$$2^{-4} \cdot 2 = 2^{-3}$$

$$5^{-4} \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 5^7 = 2^7 \cdot 5^3$$

$$3 \cdot c \cdot 5^{-4} \cdot c^0 \cdot 3^{-4} \cdot 5^7 = 3^{-3} \cdot 5^3 \cdot c$$

$$3^{-5} \cdot 3^{-3} = 3^{-8}$$

Fejezd be: Azonos alapú hatványokat úgy osztunk, hogy az alapot a kitevők különbségére emeljük.

c) Gyakorlás

Ne legyen tört, csak egy hatvány!

$$\frac{2^5}{2^8} = 2^{-3}$$

$$\frac{2^{-5}}{2^8} = 2^{-13}$$

$$\frac{2^5}{2^{-8}} = 2^{13}$$

$$\frac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^3$$

$$\frac{3^4}{3^{-10}} = 3^{14}$$

$$\frac{3^{-5}}{3^9} = 3^{-14}$$

$$\frac{3^5}{3^{12}} = 3^{-7}$$

$$\frac{3^{-4}}{3^{-10}} = 3^6$$

$$\frac{5^6}{5^{12}} = 5^{-6}$$

$$\frac{5^6}{5^{-12}} = 5^{18}$$

$$\frac{5^{-6}}{5^{12}} = 5^{-18}$$

$$\frac{5^{-6}}{5^{-12}} = 5^6$$

$$\frac{3^0}{3^{10}} = 3^{-10}$$

$$\frac{1}{3^{10}} = 3^{-10}$$

$$\frac{5^0}{5} = 5^{-1}$$

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}$$

$$\frac{x^{-1}}{x^2} = x^{-3}$$

$$\frac{x^{-1}}{x^{-2}} = x$$

$$\frac{x}{x^2} = x^{-1}$$

$$\frac{x}{x^{-2}} = x^3$$

$$7^5 : 7^{-3} = 7^8$$

$$7^8 : 7^{10} = 7^{-2}$$

$$\frac{2^4 x^2}{2^5 x^5} = 2^{-1} x^{-3}$$

$$\frac{5^6}{5^6} = 5^0 = 1$$

$$\frac{3^4 x^2 x^{-4}}{3^{-3} x^5 x^{-2}} = 3^7 x^{-5}$$

$$\frac{3^{-2} \cdot 5^{-4} \cdot 3}{5^8 \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-5}} = 3^5 \cdot 5^{-12}$$

Csak pozitív kitevő szerepelhet (vagyis, ha kell, akkor tört van, de ne legyen emeletes)!

Két minta: $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{2^0}{2^{-3}} = 2^{0-(-3)} = 2^3$

$$\frac{5^{-3}}{3^{-4}} = \frac{1}{5^3} = \frac{3^4}{5^3}$$

$$\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 \quad \frac{1}{x^{-2} 5^{-3}} = 5^3 x^2 \quad \frac{2^{-8}}{7^5 \cdot 3^{-4}} = \frac{3^4}{7^5 \cdot 2^8} \quad \frac{5^{-7}}{5^{-5}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} \quad \frac{a^{-3}}{a^7 \cdot a^{-2}} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Ne legyen se zárójel, se tört, „kanonikus alak szerű” legyen!

Minta: $\frac{2^{-2} \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{3^7 \cdot 5^7 \cdot 2^{-1} \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^7}{2^{-1} \cdot 3^9 \cdot 5^7} = 2^3 \cdot 3^{-6}$

$$\frac{2^{-5} \cdot 3^7 \cdot 5^{-7} \cdot 2^4 \cdot 3^{-7}}{3^3 \cdot 5^0 \cdot 2^{-1}} = \frac{2^{-1} \cdot 5^{-7}}{3^3 \cdot 2^{-1}} = 3^{-3} \cdot 5^{-7}$$

$$\frac{3^{-3} \cdot 5^4 \cdot 3^{-7} \cdot 5^4 \cdot 2^{-7}}{3^{-10} \cdot 5^{-8} \cdot 2^{-8}} = \frac{3^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^{-7}}{3^{-10} \cdot 5^{-8} \cdot 2^{-8}} = 2 \cdot 5^{16}$$



7) Szorzat hatványa

a) Bevezetés

Bontsd föl a zárójelet! (Először – ha kell – az előjelet határozd meg!)

$$(-2 \cdot 3)^5 = -2^5 \cdot 3^5$$

$$(2 \cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 5^7$$

$$(7 \cdot 13)^{12} = 7^{12} \cdot 13^{12}$$

$$(2 \cdot a)^4 = 2^4 \cdot a^4$$

$$(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$$

$$(2 \cdot 3)^{-8} = 2^{-8} \cdot 3^{-8}$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 7)^{-4} = 2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 7^{-4}$$

$$(-2 \cdot 5 \cdot 11)^{-3} = -2^{-3} \cdot 5^{-3} \cdot 11^{-3}$$

b) Fejzd be a mondatokat: Szorzatot úgy hatványozunk, hogy a tényezőket az eredeti hatványkitevőre emelve összeszorozzuk.

c) Hozd kanonikus alakra

$$\text{Minta: } 144000 = (2 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3.$$

$$19600 = (2 \cdot 7)^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$32\,400\,000 = 18^2 \cdot 10^5 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^5.$$

Visszafelé (számold ki, hogy mennyivel egyenlő!)

$$\text{Minta: } 2^7 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 8 \cdot 10\,000 = 80\,000$$

$$2^4 \cdot 5^6 = 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 250\,000$$

$$2^7 \cdot 3 \cdot 5^5 = 1\,200\,000$$

d) Bontsd föl a zárójelet:

$$(-3 \cdot 7)^{-4} = 3^{-4} \cdot 7^{-4}$$

$$(-3 \cdot 7)^5 = -3^5 \cdot 7^5$$

$$(-3 \cdot 7)^{-5} = -3^{-5} \cdot 7^{-5}$$

$$(-a \cdot 7 \cdot b)^{-5} = -7^{-5} \cdot a^{-5} \cdot b^{-5}$$

$$((-3) \cdot (-7))^{-4} = 3^{-4} \cdot 7^{-4}$$

$$(3 \cdot (-a) \cdot 7)^{-5} = -3^{-5} \cdot 7^{-5} \cdot a^{-5}$$

e) Hány 0-ra végződik:

$$10^6: 6 \text{ db-ra}$$

$$100^7: 14 \text{ db-ra}$$

$$1000^6: 18 \text{ db-ra}$$

$$100000^{13}: 65 \text{ db.}$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3: 3 \text{ db.}$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{14} \cdot 13^3: 7 \text{ db.}$$

80! hány 0-ra végződik? ($80! = 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

A kanonikus alakban a 2 kitevője magasabb, mint az 5-é, ezért annyira, amennyi az 5 kitevője: $[80/5] + [80/25] = 16 + 3 = 19$ db.

(5-tel oszthatóból $[80/5] = 16$ db. van, 25-tel oszthatóból $[80/25] = 3$ db. (25, 50, 75)

8) Tört hatványa

Ne legyen se zárójel, se tört!

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = 2^3 \cdot 5^{-3}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = 5^4 \cdot 7^{-4}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -2^5 \cdot 3^{-5}$$

$$\left(\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}\right)^8 = 2^8 \cdot 3^{-8} \cdot 5^8 \cdot 7^{-8}$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^4 = 5^{-4} \cdot x^4$$

$$\left(\frac{7}{x}\right)^3 = 7^3 \cdot x^{-3}$$

Ne legyen se zárójel, se tört!

Minta:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot \frac{1}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot \frac{5^0}{5^{-2}} = 3^{-2} \cdot 5^2$$

↑ ↑
kihagyható kihagyható

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = 5^{-4} \cdot 7^4$$

$$\left(\frac{11}{3}\right)^{-7} = 3^7 \cdot 11^{-7}$$

$$\left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7}\right)^{-10} = 2^{10} \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-10} \cdot 7^{10}$$

$$\left(\frac{2 \cdot a}{5 \cdot b}\right)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^3 \cdot a^{-3} \cdot b^3$$

Visszafele:

$$\frac{24^5}{16^5} = \left(\frac{24}{16}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 2^{-5} \cdot 3^5$$

$$\frac{20^6}{10^6} = \left(\frac{20}{10}\right)^6 = 2^6 = 64$$

$$\frac{45^{-4}}{27^{-4}} = \left(\frac{45}{27}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = 3^4 \cdot 5^{-4}$$

$$\frac{80^{-6}}{60^{-6}} = \left(\frac{80}{60}\right)^{-6} = \left(\frac{60}{80}\right)^6 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 3^6 \cdot 4^{-6}$$

9) Hatvány hatványa

a) Bevezetés

Írd ide a hatvány hatványozására vonatkozó mondókat:

Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

b) Ne legyen se zárójel, se tört:

$$\text{Minta: } (2^5)^3 = (2^5)(2^5)(2^5) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{15}$$

$$\text{Minta: } (7^2)^{-3} = \frac{1}{(7^2)^3} = \frac{1}{(7^2)(7^2)(7^2)} = \frac{1}{(7 \cdot 7)(7 \cdot 7)(7 \cdot 7)} = \frac{1}{7^6} = 7^{-6}$$

$$(5^3)^2 = (5^3)(5^3) = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^6$$

$$(5^3)^{-2} = \frac{1}{(5^3)^2} = \frac{1}{(5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5 \cdot 5)} = \frac{1}{5^6} = 5^{-6}$$

$$(2^{-3})^4 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^4 = \left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right) = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12}$$

$$(2^{-3})^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 1 \cdot \frac{2^6}{1} = 2^6$$

c) Gyakorlás

„Kanonikus alak szerű” legyen (csak prímelek, egész kitevőn, a prímszámok monoton növekvő sorrendben):

$$\text{Minta: } 12^5 = (2^2 \cdot 3)^5 = 2^{10} \cdot 3^5$$

$$18^7 = 2^7 \cdot 3^{14}$$

$$50^8 = 2^8 \cdot 5^{16}$$

$$(24^3)^4 = 2^{36} \cdot 3^{12}$$

$$16900^3 = (13^2)^3 \cdot (10^2)^3 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^6$$

$$98^4 = 2^4 \cdot 7^8$$

$$242^5 = (2 \cdot 11^2)^5 = 2^5 \cdot 11^{10}$$

$$48^3 = (2^4 \cdot 3)^3 = 2^{12} \cdot 3^3$$

$$2500^{-6} = (2^2 \cdot 5^4)^{-6} = 2^{-12} \cdot 5^{-24}$$

$$75^{-5} = 3^{-5} \cdot 5^{-10}$$

$$14400^6 = (12^2 \cdot 10^2)^6 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2)^6 = 2^{36} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}$$

$$(88^{-5})^4 = (88)^{-20} = (2^3 \cdot 11)^{-20} = 2^{-60} \cdot 11^{-20} \quad (36^5)^{-3} = ((2 \cdot 3)^{10})^{-3} = 2^{-30} \cdot 3^{-30}$$

Törtés: Ne legyen se zárójel, se tört, és „kanonikus alak szerű” legyen (csak prímelek, egész kitevőn, a prímszámok monoton növekvő sorrendben)

$$\left(\frac{7}{5^{-2}}\right)^3 = 5^6 \cdot 7^3$$

$$\left(\frac{2^3}{3^{-4}}\right)^3 = 3^{12} \cdot 2^9$$

$$\left(\frac{x^3}{x^{-4}}\right)^{-4} = x^{-28}$$

$$\left(\frac{7^{-4}}{5^{-6}}\right)^4 = 5^{24} \cdot 7^{-16}$$

$$\left(\frac{13^2}{11^{-2}}\right)^{-3} = 11^{-6} \cdot 13^{-6}$$

$$\left(\frac{32^4}{27^3}\right)^5 = 32^{20} \cdot 27^{-15} = 2^{100} \cdot 3^{-45}$$

$$\left(\frac{12^{-3} \cdot 4^5}{6^{-4}} \right)^2 = 12^{-6} \cdot 4^{10} \cdot 6^8 = 2^{-12} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{20} \cdot 2^8 \cdot 3^8 = 2^{16} \cdot 3^2$$

$$\left(\left(\frac{50}{98} \right)^{-1} \right)^3 = \left(\frac{25}{49} \right)^{-3} = 5^{-6} \cdot 7^6$$

$$\left(\left(\frac{54^{-2}}{150} \right)^2 \right)^{-3} = \frac{54^{12}}{150^{-6}} = (2^{12} \cdot 3^{36}) \cdot (2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^{12}) = 2^{18} \cdot 3^{42} \cdot 5^{12}$$

d) Reciprok:

$$2^4 \text{ reciproka } \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$$

$$13^{-2} \text{ reciproka: } \frac{1}{13^{-2}} = \frac{13^0}{13^{-2}} = 13^{0-(-2)} = 13^2.$$

$$2^{-7} \text{ reciproka: } \frac{1}{2^{-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^7}} = 2^7$$

$$5^{-4} \text{ reciproka: } \frac{1}{5^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{5^4}} = 5^4$$

$$17^{-2} \text{ reciproka: } 17^2.$$

$$3^7 \text{ reciproka } 3^{-7}$$

$$3^{-7} \text{ reciproka } 3^7$$

$$\frac{1}{2^8} \text{ reciproka } 2^{-8}$$

$$15^{-4} \text{ reciproka } 15^4$$

e) Gondolkodtatók

$$\text{Melyik a nagyobb: } 5^{400} \square 4^{500} \Leftrightarrow (5^4)^{100} \square (4^5)^{100} \Leftrightarrow (625)^{100} \square (1024)^{100} \Leftrightarrow 625 \square 1024$$

Tehát a jobb oldal.

$$\text{Legalább hány jegyből áll: } 2^{50} = (2^{10})^5 = 1024^5 \approx 1000^5 = (10^3)^5 = 10^{15} \text{ ami 16 jegyű}$$

$$\text{Legalább hány jegyből áll: } 4^{50} = 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} \approx 1000^{10} = (10^3)^{10} = 10^{30} \text{ ami 31 jegy.}$$

* Legalább hány számjegyből áll? Próbálj pontos becslést adni: 3^{400} .

$$(3^4)^{100} = 81^{100} \approx 80^{100} = (2^3)^{100} \cdot 10^{100} = (2^{10})^{30} \cdot 10^{100} \approx (10^3)^{30} \cdot 10^{100} = 10^{190} \text{ ami 191 jegy.}$$

* Melyik a nagyobb: 24^{2^5} vagy 5^{2^6}

Mo.: 24^{32} vagy 5^{64} , így 24^{32} vagy $(5^2)^{32}$ vagyis a jobb oldal.

Írd föl a kanonikus alakját: $((512)^3)^4)^5 = (((2^9)^3)^4)^5 = 2^{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2^{540}$

10) Összeg, különbség hatványa

Számold ki: $(2+3)^3=125$ $2^3+3^3=35$

Írd föl jelekkel a definíciót (vigyázat: valódi részhalmazról van szó!)

$$A \subset H \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in H) \wedge (\exists y \in H \rightarrow y \notin A)$$

11) Gyakorlás

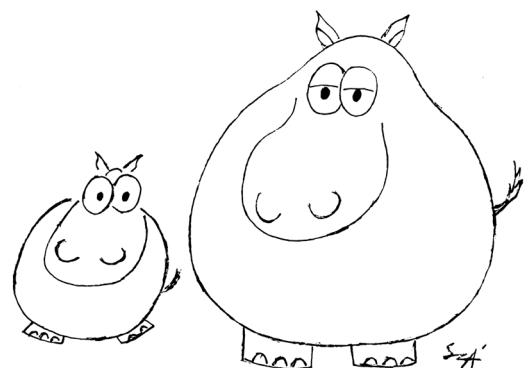
Írd föl egyetlen hatványként a következőt:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^8 \cdot 2^9 = 2^{1+2+3+4+\dots+9} = 2^{45}$$

* Írd föl egyetlen hatványként a következőt:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^{97} \cdot 2^{98} \cdot 2^{99} \cdot 2^{100} = 2^{1+2+3+4+\dots+100} = 2^S$$

$$\begin{array}{r} \text{Vagyis kell:} \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = S \\ \hline 100+99 + 98 + 97 + \dots + 1 = S \\ \hline 101+101+ 101+ 101 + \dots + 101 = 2S \\ 100 \cdot 101 = 2S \\ S=50 \cdot 101=5050 \end{array}$$



Írd föl a következő törtek „kanonikus alakját”, vagyis: prímtényező legyen, ne legyen se zárójel, se tört, a prímek növekvő sorrendben!

$$\frac{2^8 \cdot 5^3 \cdot 2^{-3} \cdot 11^3 \cdot 5^3}{11^2 \cdot 5^{-2} \cdot 11^{-1} \cdot 5^5 \cdot 2^{-4} \cdot 2} = 2^{8-3+4-1} \cdot 5^{3+3+2-5} \cdot 11^{3-2+1} = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 11^2$$

$$\frac{3^8 \cdot 4^3 \cdot 15^3}{20^4 \cdot 36^{-2}} = (3^8 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3) \cdot (2^{-8} \cdot 5^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3^4) = 2^2 \cdot 3^{15} \cdot 5^{-1}$$

$$\frac{2^8 (3 \cdot 4^3 \cdot 15)^3}{24^5 \cdot 80^{-1}} = (2^8 \cdot 3^3 \cdot 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^3) \cdot (2^{-15} \cdot 3^{-5} \cdot 2^4 \cdot 5) = 2^{15} \cdot 3 \cdot 5^4$$

$$\frac{(24^3 \cdot 33^{-2})^3}{(40^{-2} \cdot 55^3)^4} = \frac{2^{27} \cdot 3^9 \cdot 3^{-6} \cdot 11^{-6}}{2^{-24} \cdot 5^{-8} \cdot 5^{12} \cdot 11^{12}} = 2^{51} \cdot 3^3 \cdot 5^{-4} \cdot 11^{-18}$$

$$\left(\left(\frac{40}{20^3} \right)^{-2} \right)^{-3} = \frac{40^6}{20^{18}} = \frac{2^{12} \cdot 10^6}{2^{18} \cdot 10^{18}} = 2^{-6} \cdot 10^{-12} = 2^{-18} \cdot 5^{-12}$$

$$\left(\left(\frac{40}{20^3} \right)^{-2} \right)^{-3} = \left(\frac{40}{20 \cdot 20 \cdot 20} \right)^6 = \left(\frac{1}{20 \cdot 10} \right)^6 = (2^{-3} \cdot 5^{-2})^6 = 2^{-18} \cdot 5^{-12}$$

$$* \frac{(12^3)^{-1} (32^4 \cdot 14^3 \cdot 10^{-4})^3}{120^{-5} \cdot (81 \cdot 125^{-1})^{-3}} = \frac{(2^{-6} \cdot 3^{-3}) \cdot (2^{60} \cdot 2^9 \cdot 7^9 \cdot 2^{-12} \cdot 5^{-12})}{(2^{-15} \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-5}) \cdot (3^{-12} \cdot 5^9)} = 2^{66} \cdot 3^{14} \cdot 5^{-16} \cdot 7^9$$

II) Számok normálalakja

1) Bevezető

$$12^2 = 144$$

$$\text{Számold ki: } 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$$

$$\text{Számold ki: } 1,2 \cdot 12 = 14,4$$

$$15 \cdot 18 = 270$$

$$\text{Számold ki: } 1,5 \cdot 1,8 = 2,7$$

$$\text{Számold ki: } 15 \cdot 1,8 = 27$$

Szorozd össze a 300-at és a 800-at!

$$300 \cdot 800 = 240\,000$$

Szorozd össze a 0,003-t és a 0,000 008-t!

$$0,003 \cdot 0,000\,008 = 0,000\,000\,024$$

2) Tíz hatványai

Írd föl 10 hatványaként a következő számot!

$$10\ 000=10^4$$

$$10\ 000\ 000=10^7$$

$$0,1=10^{-1}$$

$$0,001=10^{-2}$$

$$0,000\ 000\ 01=10^{-8}$$

3) Írd át normálalakra

$$-30,98=-3,098 \cdot 10^1$$

$$120=1,2 \cdot 10^2$$

$$14\ 500=1,45 \cdot 10^4$$

$$15=1,5 \cdot 10^1$$

$$17009,40=1,70094 \cdot 10^4$$

$$-0,0023=-2,3 \cdot 10^{-3}$$

$$-0,000\ 001\ 5=-1,5 \cdot 10^{-6}$$

$$0,000\ 093=9,3 \cdot 10^{-5}$$

$$7=7 \cdot 10^0=7$$

$$-1=-1 \cdot 10^0=-1$$

$$140 \cdot 10^4=1,4 \cdot 10^6$$

$$65000 \cdot 10^{-3}=6,5 \cdot 10^1$$

$$56000 \cdot 10^{-2}=5,6 \cdot 10^2$$

$$145000 \cdot 10^{-13}=1,45 \cdot 10^{-8}$$

$$0,000\ 78 \cdot 10^{14}=7,8 \cdot 10^{10}$$

$$0,000\ 063 \cdot 10^{-4}=6,3 \cdot 10^{-9}$$

Melyik egyenlő a $5,02 \cdot 10^4$ normálalakú számmal? Húzd alá (akár több is!)

a) 5020 b) $50,2 \cdot 10^3$ c) 50200 d) $502 \cdot 10^3$ e) $0,0502 \cdot 10^6$

4) Írd át helyiértékes alakra a normál alakú számot

$$2,4 \cdot 10^3 = 2\ 400$$

$$3,05 \cdot 10^5 = 305\ 000$$

$$-3,05 \cdot 10^{-5} = -0,000\ 030\ 5$$

$$-2,003 \cdot 10^7 = -20\ 030\ 000$$

$$2,003 \cdot 10^{-7} = 0,000\ 000\ 200\ 3$$

$$4 \cdot 10^1 = 40$$

5) Írd ide a normál alak definícióját szavakkal

Def.: \forall nem nulla valós szám egyértelműen felírható olyan kéttényezős szorzatként, ahol az első tényező abszolút értéke az $[1;10[$ intervallumba esik, a második tényező pedig 10-nek egy egész kitevős hatványa.

6) Írd át normálalakba

$$203 \cdot 10^5 = 2,03 \cdot 10^2 \cdot 10^5 = 2,03 \cdot 10^7$$

$$0,004\ 5 \cdot 10^8 = 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 = 4,5 \cdot 10^5$$

$$105 \cdot 10^3 = 1,05 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 1,05 \cdot 10^5$$

$$-4200 \cdot 10^{-7} = -4,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = -4,2 \cdot 10^{-4}$$

$$-0,042 \cdot 10^{-5} = -4,2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} = -4,2 \cdot 10^{-7}$$

$$52000 \cdot 10^{-6} = 5,2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} = 5,2 \cdot 10^{-2}$$

$$-0,0034 \cdot 10^6 = -3,4 \cdot 10^3$$

$$100 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-9}$$

7) Műveletek normálalakra hozott számokkal

a) Szorzás

$$\text{Minta: } 130\,000\,000 \cdot 0,0015 = (13 \cdot 10^7) \cdot (15 \cdot 10^{-4}) = 195 \cdot 10^3 = 1,95 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 1,95 \cdot 10^5.$$

$$1\,700 \cdot 1\,800 = 17 \cdot 10^2 \cdot 18 \cdot 10^2 = 306 \cdot 10^4 = 3,06 \cdot 10^6$$

$$320\,000 \cdot 4\,000\,000 = 32 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 128 \cdot 10^{10} = 1,28 \cdot 10^{12} \quad (32=2^5 \text{ és } 4=2^2, \text{ így: } 32 \cdot 4=2^7)$$

$$160\,000 \cdot 170 = 2,72 \cdot 10^7 \quad 2\,500\,000 \cdot 6\,000 = 1,5 \cdot 10^{10} \quad 15\,000\,000 \cdot 0,000\,0016 = 2,4 \cdot 10^1$$

$$0,0012 \cdot 0,000\,012 = 1,44 \cdot 10^{-8} \quad 0,000\,013 \cdot 0,000\,000\,0017 = 2,21 \cdot 10^{-14}$$

$$180\,000 \cdot 0,000\,000\,000\,0017 = 3,06 \cdot 10^{-7}$$

b) Hatványozás:

$$\text{Minta: } 130\,000^2 = (13 \cdot 10^4)^2 = 13^2 \cdot 10^8 = 169 \cdot 10^8 = 1,69 \cdot 10^2 \cdot 10^8 = 1,69 \cdot 10^{10}.$$

$$2\,500^2 = (25 \cdot 10^2)^2 = 625 \cdot 10^4 = 6,25 \cdot 10^6$$

$$0,000\,17^2 = (17 \cdot 10^{-5})^2 = 289 \cdot 10^{-10} = 2,89 \cdot 10^{-8}$$

$$50\,000^3 = (5 \cdot 10^4)^3 = 5^3 \cdot 10^{12} = 1,25 \cdot 10^{14} \quad 0,000\,3^5 = (3 \cdot 10^{-4})^5 = 243 \cdot 10^{-20} = 2,43 \cdot 10^{-18}$$

$$13\,000^2 = (13 \cdot 10^3)^2 = 169 \cdot 10^6 = 1,69 \cdot 10^8 \quad 0,005^3 = (5 \cdot 10^{-3})^3 = 125 \cdot 10^{-9} = 1,25 \cdot 10^{-7}$$

$$0,002^6 = (2 \cdot 10^{-3})^6 = 6,4 \cdot 10^{-17}$$

c) Osztás: **FIGYELEM, AZ OSZTÁST MINDIG ÁT KELL ÍRNI TÖRT ALAKBA!**

$$\text{Minta: } 200\,000 : 80\,000\,000\,000\,000 = \frac{20 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^{13}} = 2,5 \cdot 10^{-9}.$$

$$\text{Minta: } 0,0068 : 0,000\,000\,05 = \frac{68 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-8}} = \frac{68}{5} \cdot \frac{10^{-4}}{10^{-8}} = 13,6 \cdot 10^4 = 1,36 \cdot 10^5.$$

$$6\,250\,000 : 5\,000 = \frac{625 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 125 \cdot 10^1 = 1,25 \cdot 10^3$$

$$820\,000 : 0,005 = \frac{820 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} = 164 \cdot 10^6 = 1,64 \cdot 10^8$$

$$0,000\,075 : 4\,000 = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^3} = 18,75 \cdot 10^{-9} = 1,875 \cdot 10^{-8}$$

$$94\,000\,000 : 0,004 = \frac{94 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^{-3}} = 23,5 \cdot 10^9 = 2,35 \cdot 10^{10}$$

$$0,000\,000\,000\,05 : 0,000\,004 = \frac{50 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-6}} = 12,5 \cdot 10^{-6} = 1,25 \cdot 10^{-5}$$

$$(-1\,600\,000)^2 : (-0,000\,002)^5 = \frac{16^2 \cdot 10^{10}}{32 \cdot 10^{-30}} = \frac{16 \cdot 16 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-30}} = \frac{16 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{-30}} = -8 \cdot 10^{40}$$

$$(-0,000\,000\,2)^5 : (0,000\,000\,01)^6 = \frac{32 \cdot 10^{-35}}{10^{-48}} = -3,2 \cdot 10^{14}$$

d) Összeadás – kivonás: **MINDIG A NAGYOBB SZÁMOT ALAKÍTJUK KISEBBÉ!**

$$302\,000 \text{ dl} = 30\,200 \text{ liter} = 3,02 \cdot 10^4 \text{ liter}$$

$$13 \text{ km} = 13 \cdot 1000 \text{ m} = 13 \cdot 1000 \cdot 100 \text{ cm} = 1\,300\,000 \text{ cm} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ cm}$$

$$8 \text{ hl} + 23 \text{ l} = 8 \cdot 100 \cdot 10 \text{ dl} + 23 \cdot 10 \text{ dl} = 823 \cdot 10 = 8230 \text{ dl}$$

$$4,5 \text{ kg} - 1200 \text{ g} + 38 \text{ dkg} = 4,5 \cdot 100 \text{ dkg} - \frac{1200}{10} \text{ dkg} + 38 \text{ dkg} = 368 \text{ dkg}$$



Végezd el:

$$\text{Minta: } 3,2 \cdot 10^4 + 2,8 \cdot 10^5 = 3,2 \cdot 10^4 + 28 \cdot 10^4 = 31,2 \cdot 10^4 = 3,12 \cdot 10^5.$$

$$\text{Minta: } 2,4 \cdot 10^{-4} - 6,3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} - 6,3 \cdot 10^{-5} = 17,7 \cdot 10^{-5} = 1,77 \cdot 10^{-4}.$$

$$4 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 = 400 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^5 = 405 \cdot 10^5 = 4,05 \cdot 10^7$$

$$49 \cdot 10^{-5} - 7,5 \cdot 10^{-6} = 490 \cdot 10^{-6} - 7,5 \cdot 10^{-6} = 482,5 \cdot 10^{-6} = 4,825 \cdot 10^{-4}$$

$$3 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-5} - 20 \cdot 10^{-5} = -17 \cdot 10^{-5} = -1,7 \cdot 10^{-4}$$

$$2,3 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-6} + 40 \cdot 10^{-6} = 42,3 \cdot 10^{-6} = 4,23 \cdot 10^{-5}$$

$$3,2 \cdot 10^{-5} - 2,8 \cdot 10^{-4} = 3,2 \cdot 10^{-5} - 28 \cdot 10^{-5} = -24,8 \cdot 10^{-5} = -2,48 \cdot 10^{-4}$$

$$25 \cdot 10^{15} + 0,075 \cdot 10^{19} = 2,5 \cdot 10^{16} + 75 \cdot 10^{16} = 77,5 \cdot 10^{16} = 7,75 \cdot 10^{17}$$

$$25 \cdot 10^{-6} - 0,075 \cdot 10^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-5} - 75 \cdot 10^{-5} = -72,5 \cdot 10^{-5} = -7,25 \cdot 10^{-4}$$

$$13 \cdot 10^{23} + 7,05 \cdot 10^{24} = 13 \cdot 10^{23} + 70,5 \cdot 10^{23} = 83,5 \cdot 10^{23} = 8,35 \cdot 10^{24}$$

$$5 \cdot 10^{-4} - 0,075 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} - 75 \cdot 10^{-4} = -70 \cdot 10^{-4} = -7 \cdot 10^{-3}$$

Számold ki, hogy hány mm magas vagy:

$$\text{Pl.: } 176 \text{ cm ember: } 176 \cdot 10 \text{ mm} = 1760 \text{ mm} = 1,760 \text{ m}$$

hány km magas vagy:

$$\text{Pl.: } 168 \text{ cm ember: } 168 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 168 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \text{ km} = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ km}$$

hány gramm vagy:

$$\text{egy } 53 \text{ kg-os ember: } 53 \cdot 1000 \text{ g} = 53000 \text{ g} = 5,3 \cdot 10^4 \text{ g}$$

hány tonna vagy: 42 kg-os ember $42 \cdot 10^{-3} \text{ t} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ t}$

Ezer napban hány másodperc van?

$$1 \text{ nap} = 24 \text{ óra.}$$

$$24 \text{ óra} = 24 \cdot 60 \text{ perc.}$$

$$24 \cdot 60 \text{ perc} = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ másodperc}$$

$$24 \cdot 60 \cdot 60 = 24 \cdot 3600 = 86400 \text{ másodperc}$$

$$1000 \text{ nap: } 8,64 \cdot 10^7 \text{ másodperc}$$

BETŰK HASZNÁLATA

I) Bevezetés

1) Alapok

Egy téglalap oldalai: a ; b . Mekkora a kerülete: $2a+2b=2(a+b)$ Mekkora a területe: $a \cdot b$

Egy családban 4 gyerek van. A gyerekek életkorának összege 22 év. 5 év múlva mennyi lesz az életkoruk összege? (Vigyázz, mindenki „öregszik”!): $22+4 \cdot 5=42$

Egy családban a 4 gyerek életkorának összege 25 évvel kevesebb, mint a két szülő életkorának összege. Mi a helyzet 5 év múlva?

A 4 gyerek együtt 20 évet öregszik, a két szülő együtt 10-et, ezért már csak 15 év lesz a különbség.

Ha $3x+5=29$, akkor $3x+12=36$

Ha $3x+5=29$, akkor $6x+10=58$

Ha $3x-4=y$, akkor $6x-5=2y+3$

Egy kütyü 2 órát lop el naponta az életedből. Hány órát lop el:

12 nap alatt: $12 \cdot 2=24$ órát

n nap alatt: $2n$ órát

$3y$ nap alatt: $6y$ órát

Mennyi:

a -nak a fele: $a/2$

b -nek a másfélszerese: $\frac{3}{2}b$

c -nek a 25%-a: $c \cdot 25/100$

d -nek a 250%-a: $d \cdot 250/100$

e -nek az 1,2-szerese: $1,2e$

f -nek az x -szerese: $x \cdot f$

g -nek az egyötöd része: $(1/5)x = \frac{x}{5}$

h -nek az x -ed része: h/x

i -nek a $\frac{2}{3}$ -ada: $\frac{2}{3}i$

j -nek az $\frac{x}{y}$ -od része: $\frac{x}{y}j$

Írd föl:

x -nél 5-tel nagyobb szám: $x+5$

x -nek az 5-szöröse: $5x$

x felénél 3-mal kisebb: $x/2 - 3$

Aminél x 4-gyel kisebb: $x+4$

x ellentettje: $-x$

x reciproka: $1/x$

x négyzete: x^2

x törtrésze: $\{x\}$

Aminél x 5-tel nagyobb: $x-5$

Írd a mondatok mellé a megfelelő algebrai kifejezést, amit alább találsz:

1000n 2(n+m) 24n n·m² n:m n·m n²·m (n+m)/2 8m+8

n óra alatt m km/h-val haladó koala megtett útja:	$n \cdot m$
n és m oldalú téglalap területe:	$n \cdot m$
n és m átlaga (számtani közepe):	$\frac{n+m}{2}$
gerenda felszíne, mely keresztmetszete 2 egység oldalú négyzet, hossza m:	$4 \cdot 2m = 8m + 2 \cdot 2^2$
n kg grammra átszámítva:	1000n
n és m oldalú téglalap kerülete:	$2n+2m$ v. $2(n+m)$
n nap órában mérve:	24n

Ha 10 egyenlő súlyú fiú együtt a mérlegen 600 kg, akkor 14 ilyen együtt beszállhat-e egy 800 kg teherbírású liftbe? $14 \cdot (600/10) = 840$, tehát nem.

Egy tanár órabére b Ft. Hány forintot kap x nap alatt napi 11 órás munkaidő mellett: $11bx$

Egy nyolctagú csapat x nap alatt összesen y Ft-ot keresett. Mennyit kapott a csapat egy-egy tagja egy napra, ha egyenlően osztották el a pénzt: $y/(8x)$

Egy focista októberi bére x Ft, mert 10 napot dolgozott októberben. Mennyi munkabért kapott november hónapra, ha novemberben 12 napot dolgozott? $12 \cdot (x/10)$

2) A műveletek kommutativitása, sorrendje, zárójelek

Számold ki: $(3+4) \cdot (-3) - (2-1) + (2-4) - 5(2-1) + 4(2-2 \cdot 3) = -21 - 1 - 2 - 5 = -29$

3) Kifejezés értelmezés tartománya

Melyik az az x , amelyre értelmetlen a következő kifejezés: $\frac{7}{6-2x}$

x nem lehet: 3, mert $6-2 \cdot 3=0$, és 0-val nem osztunk.

4) Írjuk fel jelekkel

Vilmos 30 kg-mal könnyebb Szabolcsnál:	$v+30=sz$ v. $v=sz-30$
Pál és Zoé együtt is 10 könyvvel kevesebbet olvasott, mint András.	$p+z+10=a$
Az általam gondolt x szám 3 szorosa 10-zel több, mint a kétszerese.	$3x-10=2x$
Tegnap x embert ütöttek el kütyüzés közben. Ma a kétszeresénél kettővel kevesebbet:	$2x-2$
x órát utaztunk vonaton. Esett egy centi hó, ezért 3 órát utaztunk még mentesítő buszon. Hány óra hosszát voltunk úton?	$x+3$

Írjuk le a következő kifejezések összegét:

-3,5 és b : $b-3,5$

b és $-(65/4)$: $b-65/4$

x és y : $x+y$

a , b és c : $a+b+c$

x , y és 4 : $x+y+4$

c és a : $a+c$

Egy állványon y db könyv van, a másikon 15-tel több. Hány könyv van a másodikon?	$y+15$
Egy állványon y db könyv van, a másikon 15-tel több. Hány könyv van a kettőn együtt?	$2y+15$
Egy apa 30 évvel idősebb a fiánál. Hány éves az apa, ha a fia p éves?	$p+30$
Egy iskolában x számú tanuló volt. Felvettek még y tanulót. Mennyi a tanulók létszáma az iskolában? Mennyi a létszám, ha $x=900$, $y=80$	$x+y$ 980
Egy tanulónak x , a másiknak az előzőnél y -al több füzeté van. Hány füzeté van a két tanulónak együtt?	$2x+y$
Melyik az a szám, amelyik b -vel nagyobb, mint a ?	$a+b$
Két szám különbsége c . A kisebbik szám a . Mennyi a másik szám?	$a+c$
Egy virsliárus fizetése x . A volt osztályfőnökéé a virsliárus fizetése felénél még 100 euróval kevesebb. Mennyi a volt fő fizetése?	$x/2 - 100$
x nap hány óra?	$24x$
y hét hány nap?	$7y$
z óra hány perc?	$60z$
p nap hány hét?	$p/7$
r óra hány nap?	$r/24$
k perc hány óra?	$k/60$
Hány euróm van, ha m darab tízes és n darab öt eurósom van?	$10m+5n$
Írd föl összegalakban azt a kétjegyű számot, amelynek az első számjegye m , a második n , (alaki- helyi- valódi érték!!!) $\overline{mn} =$	$10m+n$

5) Számok jelzése

a) Mennyi

x -nek a kétharmada:	$(2/3)x$	y -nak a háromnegyede	$(3/4)y$ v. $3y/4$
w -nek a 75%-a:	$w \cdot 75/100$	u -nak a 125%-a	$u \cdot 125/100$
a -nak a harmada:	$(1/3)a$ v. $a/3$	b -nek az négyszerese	$4b$
c -nek az negyede:	$(1/4)c$ v. $c/4$	h -nak az y -od része	h/y
i -nek a $\frac{7}{5}$ -öd része:	$\frac{7}{5}i$	m -nek az $\frac{x}{y}$ -od része	$\frac{x}{y}m$

Két szám összege 20. Az egyik szám y . Írd föl a másikat!	$20-y$
Két szám összege x . Az egyik szám 3. Írd föl a másik számot!	$x-3$
Két szám összege x . Az egyik szám y . Írd föl a másik számot!	$x-y$

b) Írd föl azt a számot v. kifejezést, amelyik:

5-tel nagyobb, mint b	$b+5$
az x -nek a háromszorosa	$3x$
a -val nagyobb, mint b	$b+a$
Amit x -hez kell adni, hogy y -t kapjunk	$y-x$
2-vel kisebb a b háromszorosánál:	$3b-2$
az x és az y összegénél 3-mal kevesebb:	$x+y-3$
A természetes számok körében közvetlenül a b szám után van:	$b+1$
A természetes számok körében 2-vel megelőzi a b -t	$b-2$

Pista 5 évvel fiatalabb Sanyinál. Hány éves Pista, ha Sanyi s éves? Legyen $s=12$.	$p+5=s$ $s=12$ $p=7$	$p=s-5$
Két szám összege 25. Az egyik összeadandó b . Mennyi a másik összeadandó?	$25-b$	
Egy zsákban m kg liszt van, egy másikban n kg-mal kevesebb. Hány kg van a másodikban? Mi az eredmény, ha $m=40$, $n=10$	$m-n$ $40-10=30$	
A suli fűtéséhez d tonna hasadó anyagot szereztek be. Ebből c tonna már elfogyott. Hány tonna hasadó anyag maradt? Mi lesz az eredmény, ha $d=70$; $c=19$.	$d-c$ $70-19=51$	
Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. A tízesek helyén x áll. Mi áll az egyesek helyén? Mely értékeket vehet fel x ?	$12-x$; $x: 3;4;5; \dots 9$	
Egy áru önköltségi ára b Ft, és f Ft-ért adják el. Mennyi a haszon?	$f-b$	

c) Egy kicsi próbálgatni madzsa nyelf, máj d felírni:

a és b összegének a fele:	$(a+b)/2$
a és b szorzatának a harmada:	$(ab)/3$
a és b harmadainak szorzata:	$(a/3) \cdot (b/3) = (ab)/9$
a négyzetének és b háromszorosának a kétszeres szorzata:	$2a^2 \cdot (3b) = 6a^2b$
a és b különbségének a négyzete:	$(a-b)^2$
a és b hányadosának az ötszöröse:	$5(a/b)$
a és b hányadosának a c -szerese:	$c(a/b)$

Egy kicsi próbálgatni madzsa nyelf, májd felírni:

x és y összegének a fele	$(x+y)/2$
x és y összegének és különbségének szorzata	$(x+y)(x-y)$
x és y összegének és különbségének hányadosa	$(x+y)/(x-y)$
x és y szorzatának és hányadosának a különbsége	$xy - x/y$
y és x különbségének és összegének hányadosa	$(y-x)/(y+x)$
y és x hányadosának a négyzete	$(y/x)^2$
y és x négyzeteinek a hányadosa	y^2/x^2
x és y négyzeteinek összege („négyzetösszege”)	x^2+y^2
x és y összegének négyzete	$(x+y)^2$

Adott x és y. Írd fel az alábbiakat:

négyzeteik összegének (=„négyzetösszegük”) reciproka	$1/(x^2+y^2)$
összegük négyzetének a reciproka	$1/(x+y)^2$
reciprokok négyzetösszege	$(1/x)^2+(1/y)^2$
reciprokaik összegének négyzete	$(1/x + 1/y)^2$

6) Írd föl „általában”

3 egymás követő egész	$n \in \mathbf{Z} \quad n-1; n; n+1$
5 egymás utáni páros	$n \in \mathbf{Z} \quad 2n-4; 2n-2; 2n; 2n+2; 2n+4$
a köbszámok általában	$n \in \mathbf{Z} \quad n^3$
3-ra végződő természetesek	$n \in \mathbf{N} \quad 10n+3$
3 egymás követő egész összege	$n \in \mathbf{Z} \quad n-1+n+ n+1 = 3n$
3-mal 1 maradékot adó egészek	$n \in \mathbf{Z} \quad 3n+1$
4 egymás követő páratlan egész összege	$n \in \mathbf{Z} \quad 2n-3 + 2n-1 + 2n+1 + 2n+3 = 8n$

Milyen állítást tudsz megfogalmazni 9 egymás utáni egész szám összegére? (Először írd föl általában...)

$$n \in \mathbf{Z} \quad n-4 + n-3 + n-2 + n-1 + n + n+1 + n+2 + n+3 + n+4 = 9n. \text{ Vagyis } 9 \text{ osztja az összeget}$$

Milyen állítást tudsz megfogalmazni 6 egymást követő pt (páratlan) szám összegére? (Először írd föl általában...)

$$k \in \mathbf{Z} \quad (2k-5) + (2k-3) + (2k-1) + (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) = 12k. \text{ Vagyis } 12 \text{ osztja az összeget}$$

7) Változások, kapcsolatok, százalék

Egy Intercity vonat óránként 40 km-t tesz meg. Mekkora távolságot zötyög x óra alatt?
 $40x$

Egy vonat v kilométer utat tesz meg óránként. (vagyis a sebessége v km/h) Számítsuk ki a t óra alatt megtett utat!

$v = 45, t = 6$	$v = 50, t = 4,5$	$v = 30, t = 3,5$
$6h \cdot 45km/h = 270 \text{ km}$	$4,5h \cdot 50km/h = 225km$	$3,5h \cdot 30km/h = 105km$

Egy tanuló 5 füzetet vesz, darabját x forintért. Mennyi pénzt költött el anyja pénztárcájából? Mennyi ez az összeg, ha $x = 0,6$ Euro, majd $x = 1,4$ Euro?

$$5x; \quad 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ illetve } 5 \cdot 1,4 = 7$$

Egy vakcinaárus x darab 300 Tallér-os és y darab 450 Tallér-os vakcinát adott el. Mennyi a bevétel? $x \cdot 300 + y \cdot 450$, de matematikában így szebb: $300x + 450y$

Az a szám 2-vel nagyobb a b számnál

fejezd ki az a -t a b segítségével	$b+2=a$
fejezd ki a b -t az a segítségével	$a-2=b$
add meg a két szám összegét	$a+b$
fejezd ki az összeget csak az a -val	$a+a-2=2a-2$
illetve csak b -vel	$b+b+2=2b+2$

Egy déli határmenti városban k ember lakik. Hány lakosa lesz a városnak egy év múlva, ha a lakosok száma egy év alatt 12%-kal nő? És ha p %-kal nő? (Legyen $k=400$ ezer; illetve 720 ezer.)

$$k+k \cdot 12/100 \quad k+k \cdot p/100 \quad 400\,000+400\,000 \cdot 12/100=448\,000$$

$$720\,000+720\,000 \cdot 12/100=806\,400$$

Mekkora a rombusz oldala, ha kerülete k dm? (Rombusz olyan négyszög, mely oldalai egyenlők.)	$4k$ dm
Mennyi a c szám ötödrésze?	$c/5$
Mennyi a hányados, ha az osztandó 35 és az osztó 7?	$35/7=5$
Mennyi a hányados, ha az osztandó a és az osztó b ?	a/b
Két szám hányadosa 3. Az osztandó s , mennyi az osztó?	$s/3$
Melyik az a szám, amelynek a 6%-a b ?	$100 \cdot (b/6)$ v. $b/(6/100)$
Melyik az a szám, amelynek a p %-a b ?	$100 \cdot (b/p)$ v. $b/(p/100)$
Két szám szorzata 60. Az egyik tényező x . Mennyi a másik?	$60/x$
Hányszorosa az x szám az y -nak?	x/y szorosa
Mit kapunk eredményül, ha a b számhoz hozzáadjuk az a és c számok hányadosát?	$b+(a/c)$

Írjuk le az alábbi számok és betűk hányadosát

a és 4	$a/4$	b és 7	$b/7$	a és b	a/b	-2 és k	$-2/k$
------------	-------	------------	-------	------------	-------	-------------	--------

8) Ügyes felírások – ügyelj a szimmetriára

Írd föl 3 egymás követő páros szám összegét!

$$k \in \mathbf{Z}. \quad 2k-2 + 2k + 2k+2 = 6k$$

Írd föl 6 egymást követő páratlan összegét!

$$k \in \mathbf{Z}. \quad 2k-5 + 2k-3 + 2k-1 + 2k+1 + 2k+2 + 2k+3 = 12k$$

* Mennyi 301-től 499-ig a pt. (páratlan) egészek összege?

$$301 + 303 + 305 + 307 + \dots + 497 + 499 = S$$

$$\underline{499 + 497 + 495 + 493 + \dots + 303 + 301 = S}$$

$$800 + 800 + 800 + 800 + \dots + 800 + 800 = 2S$$

A kérdés: hány db. 800-as van? 301-től 1 lépés a 303. 2 lépés a 305. 3 lépés a 307 (vagyis $301+3 \cdot 2=307$).

Hány lépésre van a 499? $(499-301)/2=99$. Tényleg: $301+99 \cdot 2=499$. De a legelsőt nem számoltam, tehát összesen: 100 db. 800-as van: $100 \cdot 800 = 2S$. Így: $50 \cdot 800 = S = 40\,000$

Az első páratlan természetes az 1. (pt=páratlan)

Összeadom az első 2 db páratlan (pt) számot, és leírom az eredményt $1+3=4$

Majd összeadom az első 3 db. pt számot, és írd le az eredményt	$1+3+5=9$
majd az első 4 db. pt számot	$1+3+5+7=16$
majd az első 5 pt számot	$16+9=25$
majd az első 6 pt számot	$25+11=36$
majd az első 7 pt számot	$36+13=49$
majd az első 8 pt számot	$49+15=64$
majd az első 9 pt számot	$64+17=81$
majd az első 10 pt számot	$81+19=100$

Mit figyelsz meg, milyen általános észrevételt fogalmazol meg? Valami ilyesféle észrevételre gondolok, hogy „ha összeadom az első n db. pozitív páratlan számot, akkor összegként n^2 -et kapok.”

Fenyegetés: Ezt egyszer még belátjuk!

II) Műveletek algebrai kifejezésekkel: együttható-változó – helyettesítési érték, egyneműek

1) Elnevezések

a) Mennyi a következő kifejezésekben az együttható, és mi(k) a változó(k)

$-3x^2$	együttható: -3	változó(k): x
$-xy$	együttható: -1	változó(k): x és y
$\frac{3}{4}x^3y$	együttható: $\frac{3}{4}$	változó(k): x és y
x	együttható: 1	változó(k): x
$\frac{5x}{3}$	együttható: $\frac{5}{3}$	változó(k): x
$-\frac{y^2}{5}$	együttható: $-\frac{1}{5}$	változó(k): y

b) Tag, tényező

Tag-tényező $(2x^3-4x+13)(ax-by^2+7)-x(ax^2-1)+5$

A vastag, aláhúzott x : második tag, első tényező. Vagyis: „2.tag 1.tény”

Mi a vastag $4x$	1 tag. 1 tény. 2. tag	y^2	1.tag 2.té. 2.tag 2.té
5	3. tag	1	2.tag 2.té 2.tag
ax^2	2. tag 2. tény 1. tag	x^3	1.tag 1.té 1.tag 2.té

Húzd alá egytagúakat az alábbi algebrai kifejezések közül

$2a+2b$ $2(a+b)$ $2(a+2b)$ $-2a+2b$ $2a$ $2b$

$-3(x+y)^2$ $-3x+y^2$ $-3x^2+y^2$ $-3x^2$ $(-3x+y)^2$

2) Helyettesítési érték

Határozd meg a következő kifejezések értékét, ha $x=-1$ $y=2$; $w=\frac{1}{2}$

$2x^2=2$	$(2x)^2=4$	$-5y=-10$
$\frac{x+1}{1-x}=0$	$\frac{3}{w}=6$	$2w-y=-1$
$2(w-y)=-3$	$x^2+y^2=5$	$(x+y)^2=1$
$\frac{y^3}{4}=2$	$\left(\frac{y}{4}\right)^3=\frac{1}{8}$	$2x+y-4w=-2$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$	$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{3}$	$(x+1)y=0$

3) Egynemű kifejezések összevonása - vond össze az egyneműeket

a)

$x+x+x+x+x=$	$5x$	$-xy-xy-xy-xy=$	$-4xy$
$p^2+p^2+p^2=$	$3p^2$	$-z^2+2z^2-6z^2-z^2=$	$-6z^2$
$-x^2-x^2-x^2=$	$(-1-1-1)x^2=-3x^2$	$2y^2-y+3y^2-3y-4y-5y^2=$	$(2-1+3-3-4-5)y^2=-10y^2$
$ab+5ab-6ab=$	$(1+5-6)ab=0$	$cd^2-cd^2+cd^2-cd^2=$	0

b)

$5x-2xy+3yx-4x-2xy=$	$(-2+3-2)xy+(5-4)x=-xy+x$
$2y-x+3y-3x-y+8x=$	$(-1-3+8)x+(2+3-1)y=4x+4y$
$x^2-x^2y+4x^2-4x^2y+5x^2y=$	$(-1-4+5)x^2y+(1+4)x^2=5x^2$
$xy^2-2xy+3xy^2-y-4xy-y=$	$(1+3)xy^2+(-2-4)xy+(-1-1)y=4xy^2-6xy-2y$
$12-4xy-3x-4+2xy+x=$	$(-4+2)xy+(-3+1)x+8=-2xy-2x+8$

$2y^2 - x^2 + y^2 + 3y^2 - 3x^2 - 5y^2 =$	$(-1-3)x^2 + (2+1+3-5)y^2 = -4x^2 + y^2$
$2x - 2xy + 3x + 2xy - 5x =$	$(-2+2)xy + (2+3-5)x = 0$
$2x^2 - 3x^2 + xy + x^2 - xy - 4x^2 + 5 =$	$(2-3+1-4)x^2 + (1-1)xy + 5 = -4x^2 + 5$
$4x - 5 + 3x - 2x + 7 - 5x =$	$(4+3-2-5)x + 2 = 2$
$5 - y + 4y + y - 3y + 7 - y =$	$(-1+4+1-3-1)y + 12 = 12$
$7a - a + 10a + 12a - 8a =$	$(7-1+10+12-8)a = 20a$
$6x - 4 + x - 5 - 4x - x =$	$(6+1-4-1)x - 9 = 2x - 9$
$18 + y + 7y - 23 - 4y - 2 - y =$	$(1+7-4-1)y + 18 - 23 - 2 = 3y - 7$
$\frac{5}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{x}{12} =$	$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{12}\right)x + \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
$\frac{x}{10} + \frac{x}{5} - \frac{3}{2} - \frac{2}{5}x + \frac{3x}{5} - \frac{1}{5} =$	$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)x - \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}x - \frac{17}{10}$
$\frac{5x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{7x}{21} - \frac{x}{2} + \frac{25}{30}x - \frac{8}{12} =$	$\frac{11}{6}x - \frac{2}{3}$
$11x^2 + 4x - x^2 - 5x =$	$10x^2 - x$
$-a - 5 - 2a + 3 =$	$-3a - 2$
$2y^2 - 3y + 2y - y^2 =$	$y^2 - y$
$-p^2 - q^2 + 2p^2 - q^2 =$	$p^2 - 2q^2$
$0,1x^3 - 0,02x^3 - 0,003x^3 =$	$-0,123x^3$
$5ab - 4a^2b^2 - 8ab^2 + 3ab - ab^2 - 4a^2b^2 =$	$-8a^2b^2 - 9ab^2 + 8ab$
$3(a-b)^2 - 5(a-b)^2 + \frac{3}{2}(a-b)^2 =$	$-\frac{1}{2}(a-b)^2$
$(p^2 - q^2) + \frac{2}{9}(p^2 - q^2) - \frac{2}{3}(p^2 - q^2) =$	$\left(1 + \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\right)(p^2 - q^2) = \frac{5}{9}(p^2 - q^2)$
$5a^n - 2a^n - 8a^{n+1} + 6a^n - a^{n+1} =$	$(-8-1)a^{n+1} + (5-2+6)a^n = -9a^{n+1} + 9a^n$
$-9x^{k+1} - 4x^k + 12x^{k+1} + 5x^k + x^{k+1} =$	$4x^{k+1} + x^k$
$3b^k - 5b^{k-1} + 7b^{k-1} - 4b^k + 2b^{k-1} =$	$-b^k + 4b^{k-1}$
$-12p^q + 12q^p + 3p^q - 4q^p =$	$-9p^q + 8q^p$

c) Szedd szét 3 nem egyforma tagra: $5x^2$

d) Számítsd ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $a=3$; $b=-5$ (Összevonás!)

$2a-3b+a-5a+5b=$	$-2a+2b \rightarrow -2(3)+2(-5)=-16$
$a^2+2b^2-3a^2+b^2=$	$-2a^2+3b^2 \rightarrow -2(9)+3(25)=57$
$\frac{2}{9}a+\frac{b}{5}-\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}a=$	$\frac{2}{3}a-\frac{b}{5} \rightarrow \frac{2}{3}(3)-\frac{-5}{5}=3$
$a^2+\frac{1}{5}b^2+\frac{3}{2}a^2-2ab+\frac{b^2}{5}+\frac{5}{2}a^2-3ab=$	$5a^2-5ab+\frac{2}{5}b^2 \rightarrow 45+75+10=130$

4) Egytagúak szorzása

Végeredmény: először az együtthatók szorzata, majd *abc* sorrendben a betűs kifejezések.

a) Szöveggel

Mennyit fizettünk összesen, ha x méter szövetet, méterét y forintért és w méter selymet, melynek méterét u forintért vásároltunk?

Mo.: $xy+wu$

Mennyit fizettünk összesen, ha x kg paradicsomot p forintért kilogrammját, és y kg paprikát, kilogrammját q forintért vásároltunk?

Mo.: $xp+ yq$

A piacon vettem 2 kg paradicsomot, kilogrammját x forintért. 4 kg paprika kilogrammja 10 Ft-tal többé, a burgonyáé 20 Ft-tal kevesebbe került, mint a paradicsom kilogrammja. 2 kg burgonyát vettem. Mennyit fizettem összesen?

Mo: $2x+4(x+10)+2(x-2)$

b) Végezd el (Először a számok majd a betűk abc-ben!)

Pl. $2a^1 \cdot 4a^2 \cdot 8a^3 = 64a^6$

$a \cdot (+2) =$	$2a$	$(-b) \cdot 5 =$	$-5b$
$(-c) \cdot \frac{3}{4} =$	$-\frac{3}{4}c$	$x \cdot (-5) =$	$-5x$
$(-1,2) \cdot (-2k) =$	$2,4k$	$(-2) \cdot n =$	$-2n$
$(+4) \cdot (-q) =$	$-4q$	$(-9) \cdot (-k) =$	$9k$
$(-3) \cdot (2a) =$	$-6a$	$-1,2 \cdot (-5x) =$	$6x$
$(-2a)(-1,2) =$	$2,4a$	$(-c)(-b) =$	bc
$(-a)(-b)(c) =$	$-abc$	$(-x)(-y)(-z) =$	$-xyz$
$(-3c)(2b) =$	$-6bc$	$a^2 \cdot a =$	a^3
$(-a^2) \cdot a =$	$-a^3$	$a^2 \cdot (-a) =$	$-a^3$

$6c^2(-3c) =$	$-18c^3$	$(8d)(-2,5d^2) =$	$-20d^3$
$2x^2 \cdot 3x^3 =$	$6x^5$	$(5y^3)(-0,8y^2) =$	$-4y^5$
$\frac{2}{3} a^3 \cdot (-\frac{3}{2} a^2)(-3a^4) =$		$3a^9$	
$(+p)(-q)(z) =$	$-pqz$	$(-b)(c)(-d) =$	bcd
$(-0,3x)(-5y) =$	$1,5xy$	$(8c)(-0,1d) =$	$-0,8cd$
$(-8r)(-0,25) =$	$2r$	$(2,5k)(-0,4m) =$	$-km$

Fejezd be: „Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.”

$a^2 a =$	a^3	$(-x^2)(-x^3) =$	x^5
$(-m)m^3 =$	$-m^3$	$p^2 p^4 =$	p^6
$x^m x^p =$	x^{m+p}	$y^n (-y^2) =$	$-y^{n+2}$
$a^{n+1} a^2 =$	a^{n+3}	$c^{n+1} c^{n-1} =$	$c^{n+1+n-1} = c^{2n}$
$x^{2n+1} x^{n+2} =$	x^{3n+3}	$a^{3k-2} a^{3k+3} =$	a^{6k+1}
$a^{p+q} a^{p-q} =$	a^{2p}	$a^{p+q} a^{p+q} =$	a^{2p+2q}

$(-2x^2y)(-1,5xy^2) =$	$3x^3y^3$
$(-\frac{3}{4} ab^2)(\frac{8}{3} a^2b^3) =$	$-2a^3b^5$
$-5b^2 4b^2 =$	$-20b^4$
$-3a^n(-\frac{2}{3} a^{n+3}) =$	$2a^{2n+3}$
$(-8a^3b^2c)(-2ab^2c^3) =$	$16a^4b^4c^4$
$(\frac{2}{3} x^2y^3z)(6xy^2z^3) =$	$4x^3y^5z^4$
$(\frac{5}{4} a^2b^3c^3d)(-\frac{2}{5} a^3bc^2) =$	$-\frac{1}{2} a^5b^3c^5d$
$3a^3 \cdot 2b^2 \cdot 5a \cdot 2b^2 =$	$60a^4b^4$
$a^3 \cdot b^2 \cdot 5c^3 \cdot 2a^2 \cdot 5b^3 \cdot 2c =$	$100a^5b^5c^4$
$-5x^{k+1}(-2x^2) =$	$10x^{k+3}$
$4k^2 p(-6k^{n-1} p^{n+1}) =$	$-24k^{n+1} p^{n+2}$
$-8a^p x^{q+1} y^q (-0,5a^{2-p} x^{q-1} y^2) =$	$4a^2 x^{2q} y^{q+2}$

c) Egyszerűsíts

$$\frac{12x^3y^4}{3xy^3} = 4x^2y$$

$$\frac{169x^2y^3}{13xy^3} = 13x$$

$$\frac{81x^3y^4x^2y^3}{27xy^3xy} = 3x^3y^3$$

$$\frac{144x^3yx^2y^5}{8xy(x^2y)^2} = 18y^3$$

$$\frac{98(xy^2w^3)^3}{7x^2y^2w^2} = 14xy^4w^7$$

$$\frac{180(x^2y^3)^2(x^3y^2w)^3}{36x^2y^2w(x^2y^5w)^2} = \frac{5x^4y^6x^9y^6w^3}{x^2y^2wx^4y^{10}w^2} = 5x^7$$

III) Egyszerűbb egyenletek

1) A mérlegelv bevezetése

Írd föl az alább összefüggéseket. Úgy kezded, hogy bevezetsz valamire egy ismeretlent...

Gondoltam egy számot. A fele 10-zel több a negyedénél.

$$\frac{x}{2} - 10 = \frac{x}{4} \quad \text{v.} \quad \frac{x}{2} = \frac{x}{4} + 10$$

Gondoltam egy számot. Elhagytam a kétharmadát belőle. A megmaradt 20-szal több az ötödénél.

$$x - \frac{2}{3}x - 20 = \frac{x}{5} \quad \text{vagy:} \quad \frac{1}{3}x - 20 = \frac{x}{5} \quad (\text{mert } 2/3\text{-ot elhagyva } 1/3\text{-ot kapunk})$$

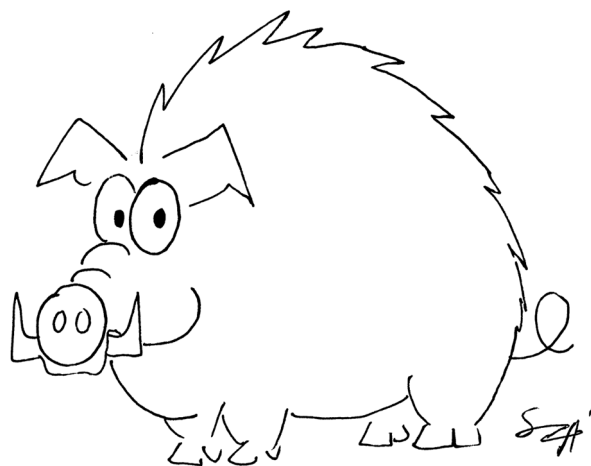
Gondoltam egy számot. A háromszorosához hozzáadtam 20-at, így az eredeti felénél 10-zel többet kaptam.

$$3x + 20 = \frac{x}{2} + 10$$

A kerekerdőben vígan él valamennyi röfi (x db). Ha kétszer annyi élne akkor a számuk 60-nal lenne több a háromnegyedüknél.

$$2x - 60 = \frac{3}{4}x$$

$$2x = \frac{3}{4}x + 60$$



2) Egyenletek felállítása, megoldása - bevezető

a) Írd föl a képen látható egyenleteket. Mérleg, súlyok, és egy-egy ábrán a dobozok azonos súlyúak. Hány kilósak a dobozok? A doboz súlya legyen x .

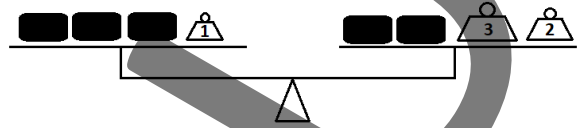
$$3x+1=2x+5 \quad /-1$$

$$3x = 2x+4 \quad /-2x$$

$$x=4$$

$$\text{Vh: } 3(4)+1=2(4)+5 \quad \checkmark$$

$$\underline{x=4}$$



$$3x+3=x+7 \quad /-3$$

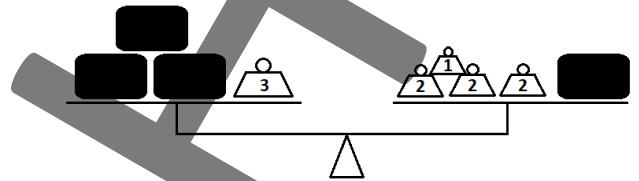
$$3x = x+4 \quad /-x$$

$$2x = 4 \quad /:2$$

$$x=2$$

$$\text{Vh: } 3(2)+3 = (2)+7 \quad \checkmark$$

$$\underline{x=2}$$



$$4x+5=6x+2 \quad /-2$$

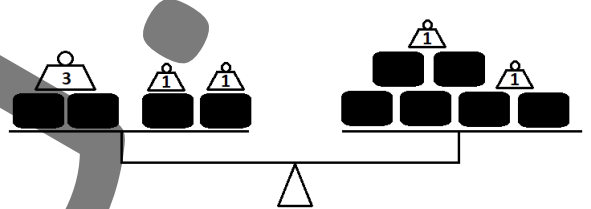
$$4x+3=6x \quad /-4x$$

$$3=2x \quad /:2$$

$$3/2 = x$$

$$\text{Vh: } 4(3/2)+5=6(3/2)+2 \quad \checkmark$$

$$\underline{x=3/2}$$



b) Oldd meg

$$2x - 8 = 7x + 2 \quad /-2$$

$$-10=5x \quad /:5$$

$$x=-2$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=-2}$$

$$30 - 3x = 7x \quad /+3x$$

$$30=10x \quad /:10$$

$$x=3$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=3}$$

$$5x + 6 = -14 - 3x \quad /+3x \text{ és } -6$$

$$8x=-20$$

$$x=-5/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=-2,5}$$

$$3x - 5 = x + 4 \quad /-x+5$$

$$2x=9$$

$$x=9/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=9/2}$$

c) Először összevonás kell!

$$4x - 5 + 3x = 5x + 1 - 8x - 7$$

$$7x - 5 = -3x - 6 \quad /+3x+5$$

$$10x=-1$$

$$x=-1/10$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=-0,1}$$

$$5+3x - 4+8x + 5 = 3x-4+6x + 1$$

$$11x+6 = 9x-3$$

$$2x=-9$$

$$x=-9/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=-9/2}$$

Egy szám ötszöröse 12-vel nagyobb a háromszorosánál 8-cal nagyobb számnál. Melyik ez a szám? Egyenlet, megoldás, visszahelyettesítés!

$$5x-12=3x+8$$

$$2x=20$$

$$x=10$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=10}$$

Melyik az a szám, amelyiknek az ötszöröse 22-vel kisebb, mint a háromszorosa?

$$5x+22=3x$$

$$22=-2x$$

$$x=-11$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-11}$$

Gondoltam egy számra. A négyszerese 6-tal nagyobb, mint a háromszorosánál 5-tel nagyobb szám. Mi volt ez a szám?

$$4x-6=3x+5$$

$$x=11$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=11}$$

Melyik szám négyszereséből vegyünk el 10-et, ha azt szeretnénk, hogy a különbség nagyobb legyen a keresett számnál 2-vel?

$$4x-10 = x+2$$

$$3x=12$$

$$x=4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=4}$$

3) Egyenletek felállítása, megoldása - gyakorlás

Oldd meg: $3x=5x / -3x$ (FIGYELJ, ITT MÉG KÉT OLDALON ÁLL X !)

$$0=2x / :2$$

$$x=0 \text{ Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$8a+a-10+2-4a = -a+13-3a+6a$$

$$5a-8=2a+13$$

$$3a=21$$

$$a=7 \text{ Vh} \checkmark \underline{a=7}$$

$$-3-5x+20+2x = 19-3x+7x-2-8x$$

$$-3x+17 = -4x+17 / -17$$

$$-3x = -4x / +4x$$

$$x=0 \text{ Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$9x+7-8x+6x = 13+4x-5+6x-1-8x$$

$$7x+7 = 2x+7 / -7$$

$$7x = 2x / -2x$$

$$5x = 0 / :5$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$4x-5x+8-6x+5 = 10-x+3-x$$

$$-7x+13 = 13-2x$$

$$-7x = -2x$$

$$-5x=0 / :(-5)$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$a+1+2a+2+3a+3+4a+4 = -2a-2-4a-8$$

$$10a+10 = -6a-10 / +10 -10a$$

$$20 = -16a / :(-16)$$

$$-5/4 = a$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a=-5/4}$$

$$3x+5-4x+7 = 6x+8-7x+10$$

$$-x+12 = -x+18 / +x$$

$$12 = 18$$

Ellentmondás, nincs ilyen x.

$$13x - 2 + 5x - 14 = x + 4x - 10 + 12x - 6 + x$$

$$18x - 16 = 18x - 16 \quad /+16$$

$$18x = 18x \quad /-18x$$

$$0 = 0$$

Azonosság. $\forall x \in \mathbf{R}$ megoldás.

$$8x - 3 - 2x = -x + 4 + 7x$$

$$6x - 3 = 6x + 4 \quad /+3$$

$$6x = 6x + 7 \quad /-6x$$

$$0 = 7$$

Ellentmondás, nincs ilyen x .

4) Egyenletek felállítása, megoldása – törtegyütthetők – még egyenletszorzás nélkül

$$\frac{2}{3}a - 7 = -6$$

$$\frac{2}{3}a = 1 \quad / \cdot (3/2)$$

$$a = 3/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a=3/2}$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{3x}{2} - 3 = \frac{3x}{10} + x - 7$$

$$\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}\right)x - 3 = \left(\frac{3}{10} + 1\right)x - 7$$

$$\frac{23}{10}x - \frac{13}{10}x = -4$$

$$x = -4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-4}$$

$$5 - \frac{7}{6}x + 4x - 3 - \frac{x}{2} = 3x + \frac{5}{3}x + 7$$

$$\left(-\frac{7}{6} + 4 - \frac{1}{2}\right)x + 2 = \left(3 + \frac{5}{3}\right)x + 7$$

$$\frac{7}{3}x = \frac{14}{3}x + 5$$

$$-\frac{7}{3}x = +5$$

$$x = -\frac{15}{7}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-15/7}$$

$$\frac{3}{4}y + 8 - 2y + \frac{3y}{8} = -3y - \frac{1}{8}y + 5$$

$$\left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{8}\right)y + 8 = \left(-3 - \frac{1}{8}\right)y + 5$$

$$-\frac{7}{8}y + 3 = -\frac{25}{8}y$$

$$\frac{18}{8}y = -3$$

$$y = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{y=-4/3}$$

$$\frac{4x}{12} - 8 - \frac{5x}{6} + 5 = 3 - \frac{2}{3}x - 7 + \frac{3}{4}x$$

$$\left(\frac{4}{12} - \frac{5}{6}\right)x - 3 = \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)x - 4$$

$$-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{12}x$$

$$1 = \frac{12}{7}x$$

$$x = \frac{12}{7}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=12/7}$$

$$7x - 3 = -4 + 7x$$

$$-3 = -4$$

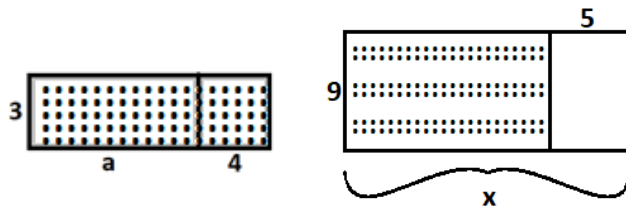
Ellentmondás, \nexists megoldás



IV) Többtagú szorzása egytagúval, egytagú szorzása többtagúval zárójel-fölbontás

1) Szemléltetés

Számold ki a pontozott területet - szorzatként, majd felbontva a szorzatot! Írd alájuk!!

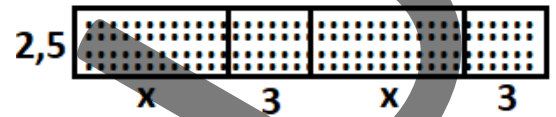


$$3(a+4)$$

$$3a+12$$

$$9(x-5)$$

$$9x-45$$



$$2,5(2x+6)$$

$$5x+15$$

2) Egytagú tényezővel több tagú tényező szorzása

a) Bontsd föl a zárójelet!

$$(e-x)y=ey-xy$$

$$(x-y) \cdot z=xz-yz$$

$$-2x(x+y)=-2x^2-2xy$$

$$(x+y+z)(-y)=-xy-y^2-yz$$

$$ab(a^3-5b^2)=a^4b-5ab^3$$

$$-\frac{5}{3}\left(\frac{6a}{10}-\frac{18b}{15}\right)=-a+2b$$

$$(1-x)4=-4x+4$$

$$7(2y-5)=14y-35$$

$$(3p+2q)6=18p+12q$$

$$10(-2k+3m)=-20k+30m$$

$$(-2z)(5x+4y)=-10xz-8yz$$

$$(-5a)(6a-3b)=-30a^2+15ab$$

$$(-3b)(-2a-4b)=6ab+12b^2$$

$$(2a-5b+6c)(-3)=-6a+15b-18c$$

$$2(3a^2-4a-8)=6a^2-8a-16$$

$$(-5)(4x^3+7x^2-x)=-20x^3-35x^2+5x$$

$$3,5 \cdot \left(\frac{3c}{14}-\frac{5}{7}\right)=\frac{3}{4}c-\frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{5d}{12}-\frac{25}{6}\right)\left(-\frac{18}{15}\right)=-\frac{1}{2}d+5$$

$$-\frac{e}{4}\left(\frac{24}{15}-4e\right)=e^2-\frac{2e}{5}$$

$$-\frac{5f}{12}\left(\frac{2f}{10}-\frac{18}{25}\right)=-\frac{f^2}{12}+\frac{3}{10}$$

$$(2x^3-3x^2+3x-1)4x^2=8x^5-12x^4+12x^3-4x^2$$

$$(8a^3-4a^2b^2-3ab^2+5b^3)(-2a^2b)=8a^4b^3-16a^5b+6a^3b^3-10a^2b^4$$

$$(-2a^3x+5a^2x^2-4ax^3+3x^4)(-3ax^2)=6a^4x^3-15a^3x^4+12a^2x^5-9ax^6$$

$$\frac{2x}{3}(-x^2+12x+4)=-\frac{2}{3}x^3+8x^2+\frac{8}{3}x$$

$$\frac{4}{5}x(10x^3-15x^2+5x+5)=8x^4-12x^3+4x^2+4x$$

$$0,4x(-3x^3-0,1x^2+0,5x+0,03)=-1,2x^4-0,04x^3+0,02x^2+0,012x$$

b) Több tag felbontása – a műveletek után vonj össze!

$$3(x+y)-5(x-y)=-2x+8y$$

$$x(x+y)-y(x-y)=x^2+y^2$$

$$2m(m-2n)+n(4m+n)=2m^2+n^2$$

$$-3x(x-2y)+2x(2x-y)=x^2+4xy$$

$$x(x^2+x)-3x(x-2x^2)=7x^3-2x^2$$

$$2(a^2+ab)-a(a-b)=a^2+3ab$$

$$3a(2a+3b)-3b(3a-2b)=6a^2+6b^2$$

$$3x(-3x+2y)-5y(x-y)=-9x^2+xy+5y^2$$

$$-3(a-b)-2(a+3b)-5(3a-2b)+5(a-2b)=-15a-3b$$

$$4(2x-y+z)-2(x+2y-2z)-3(-x-y-4z)=9x-5y+20z$$

$$6p^2-5p(2q-p)+4p(-3p-2,5q)=-p^2-20pq$$

$$10x(4x^2-7y)-6x(5y+7x^2)-3xy=-2x^3-103xy$$

$$-x(3x^3-x^2+2)+2x^2(-x^2+4x-3)-(3x^2-x+2)=-5x^4+9x^3-9x^2-x-2$$

$$-(4x^4-3x^3+2x^2-x+1)+2x(-2x^3+x^2-3)-5x^2(-3x^2-4x+1)=7x^4+25x^3-7x^2-5x-1$$

$$5(x^n-y^{n-1})-2(x^n+3y^{n-1})+4(x^n-5y^{n-1})=7x^n-31y^{n-1}$$

$$2a^k(7a^2-2a^p)-2a^p(3a^{2-p}-4a^k)=4a^{k+p}+14a^{k+2}-6a^2$$

c) Folytasd: Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$$(7^{a-2})^3 = 7^{3(a-2)} = 7^{3a-6}$$

$$(x^{2y-3})^2 = x^{2(2y-3)} = x^{4y-6}$$

$$(5^{2x^2-x+5})^{3x} = 5^{3x(2x^2-x+5)} = 5^{6x^3-3x^2+15x}$$

3) Helyettesítési érték - behelyettesítés

Mennyi a következő kifejezés helyettesítési értéke, ha $a = \frac{7}{9}$ és $b = \frac{2}{7}$

$$2,5(2a + 4b) - 3(a - 4b + 2) - 2(3a + 2b - 3) - (-4)(a - b) =$$

$$= 14b, \text{ ezért a helyettesítési érték: } 4$$

Mennyi a következő kifejezés helyettesítési értéke, ha $u = -\frac{1}{4}$ és $v = \frac{1}{2}$

$$2u(u - 3v) - 4v(0,5u - 2v) - u(2u - 2v) - 2v(u + 4v) =$$

$$= -8uv, \text{ ezért a helyettesítési érték: } 1$$

4) Egytagok osztása - egyszerűsítsünk

$$\frac{2^8 \cdot 3^7 x^3 y z^4}{2^3 \cdot 3 x^2 y z^4} = 2^5 3^6 x$$

$$\frac{128 \cdot 243 x^5 y^3 z}{32 \cdot 27 x^2 y} = 36 x^3 y^2 z$$

$$\frac{(2xy)^6 (3x^2y^3)^6}{((6xy^3)^3)^2} = x^{12} y^6$$

5) Egyenletmegoldás

Először boncold föl a zárójeleket – ahol vannak!

$$3x - (x - 2) - 2(-x - 2) = 2 - 2x - (x + 3)$$

$$-(5 - 2x) + 3(x - 4) + 7 = 9 - 3x + 2(3 - 2x) - 2(x - 5)$$

$$4x + 6 = -3x - 1$$

$$5x - 10 = -9x + 25$$

$$7x = -7$$

$$14x = 35$$

$$x = -1$$

$$x = 5/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x = -1}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x = 5/2}$$

$$3(5 - 2(x + 4)) = -9(x + 1) \quad (x = 0)$$

$$-5(1 - 3x) + 2(3x - 2) - 3 = -2(1 - 2x) - 5(2 - 3x)$$

$$3(-3 - 2x) = -9x + 9$$

$$15x - 5 + 6x - 4 - 3 = 4x - 2 + 15x - 10$$

$$-6x - 9 = -9x - 9$$

$$21x - 12 = 19x - 12$$

$$-6x = -9x$$

$$21x = 19x$$

$$3x = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x = 0}$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x = 0}$$

$$3(2x-1)-2(x+3) = 2(2x-1)-(-x-3)$$

$$4x-9=5x+1$$

$$-10=x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-10}$$

$$14-(x+5)+3(2-4x) = -5(2x+4)+8$$

$$-13x+15 = -10x-12$$

$$27 = 3x$$

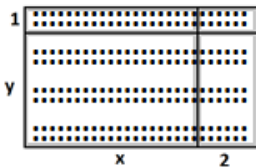
$$x=9$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=9}$$

V) Több tag szorzása több taggal

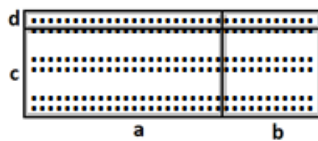
1) Bevezetés, szemléltetés

Írd alájuk a pontozott területet először szorzat, majd „összeg alakban”, vagyis felbontva a szorzatot!



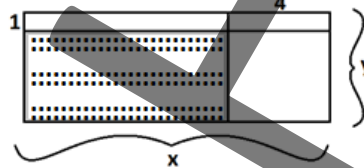
$$(x+2)(y+1)$$

$$xy+x+2y+2$$



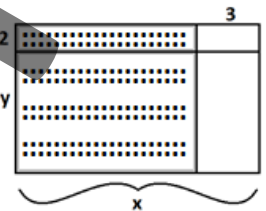
$$(a+b)(c+d)$$

$$ab+ac+bc+bd$$



$$(x-4)(y-1)$$

$$xy-4y-x+4$$

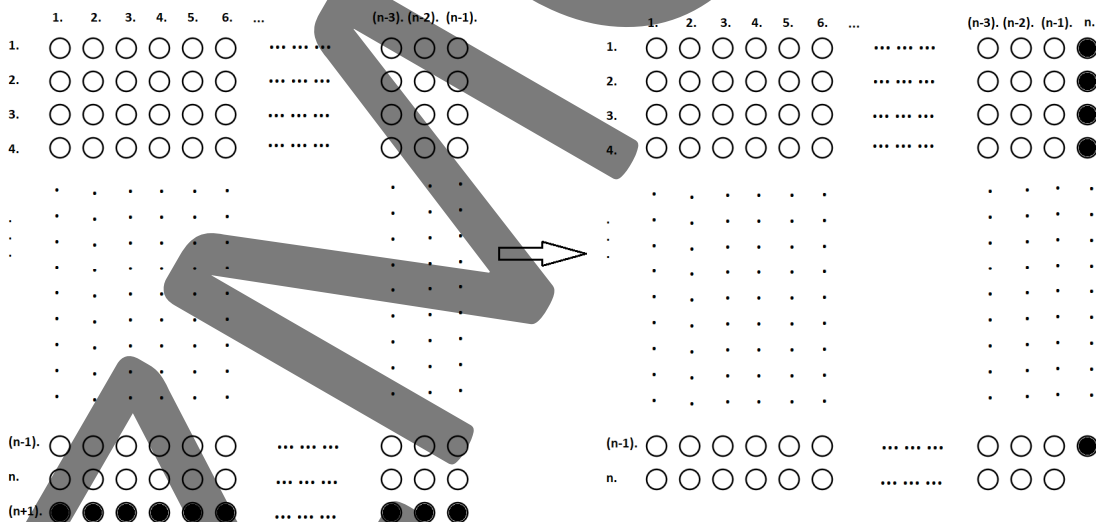


$$(x-3)(y+2)$$

$$xy+2x-3y-6$$

Fejezd be: „Azonos kitevőjű hatványokat úgy szorzunk, hogy az alapok szorzatát emelem az adott kitevőre”

Nem kötelező: Szemléltetés nézd meg az ábrát, és magyarázd el, hogy $(n+1)(n-1)=n^2-1$
Segítség az első elrendezésben van n-1 oszlop és n+1 sor. Az alsó feketéket rendezem át.



Az ábra alapján magyarázd el, hogy $(n+1)(n-1)=n^2-1$

Mo: $(n-1)$ oszlop, minden oszlopban $(n+1)$ golyó (n db. fehér és 1 fekete).

Ez összesen: $(n-1)(n+1)$ db. golyó.

A feketéket átrendezem: így n db. oszlop lesz, mindegyikben n db. golyó, kivéve a legutolsó: vagyis összesen n^2-1 db. golyó van.

$$\text{Így: } (n-1)(n+1) = n^2-1$$

2) Többszorzók szorzása

a) Bontsd föl – vonj össze, ha lehet. Csökkenő fokszám!

$$(a-3)(b+2)=ab+2a-3b-6$$

$$(2a+2)\left(a+\frac{3}{2}\right)=2a^2+5a+3$$

$$(ab-1)(a+b)=a^2b+ab^2-a-b$$

$$(a^2+1)(a+1)=a^3+a^2+a+1$$

$$(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$$

$$(0,1x-10)(10x+0,1)=x^2-99,99x-1$$

$$(x^2+2x+1)(x+1)=x^3+3x^2+3x+1$$

$$(2ab+1)(a-b)=2a^2b-2ab^2+a-b$$

$$(5a^2+1)\left(\frac{a}{5}-1\right)=a^3-5a^2+\frac{a}{5}-1$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$$

$$(a+2)(a+3)=a^2+5a+6$$

$$(2x-1)(5-3x)=-6x^2+13x-5$$

$$(x^3+x)(x^2+x+3)=x^5+x^4+4x^3+x^2+3x$$

$$(3x+2y)(2x+3y)=6x^2+13xy+6y^2$$

$$(3a^2-2b)(2a^2+3b)=6a^4+5a^2b-6b^2$$

$$(3ab-4a^2)(5a+2b)=-20a^3+7a^2b+6ab^2$$

$$(7x^2-x)(5x^2+3x)=35x^4+16x^3-3x^2$$

$$(3x-5)(3x+5)=9x^2-25$$

$$(2x+3)(2x+3)=4x^2+12x+9$$

$$(5-x)(x+5)=-x^2+25$$

$$(4x+12)(4x-12)=16x^2-144$$

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=x^5+1$$

$$(x^2-2)(x^6+2x^4+4x^2+8)=x^8-16$$

b) Három tényező - egyszerre csak kettőt szorozz össze! (Nagyzárójel!)

$$(x-a)(x-b)(x-c)=(x^2-ax-bx+ab)(x-c)=x^3-ax^2-bx^2-cx^2+abx+acx+bcx-abc$$

$$(2x-3)(x+5)(3x-4)=(2x^2+7x-15)(3x-4)=6x^3+13x^2-73x+60$$

$$(3x^2-2x+1)(x-5)=3x^3-17x^2+11x-5$$

$$(4ab-a^2)(0,5ba-b^2)=-0,5a^3b+3a^2b^2-4ab^3$$

$$-3(2-x)(-5-x) = -3(x^2+3x-10) = -3x^2-9x+30$$

$$-3(x-3)(3x+5) = -3(3x^2-4x-15) = -9x^2+12x+45$$

$$-(2x-1)(1-5x) = (2x-1)(5x-1) = 10x^2-7x+1$$

$$-15(12x-2)(x+4) = -15(12x^2+46x-8) = -180x^2-690x+120$$

$$(13x-5)(15x+2) = 195x^2-49x-10$$

$$-(5-3x)(5x+3) = (3x-5)(5x+3) = 15x^2-16x-15$$

$$-12(12x-1)(x+3) = -12(12x^2+35x-3) = -144x^2-420x+36$$

$$(2x^2-3x-4)(5x-1) = 10x^3-17x^2-17x+4$$

$$(11x^2-x+2)(5x-3) = 55x^3-38x^2+13x-6$$

$$-3(8-2x)(8+2x) = 3(2x-8)(2x+8) = 12x^2-192$$

$$(5x+1)^2 = (5x+1)(5x+1) = 25x^2+10x+1$$

$$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2-6x+9$$

$$-2(5-2x)^2 = -2(5-2x)(5-2x) = -8x^2+40x-50$$

$$(x^2-1)(x^4+2) = x^6-x^4+2x^2-2$$

$$(-2x^3-2)(-3x^3+3) = 6x^6-6$$

$$(a^2+a+1)(a-1) = a^3-1$$

c) Csak a végeredményt írd le, fejben számold! Csökkenő fokszám, összevonás!

$$(a+1)(a+2) = a^2+3a+2$$

$$(x+3)(x+5) = x^2+8x+15$$

$$(x-2)(x+4) = x^2+2x-8$$

$$(x-3)(x-4) = x^2-7x+12$$

$$(2x+1)(x+3) = 2x^2+7x+3$$

$$(3x+5)(x+2) = 3x^2+11x+10$$

$$(3x+2)(x-1) = 3x^2-x-2$$

$$(5x+1)(x-3) = 5x^2-14x-3$$

$$(2x+1)(3x+2) = 6x^2+7x+2$$

$$(3x-1)(2x+3) = 6x^2+7x-3$$

$$(5x-2)(2x-1) = 10x^2-9x+2$$

$$(7x-2)(3x-4) = 21x^2-34x+8$$

$$(x-5)(x+5) = x^2-25$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2+2x+1$$

$$(x-1)^2 = (x-1)(x-1) = x^2-2x+1$$

$$(2x+1)^2 = (2x+1)(2x+1) = 4x^2+4x+1$$

$$(3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$$

$$(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9$$

d) Több tag, egy tag többtényezős: NAGY ZÁRÓJELEK KIRAKÁSA!

Bontsd föl a zárójelet, vonj össze, csökkenő fokszám!

$$2(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)=2(x^2-6x+8)-(x^2-4x+3)=x^2-8x+13$$

$$3(a-5)(3a-1)-2(5a+2)(a-3)=-a^2-22a+27$$

$$3(k-2)(2k-3)+2(k+6)(2k-5)-(k-4)(k+4)=9k^2-7k-26$$

$$-(2x-3)(3x+1)+2(2x+3)(x-3)=-2x^2+x-15$$

$$-3(a-3)(a+4)-(5-a)(2a+5)=-a^2-8a+11$$

$$5(2x+3)(3x+5)-(3x+2)(x-4)=27x^2+105x+83$$

$$-(a+1)(1-a)+3(2-a)(a-2)-3(2a-4)(a+1)=-8a^2+18a-1$$

$$2(x-3)^2-(2x+3)(-2x+3)-4(x+2)^2=(2x^2-12x+18)-(-4x^2+9)-4(x^2+4x+4)=2x^2-28x-7$$

$$(2x-1)(x+3)-4(x+2)(x-4)+3(2x+3)(x+5)=4x^2+52x+74$$

$$\begin{aligned} & -3(x-2)(x+5)-(3x-1)^2+3(x-2)(2x+6)=-3(x^2+3x-10)-(9x^2-6x+1)+3(2x^2+2x-12)= \\ & =-6x^2+3x-7 \end{aligned}$$

e) Többtagú tényezők – többtényezős szorzatok – minden tagot minden taggal

$$(3x^2-3x+2)(-x^2+x-3)=-3x^4+6x^3-14x^2+11x-6$$

$$(3x^2-x+4)(x-3)=3x^3-10x^2+7x-12$$

$$(2x+5)(x^2-4x+3)=2x^3-3x^2-14x+15$$

$$(5x+2)(2x^2-3x+4)=10x^3-11x^2+14x+8$$

$$(3x^2-4x+2)(-x^2+x+3) = -3x^4+7x^3+3x^2-10x+6$$

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2) = x^4+4 \text{ (Nagyon érdekes)}$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1 \text{ (Felettébb érdekes)}$$

Gyorsítottan: csökkenő kitevőket figyelve:

$$(2x-5)(3x+7) = 6x^2-x-35$$

$$(3x-2)(4x-3) = 12x^2-17x+6$$

$$(4-5x)(3x+2) = -15x^2+2x+8$$

$$(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$$

$$(2x^2-4x+1)(2x^2+4x-1) = 4x^4-16x^2+8x-1$$

$$(x^2-3x-4)(2x^2+3x-1) = 2x^4-3x^3-18x^2-9x+4$$

f) Több tényező, többtagú tényezők, több tag – nagyzárójelek kirakása!

$$(2x+3)(3x+2)(x-1) = (6x^2+13x+6)(x-1) = 6x^3+7x^2-7x-6$$

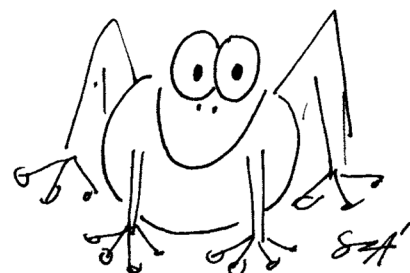
$$(5x+2)(x-3)(2x+4) = (5x^2-13x-6)(2x+4) = 10x^3-6x^2-64x-24$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1) = (x^4+x^2+1)(x^2-1) = x^6-1$$

$$-(-2x^2+x-2)(5-6x) + 2x(5x^2-3x-1) - (x-2)(-2x^2-x+3) = 7x^2-24x+16$$

$$-3(-1-x^2-x)(-3+x) - (2-x)(3x-3x^2+5) + 2(6-2x)(x-3-2x^2) = 8x^3-25x^2+17x-55$$



g) Keresd a szimmetriát, jól válaszd ki, mely tényezőket szorzod össze először!

$$(2a-3)(a+2)(a-2)(2a+3)=(4a^2-9)(a^2-4)=4a^4-25a^2+36$$

$$(a+2)(a^2-3)(a-2)(a^2+3)=(a^2-4)(a^4-9)=a^6-4a^4-9a^2+36$$

3) Két tag összegének, különbségének a négyzete

a) Alap

Írd ide a két tag összegének négyzetére vonatkozó mondókát!

Két tag összegének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete plusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

Fejben végezd el a következőket, csak az eredményt írd melléjük!

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$

$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$$

$$(3x+1)^2=9x^2+6x+1$$

$$(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$$

$$(3x+5)^2=9x^2+30x+25$$

Írd ide a két tag különbségének négyzetére vonatkozó mondókát!

Két tag különbségének a négyzete három tagú. Az első tag négyzete mínusz a kétszeres szorzatuk plusz a második tag négyzete.

Fejben végezd el a következőket, csak az eredményt írd melléjük!

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(x-1)^2=x^2-2x+1$$

$$(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$(2x-1)^2=4x^2-4x+1$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(3x+2)^2=9x^2+12x+4$$

$$(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$

$$(7x+3)^2=49x^2+42x+9$$

$$(7x-3)^2=49x^2-42x+9$$

b) Gyakorlás

$$(2x-y)^2=4x^2-4xy+y^2$$

$$(3x-5)^2=9x^2-30x+25$$

$$(11x+1)^2=121x^2+22x+1$$

$$(13x-1)^2=169x^2-26x+1$$

$$(12x-7)^2=144x^2-168x+49$$

$$(7x-4)^2=49x^2-56x+16$$

$$(8x+13)^2=64x^2+208x+169$$

$$(3x-9)^2=9x^2-54x+81$$

$$(x^2-5)^2=x^4-10x^2+25$$

$$\left(\frac{3}{2}x+3\right)^2=\frac{9}{4}x^2+9x+9$$

$$(x^3+x)^2=x^6+2x^4+x^2$$

$$(2-3x)^2=9x^2-12x+4$$

$$(5x^3-x^2)^2=25x^6-10x^5+x^4$$

$$(x^2-5x^3)^2=25x^6-10x^5+x^4$$

$$(a^n - 2)^2 = a^{2n} - 4a^n + 4$$

$$(3x^n - 5x^k)^2 = 9x^{2n} - 30x^{n+k} + 25x^{2k}$$

$$(x^k - x^{k+1})^2 = x^{2k+2} - 2x^{2k+1} + x^{2k}$$

$$\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2 = \frac{x^2}{4} + 3x + 9$$

$$\left(\frac{3x}{2} - 5\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 - 15x + 25$$

$$\left(\frac{4x}{3} - \frac{y}{4}\right)^2 = \frac{16x^2}{9} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{16}$$

$$(5^{x+3})^2 = 5^{2x+6}$$

$$(7^{2x-5})^2 = 7^{4x-10}$$

$$(a^{2x-3})^{2x-3} = a^{4x^2-12x+9}$$

$$(3a^n + 2)^2 = 9a^{2n} + 12a^n + 4$$

$$(x^k + x^2)^2 = x^{2k} + 2x^{k+2} + x^4$$

$$(x^{k-2} - x^7)^2 = x^{2k-4} - 2x^{k+5} + x^{14}$$

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$$

$$\left(\frac{2x}{3} - 3\right)^2 = \frac{4x^2}{9} - 4x + 9$$

$$\left(5x - \frac{3}{5}\right)^2 = 25x^2 - 6x + \frac{9}{25}$$

$$(5^{x+3})^{x+3} = 5^{(x+3)(x+3)} = 5^{(x+3)^2} = 5^{x^2+6x+9}$$

$$(7^{2x-5})^{2x-5} = 7^{4x^2-20x+25}$$

$$(5^{3x-2})^{3x-2} = 5^{9x^2-12x+4}$$

Ismerd föl, hogy minek a négyzete!

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$9a^2 + 12a + 4 = (3a+2)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$25x^2 + 20x + 4 = (5x+2)^2$$

$$4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$$

Egészítsd ki úgy, hogy teljes négyzet legyen, és írd mellé, minek a négyzete

$$x^2 - 4x + \dots = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$16x^2 - \dots + 1 = (4x-1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$$

$$4a^2 + 12a + \dots = (2a+3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$$

$$4a^2 - \dots + 25 = (2a-5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$$

4) Ismétlés: bontsd föl, majd vonj össze – figyelj – nagy zárójelek!!

$$(x+2)^2 + 3(x+1)^2 = 4x^2 + 10x + 7$$

$$2(y-2)^2 - 3(y+3)^2 = -y^2 - 26y - 19$$

$$4(3-5a)^2 - 5(3a-7)(3a+7) = 55a^2 - 120a + 281$$

$$(a-1)^2 - 3(a+1)^2 - 5(a-1)(a+1) = -7a^2 - 8a + 3$$

$$(a-b)^2 + (a+b)(a-b) + 2a(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + 2a^2 - 2ab = 4a^2 - 4ab$$

$$(14x+6)^2 - (15x+11)(15x-11) = 196x^2 + 168x + 36 - 225x^2 + 121 = -29x^2 + 168x + 157$$

SZORZATTÁ-ALAKÍTÁS

I) Szorzattá alakítás

1) Csak szám emelhető ki; a főegyüttható pozitív legyen!

$$5x-5a=5(x-a)$$

$$-4x+16y=-4(x-4y)$$

$$-15a+6b=-3(5a-2b)$$

$$-21a+6b-15c=-3(7a-2b+5c)$$

Határozd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját

$$(180;126)=18$$

$$(1400;750)=50$$

$$(1512;1080)=216$$

$$(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; 2 \cdot 3^2 \cdot 7)$$

$$(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7; 2 \cdot 3 \cdot 5^3)$$

$$(2^3 \cdot 3^3 \cdot 7; 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5)$$

2) Betű is kiemelhető

a) Amit lehet emelj ki! (A főegyüttható pozitív legyen, csökkenő fokszám!)

$$ax+bx=x(a+b)$$

$$a^2+a=a(a+1)$$

$$ca-cb=c(a-b)$$

$$x^2-x=x(x-1)$$

$$3ab+3a=3a(b+1)$$

$$10x-5xy=-5x(y-2)$$

$$4x^2-6x=2x(2x-3)$$

$$22x-121xy=-11x(11y-2)$$

$$5ab+5ac-10ad=5a(b+c-2d)$$

$$3xy-6xz=3x(y-2z)$$

$$15ax-10ay=5a(3x-2y)$$

$$-2xy-ay+by=-y(2x+a-b)$$

$$3x^2+x=x(3x+1)$$

$$5b-15ab-25b^2=-5b(3a+5b-1)$$

$$12a^3+27a^2=3a^2(4a+9)$$

$$6m^4-3m^3=3m^3(2m-1)$$

$$-10x^3-5x^2=-5x^2(2x+1)$$

$$8a^4-12a^2=4a^2(2a^2-3)$$

$$3m^2+6m^3=3m^2(2m+1)$$

$$15y^3-5y=5y(3y^2-1)$$

$$9a^5-12a^4+15a^3=3a^3(3a^2-4a+5)$$

$$-18z^6+24z^3-30z^2=-6z^2(3z^4-4z+5)$$

$$-ab^2-a^2b^3=-ab^2(ab+1)$$

$$-a^4x^2-a^3x^4=-a^3x^2(x^2+a)$$

$$5m^2x^2+10mx^3=5mx^2(2x+m)$$

$$6x^3y^2-216x^3y=6x^3y(y-36)$$

$$3x^2y-6xy+6xy^2=3xy(x+2y-2)$$

$$27x^3-54x^2-81x=27x(x^2-2x-3)=27x(x+1)(x-3)$$

b) Amit lehet emelj ki! (A főegyüttható pozitív legyen, csökkenő fokszám!)

$$3a^2x+6ax^2=3ax(2x+a)$$

$$5xy^2-10x^3y^4=-5xy^2(2x^2y^2-1)$$

$$4a^2-2ab+6a=2a(2a-b+3)$$

$$-6b^3-18ab^2+3b^2=-3b^2(6a+2b-1)$$

$$8a^2bc-12ab^2c-6abc^2=2abc(4a-6b-3c)$$

$$10a^2bc-20a^2b^2c-15ab^2c=-5abc(4ab-2a+3b)$$

$$-14a^2c^2-21ab^2c^3-7c^2=-7c^2(3ab^2c+2a^2+1)$$

$$4a^2bc-2b^2c+6bc^2=2bc(2a^2-b+3c)$$

$$80x^2y^2-40x^2y-60xy^2=20xy(4xy-2x-3y)$$

$$26x^3u^3-39x^2u^4+52xu^5=13xu^3(2x^2-3xu+4u^2)$$

$$99pr-88p^2r+77pr^2-66p^2r^2=-11pr(6pr+8p-7r-9)$$

$$44x^2y-22x^3y^2+121x^2y^3=-11x^2y(2xy-11y^2-4)$$

$$10a^4b^3-15a^4b^2+5a^3b^2=5a^3b^2(2ab-3a+1)$$

$$-32x^4y^3+24x^2y^4-8x^2y^2=-8x^2y^2(4x^2y-3y^2+1)$$

$$x^{n+5}+3x^5=x^5(x^{n+3}+3)$$

$$12x^{2n+3}-18x^2=6x^2(2x^{2n+1}-3)$$

$$x^n+x^{n+2}=x^n(x^2+1)$$

$$y^{n+k}-y^k=y^k(y^n-1)$$

$$x^{5n}-x^{3n}=x^{3n}(x^{2n-1}-1)$$

$$5a^{k+2}-10a^2=5a^2(a^{k-2}-2)$$

c) Zárójeles kifejezés emelhető ki

$$a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

$$x(a+3)-y(a+3)=(a+3)(x-y)$$

$$a(x-5)+b(x-5)=(x-5)(a+b)$$

$$x(a+1)-y(a+1)=(a+1)(x-y)$$

$$3a(a-b)+2b(a-b)=(a-b)(3a+2b)$$

$$2y^2(5x-1)+(5x-1)=(5x-1)(2y^2+1)$$

$$6m(p-3)+5z(p-3)=(p-3)(6m+5z)$$

$$(p-q)-2p(p-q)=-(p-q)(2p-1)$$

$$3x(2b-3)-(2b-3)=(2b-3)(3x-1)$$

$$5x(a+b)-4y(a+b)=(a+b)(5x-4y)$$

$$x^2(2+3x)+2(3x+2)=(3x+2)(x^2+2)$$

$$2y^2(5x+1)-(1+5x)=(5x+1)(2y^2-1)$$

$$-(3x+2)+5x(3x+2)=(3x+2)(5x-1)$$

$$(x^2-1)-3x(x^2-1)=-(x^2-1)(3x-1)$$

$$(5x+2)-3x(5x+2)+6x^2(5x+2)=(5x+2)(6x^2-3x+1)$$

$$k^2(x^2+3)-(3+x^2)-k(x^2+3)=(x^2+3)(k^2-k-1)$$

d) Mindenre figyelünk – **csökkenő fokszám, a főegyüttható pozitív legyen!**

A SZORZATTÁ ALAKÍTÁSHOZ A ZÁRÓJELBŐL IS MINDENT KI KELL EMELNI – abc – csökkenő fokszám – relatív prím együtthatók (minden, ami lehet, kiemelve)!

Symbolab-be: factor(x(2b-4)-x^2(3b-6))

(Így adja, de a főegyüttható nem lesz pozitív: x(b-2)(2-3x)

$$x(2b-4)-x^2(3b-6) = -x(3x-2)(b-2)$$

$$2(5ax-15a)-3a(4xb-12b) = -2a(x-3)(6b-5)$$

$$(3x^2-6)-y(5x^2-10) = -(x^2-2)(5y-3)$$

$$-3k(15x^3+5x)+4(6x^4+2x^2) = x(3x^2+1)(8x-15k)$$

$$x(x-4)-3(4-x) = (x-4)(x+3)$$

$$y(b-5)+3(5-b) = (b-5)(y-3)$$

$$p(p-1)-4(1-p) = (p-1)(p+4)$$

$$(x-2)+x(2-x) = -(x-2)(x-1)$$

$$a(2x-2y)-(3y-3x) = 2a(y-y)+3(x-y) = (x-y)(2a+3)$$

$$(y-x)+2x(x-y) = -(2x-1)(x-y)$$

$$3x(x-1)-(1-x) = (x-1)(3x+1)$$

$$2k(a-b)+(b-a) = (a-b)(2k-1)$$

$$x(2p-a)+y(2a-4p)-(10p-5a) = -x(a-2p)+2y(a-2p)+5(a-2p) = -(a-2p)(x-2y-5)$$

$$a(x+y-z)-3b(x+y-z)-5x(z-x-y) = (x+y-z)(a-3b+5x)$$

$$x(6x-2)+y(3-9x) = 2x(3x-1)-3y(3x-1) = (3x-1)(2x-3y)$$

$$x(10-15x)+(4-6x)+y(14-21x) = -5x(3x-2)-2(3x-2)-7y(3x-2) = -(3x-2)(5x+7y+2)$$

$$x(2-3x)+(6x^3-4x^2) = -x(3x-2)+2x^2(3x-2) = x(3x-2)(2x-1)$$

$$(y-5xy)+(10xy^2-2y^2) = y(5x-1)(2y-1)$$

$$-2(6x-3x^2)-3(4x^2-8x)+2x(10x-5x^2) = 6x(x-2)-12x(x-2)-10x^2(x-2) = -2x(x-2)(5x+3)$$

e) Alakítsd szorzattá - már nincs csoportosítva

abc – csökkenő fokszám – relatív prím együtthatók (minden, ami lehet, kiemelve) – a főegyütthatók pozitívok!

$$ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y)$$

$$ax-by-ay+bx=(a+b)(x-y)$$

$$a^2+bc+ab+ac=(a+b)(a+c)$$

$$x^3+9+3x^2+3x=(x^2+3)(x+3)$$

$$x^2-xy+ax-ay=(x-y)(x+a)$$

$$x^2+2y-xy-2x=(x-2)(x-y)$$

$$m^2-5a+ma-5m=(a+m)(m-5)$$

$$a^2+3b-ab-3a=(a-b)(a-3)$$

$$3ax-4by-4ay+3bx=(a+b)(3x-4y)$$

$$5bx-6ax-5by+6ay=-(x-y)(6a-5b)$$

$$10b^2+21xy-14bx-15by=(7x-5b)(3y-2b)$$

$$30bx-34cx-15b+17c=(2x-1)(15b-17c)$$

$$! x+x^2-x^3-x^4=-x(x+1)^2(x-1)$$

$$3x^2-3xy+3y^2-3xy=3(x-y)^2$$

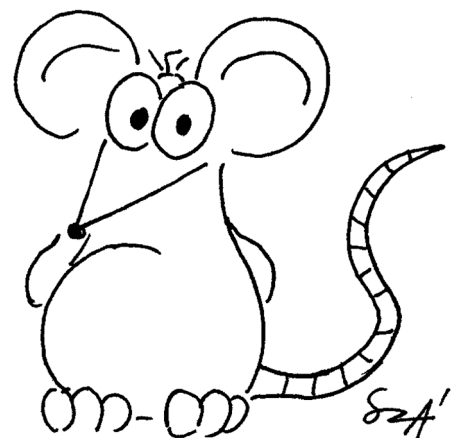
$$9a^2-6ab+4b^2-6ab=(3a-2b)^2$$

$$6x+15x^2-8x^3-20x^4=-x(4x^2-3)(5x+2)$$

$$x^3+x^2y-x^2z-xyz=x(x^2+xy-xz-yz)=x(x+y)(x-z)$$

$$3x+6+x^2+2x=(x+2)(x+3)$$

$$x^2-12x-3x+36=(x-3)(x-12)$$



$$5x-15+x^2-3x=(x-3)(x+5)$$

$$6y-6x-9xy+4=-3(3x-2)(3y+2)$$

$$x^2-xy-2x+2y=(x-y)(x-2)$$

$$3ax-4by-4ay+3bx=(a+b)(3x-4y)$$

$$5bx-6ax-5by+6ay=(x-y)(5b-6a)$$

$$10a^2+21xy-14ax-15ay=(7x-5a)(3y-2a)$$

$$6a^2-6ab+6b^2-6ab=6(a-b)^2$$

$$ax^2-bx^2-bx+ax-a+b=x^2(a-b)+x(a-b)-(a-b)=(a-b)(x^2+x-1)$$

$$ax^2-bx+b-ax+bx^2+a=x^2(a+b)-x(a+b)+(a+b)=(a+b)(x^2-x+1)$$

$$ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx=x^2(a+b-c)+x(a+b-c)=x(a+b-c)(x+1)$$

$$ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx=ax(x-1)+bx(x-1)+cx(x-1)=x(x-1)(a+b+c)$$

II) Teljes négyzet

1) Szorzattá alakítás előtt mindent kiemelünk!

Csökkenő fokszám, minden kiemelve (az együtthatók relatív prímek legyenek), a főegyüttható pozitív legyen!

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$4a^2+4a+1=(2a+1)^2$$

$$-10x+25x^2+1=(5x-1)^2$$

$$4x^2-12x+9=(2x-3)^2$$

2) Mindent kiemelünk, a főegyüttható pozitív, csökkenő fokszám stb.

$$-2a^2-4a-2=-2(a+1)^2$$

$$-5xb^2-5a^4x+10xa^2b=-5x(a^4-2a^2b+b^2)=-5x(a^2-b)^2$$

$$3x+75y^4x-30y^2x=3x(5y^2-1)^2$$

$$-x^4+2yx^2-y^2=-(x^2-y)^2$$

$$9a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = (3a^2 - b^2)^2$$

$$20x^2y^2 - 50x^4 - 2y^4 = -2(5x^2 - y^2)^2$$

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x+y)^2$$

$$-3b - 3a^2b + 6ab = -3b(a-1)^2$$

$$3xy^2 + 3x - 6xy = 3x(y-1)^2$$

$$2a + 2ab^2 - 4ab = 2a(b-1)^2$$

$$4ax + 4ax^3 - 8ax^2 = 4ax(x-1)^2$$

$$44x - 121x^2 - 4 = -(11x-2)^2$$

III) Egy különleges alak $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1) Odafele – végezd el a szorzást – CSAK AZ EREDMÉNYT ÍRD LE!

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

$$(a+2)(a-2) = a^2 - 4$$

$$(x-13)(x+13) = x^2 - 169$$

$$(15x+19y)(15x-19y) = 225x^2 - 361y^2$$

$$(2b-3a)(2b+3a) = 4b^2 - 9a^2$$

$$(12x+11y)(12x-11y) = 144x^2 - 121y^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = a^4 - b^4$$

$$(2xy-1)(2xy+1) = 4x^2y^2 - 1$$

$$(3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$(15a^2+18)(15a^2-18) = 225a^4 - 324$$

$$(17a^2 + 15b)(17a^2 - 15b) = 289a^4 - 225b^2$$

$$(0,2a-0,5b)(0,2a + 0,5b) = 0,04a^2 - 0,25b^2$$

$$(xk+y)(xk-y) = x^2k^2 - y^2$$

$$(14x-16)(14x+16) = 196x^2 - 256$$

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) = a^2 - \frac{9}{4}$$

$$(ab-0,5)(ab + 0,5) = a^2b^2 - 0,25$$

$$\left(xy - \frac{x}{y}\right)\left(xy + \frac{x}{y}\right) = x^2y^2 - \frac{x^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{2x}{3} + 2\right)\left(\frac{2x}{3} - 2\right) = \frac{4}{9}x^2 - 4$$

$$(1,5b-0,5)(1,5b+0,5) = 2,25b^2 - 0,25$$

$$\left(xy - \frac{x}{y}\right)^2 = x^2y^2 - 2x^2 + \frac{x^2}{y^2}$$

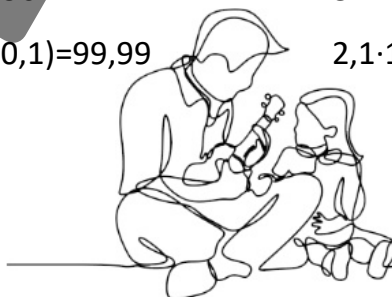
Számokkal:

$$28 \cdot 32 = (30-2)(30+2) = 896$$

$$81 \cdot 79 = (80+1)(80-1) = 6399$$

$$9,9 \cdot 10,1 = (10-0,1)(10+0,1) = 99,99$$

$$2,1 \cdot 1,9 = (2+0,1)(2-0,1) = 4-0,01 = 3,99$$



Többtagú tényezők, amit lehet: fejben

$$(a+b-2)(a+b+2)=(a+b)^2-4=a^2+2ab+b^2-4$$

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)=(a+b)^2-(c+d)^2=$$

$$= a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$$

2) Idefele - alakítsd szorzattá

a) Egyszerűbbek

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$k^2-1=(k+1)(k-1)$$

$$5a^2-45=5(a-3)(a+3)$$

$$16a^2-25=(4a+5)(4a-5)$$

$$4a^2-9=(2a-3)(2a+3)$$

$$8x^2-2y^4=-2(y^2-2x)(y^2+2x)$$

$$16b^4-9c^2=(4b^2+3c)(4b^2-3c)$$

$$\frac{1}{4}a^2-b^2=\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)$$

$$\frac{1}{9}x^2-\frac{25}{49}y^2=\left(\frac{x}{3}+\frac{5y}{7}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{5y}{7}\right)$$

$$\frac{225}{64}a^2-\frac{144}{361}b^2=\left(\frac{15}{8}a+\frac{12}{19}b\right)\left(\frac{15}{8}a-\frac{12}{19}b\right)$$

$$9c^2d^2-16=(3cd-4)(3cd+4)$$

$$64-0,04a^2b^2=-(0,2ab+8)(0,2ab-8)$$

$$7x^3-7x=7x(x+1)(x-1)$$

$$\frac{7}{16}x^4-28x^2=7x^2\left(\frac{x}{4}+2\right)\left(\frac{x}{4}-2\right)$$

$$162a^2b-2b=2b(9a-1)(9a+1)$$

$$(x^2+x+1)(x^2+x-1)=(x^2+x)^2-1=x^4+2x^3+x^2-1$$

$$(a+2b-3c)(a-2b+3c)=a^2-(2b-3c)^2=$$

$$=a^2-4b^2+12bc-9c^2$$

$$2x^2-2y^2=2(x-y)(x+y)$$

$$a^2-4=(a-2)(a+2)$$

$$75-3x^2=-3(x-5)(x+5)$$

$$25-36x^2=-(6x+5)(6x-5)$$

$$16a^2-9b^2=(4a-3b)(4a+3b)$$

$$125a^4-20x^2=5(5a^2+2x)(5a^2-2x)$$

$$a^2b^2-c^4d^4=-(c^2d^2+ab)(c^2d^2-ab)$$

$$y^2-\frac{9}{16}x^2=-\left(\frac{3}{4}x-y\right)\left(\frac{3}{4}x+y\right)$$

$$4x^2-\frac{1}{25}y^2=\left(2x-\frac{1}{5}y\right)\left(2x+\frac{1}{5}y\right)$$

$$x^4-x^2=x^2(x+1)(x-1)$$

$$\frac{1}{16}x^2-49=\left(\frac{x}{4}-7\right)\left(\frac{x}{4}+7\right)$$

$$0,81a^2-1,21x^2y^2=-(1,1xy-0,9a)(1,1xy+0,9a)$$

$$50-8x^2=-2(2x+5)(2x-5)$$

$$24x-54x^3=-6x(3x+2)(3x-2)$$

$$300a^4-243b^6=3(10a^2-9b^3)(10a^2+9b^3)$$

b) Számok négyzetének különbsége

$$68^2 - 32^2 = (68+32)(68-32) = 3600$$

$$185^2 - 15^2 = (185+15)(185-15) = 34000$$

$$6,6^2 - 3,4^2 = (6,6+3,4)(6,6-3,4) = 32$$

$$82,1^2 - 17,9^2 = (82,1+17,9)(82,1-17,9) = 6420$$

c) Összetettebb feladatok

$$(x+3y)^2 - z^2 = (x+3y+z)(x+3y-z)$$

$$(3a+4b)^2 - 9c^2 = (3a+4b+3c)(3a+4b-3c)$$

$$(a-3b)^2 - 16c^2 = (a-3b-4c)(a-3b+4c) \quad (x-y)^2 - x^2y^2 = (x-y-xy)(x-y+xy) = -(xy-x+y)(xy+x-y)$$

$$(5x+3)^2 - 25 = (5x+3+5)(5x+3-5) = (5x+8)(5x-2) \quad (8x-5)^2 - 49x^2 = (x-5)(16x-5)$$

$$(x+3)^2 - 49 = (x+3+7)(x+3-7) = (x+10)(x-4) \quad (5x-7)^2 - 25 = (5x-12)(5x-2)$$

$$(x+y)^2 - 9x^2y^2 = -(3xy+x+y)(3xy-x-y) \quad (3x-5)^2 - 16 = (3x-9)(3x-1) = 3(x-3)(3x-1)$$

$$(a+2b)^2 - (a-3b)^2 = 5b(2a-b)$$

4 tényező! $(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2-2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2) = (x-y)^2(x+y)^2$

$$(x+1)^2 - \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x+1\right) =$$

3 tényező! $x^4 - (2x-1)^2 = (x^2-2x+1)(x^2+2x-1) = (x-1)^2(x^2+2x-1)$

4 tényező! $(x^2+4)^2 - 16x^2 = (x^2+4x+4)(x^2-4x+4) = (x+2)^2(x-2)^2$

3 tényező! $3x^4 - 3 = 3(x^2+1)(x^2-1) = 3(x^2+1)(x+1)(x-1)$

3 tényező! $(a+b)^4 - 16a^2b^2 = (a-b)^2(a^2+6ab+b^2)$

3 tényező! $(x^2-2x)^2 - 1 = (x^2-2x+1)(x^2-2x-1) = (x-1)^2(x^2-2x-1)$

3) Egyelőre intuíciót kívánó alak $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

Ha kell, először ki kell emelni mindent, hogy a főegyüttható pozitív legyen, és az együtthatók relatív prímek!

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

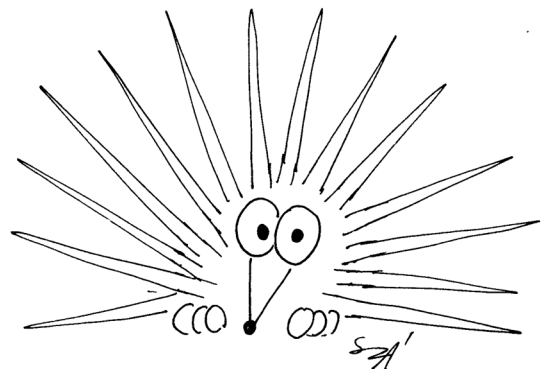
$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$$

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$$

$$x^2 + 7x - 30 = (x+10)(x-3)$$

$$x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$$



$$a^2 - 2a - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$-x^2 - 6x - 8 = -(x^2 + 6x + 8) = -(x+2)(x+4)$$

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x-1)(x+3)$$

$$18x - 3x^2 - 24 = -3(x^2 - 6x + 8) = -3(x-2)(x-4)$$

$$5x^2 - 5x - 60 = 5(x+3)(x-4)$$

$$4x - 2x^2 + 6 = -2(x+1)(x-3)$$

IV) Egyenletek

1) Egyszerűbb egyenletek

$$5(2-3x) - 3(x-1) = 3 - (x+7)$$

$$-18x + 13 = -x - 4$$

$$17 = 17x$$

$$x = 1$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

$$28 + 2(3x+2) - 4(x-3) = 5(x-2) - 3(3-2x)$$

$$2x + 44 = 11x - 19$$

$$63 = 9x$$

$$x = 7$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=7}$$

$$2(3-2(x+4)) = 3(4-x)$$

$$-4x - 10 = 12 - 3x$$

$$-22 = x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-22}$$

$$-3(x-2) = 2(x - 4(x-2) + x)$$

$$-3x + 6 = -4x + 16$$

$$x = 10$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=10}$$

Alakítsd szorzattá

$$3 \text{ tényező! } 1 - (x^2 + 2x)^2 = -(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 1) = -(x+1)^2(x^2 + 2x - 1)$$

$$(2x+1)^2 - 9 = (2x+4)(2x-2) = 4(x+2)(x-1)$$

$$(3x-2)^2 - 25x^2 = (-2x-2)(8x-2) = -4(x+1)(4x-1)$$

$$36x - 12x^2 - 27 = -3(2x-3)^2$$

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2$$

$$3(3x+2)^2 - 48 = 3((3x+2)^2 - 16) = 3(3x+6)(3x-2) = 9(x+2)(3x-2)$$

$$(5x+3)^2 - 9x^2 = (8x+3)(2x+3)$$

$$4x^2 - (3x-2)^2 = -(5x-2)(x-2)$$

Oldd meg

$$4(3x+1) - (2x-5) - 12 = 2(3x+1) + (2x-5)$$

$$10x-3 = 8x-3$$

$$10x = 8x$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

2) Törtes egyenletek – KUNKORI!

a) ad a)

$$\frac{5}{2}a - \frac{3a}{4} + \frac{7}{8} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} / \cdot 8$$

$$20a - 6a + 7 = 12a - 4$$

$$14a + 7 = 12a - 4$$

$$2a = -11$$

$$a = -11/2$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{a = -11/2}$$

$$\frac{4x-12}{3} = 0$$

$$\frac{(4x-12)}{3} = 0 / \cdot 3$$

$$4x-12=0$$

$$x=3$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=3}$$

$$\frac{3x-6}{2} = 21$$

$$\frac{(3x-6)}{2} = 21 / \cdot 2$$

$$(3x-6)=42$$

$$3x=48$$

$$x=16$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=16}$$

$$1 - \frac{7-2x}{5} = 2$$

$$1 - \frac{(7-2x)}{5} = 2 / \cdot 5$$

$$5 - (7-2x) = 10$$

$$5 - 7 + 2x = 10$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=6}$$

b) ad b)

$$\frac{2x-9}{5} - 2x = -3$$

$$\left(\frac{(2x-9)}{5} - 2x \right) = (-3) / \cdot 5$$

$$(2x-9) - 10x = -15$$

$$-8x - 9 = -15$$

$$-8x = -6$$

$$x = 3/4$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=3/4}$$

$$\frac{3x-2}{2} = -1 + 3x$$

$$\frac{(3x-2)}{2} = (-1 + 3x) / \cdot 2$$

$$3x-2 = -2+6x$$

$$3x=6x$$

$$0=3x$$

$$x=0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$-\frac{x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = 2$$

$$-\frac{(x-1)}{5} + \frac{(3x+1)}{2} = 2 \quad / \cdot 10$$

$$-2(x-1) + 5(3x+1) = 20$$

$$13x+7=20$$

$$x=1$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

c) ad c)

$$-\frac{3x-2}{3} + \frac{2x+3}{5} = \frac{x}{5} + 1$$

$$-\frac{(3x-2)}{3} + \frac{(2x+3)}{5} = \frac{x}{5} + 1 \quad / \cdot 15$$

$$-5(3x-2) + 3(2x+3) = 3x + 15$$

$$-9x + 19 = 3x + 15$$

$$4 = 12x$$

$$x = 1/3$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1/3}$$

$$\frac{8x-3}{5} - \frac{2x+4}{2} = x+1$$

$$\frac{(8x-3)}{5} - \frac{(2x+4)}{2} = x+1 \quad / \cdot 10$$

(Később majd egyszerűsítünk előbb!)

$$2(8x-3) - 5(2x+4) = 10x + 10$$

$$6x - 26 = 10x + 10$$

$$-36 = 4x$$

$$x = -9$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=-9}$$

LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT! LKKT!

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{6x+4}{8} = \frac{-15x-1}{12}$$

$$-\frac{(2x-1)}{4} - \frac{(6x+4)}{8} = \frac{(-15x-1)}{12} \quad / \cdot 24$$

(Később majd egyszerűsítünk előbb!)

$$-6(2x-1) - 3(6x+4) = 2(-15x-1)$$

$$-30x - 6 = -30 - 2$$

$$-6 = -2$$

Ellentmondó egyenlet, \nexists megoldás

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} = x-1$$

$$\frac{(3x-1)}{2} - \frac{(2x+1)}{3} = x-1 \quad / \cdot 6$$

$$3(3x-1) - 2(2x+1) = 6x-6$$

$$5x-5=6x-6$$

$$1=x$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1}$$

$$\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{4} = \frac{23}{12}$$

$$\frac{(2x-5)}{3} - \frac{(x+1)}{4} = \frac{23}{12} \quad / \cdot 12$$

$$4(2x-5) - 3(x+1) = -23$$

$$5x - 23 = -23$$

$$5x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$3x-2 + \frac{x}{3} = 2(x-1)$$

$$3x-2 + \frac{x}{3} = 2(x-1) \quad / \cdot 3$$

$$9x-6+x=6x-6$$

$$10x = 6x$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=0}$$

$$\frac{5x-2}{6} - \frac{4x+1}{12} = \frac{3x-7}{18}$$

$$\frac{(5x-2)}{6} - \frac{(4x+1)}{12} = \frac{(3x-7)}{18} \quad / \cdot 36$$

$$6(5x-2) - 3(4x+1) = 2(3x-7)$$

$$18x - 15 = 6x - 14$$

$$12x = 1$$

$$x = 1/12$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=1/12}$$

d) ad d)

$$\begin{aligned}\frac{3(x+4)}{5} &= \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x-1}{5} \\ \frac{3(x+4)}{5} &= \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{(x-1)}{5} \quad / \cdot 10 \\ 6(x+4) &= 5x - 4(x-1) \\ 6x + 24 &= x + 4 \\ 5x &= -20 \\ x &= -4 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{x = -4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2(x-3)}{5} - 3 \cdot \frac{2-x}{2} &= -4 - \frac{2-5x}{5} \\ \frac{2(x-3)}{5} - 3 \cdot \frac{(2-x)}{2} &= -4 + \frac{(5x-2)}{5} \quad / \cdot 10 \\ 4(x-3) - 15(2-x) &= -40 + 2(5x-2) \\ 4x - 12 - 30 + 15x &= -40 + 10x - 4 \\ 19x - 42 &= 10x - 44 \\ 9x &= -2 \\ x &= -2/9 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{x = -2/9}\end{aligned}$$

3) Egyenlet = állítás

$$\begin{aligned}\frac{-6x+10}{2} + \frac{5-2x}{3} &= \frac{-9x-5}{3} - 2 \cdot \frac{(4x-1)}{12} \\ \frac{(-6x+10)}{2} + \frac{(5-2x)}{3} &= \frac{(-9x-5)}{3} - \frac{(4x-1)}{6} \quad / \cdot 6 \\ 3(-6x+10) + 2(5-2x) &= 2(-9x-5) - (4x-1) \\ -22x + 40 &= -22x - 9 \\ 40 &= -9\end{aligned}$$

Ellentmondó egyenlet, \nexists megoldás

$$\begin{aligned}-6 - \frac{6x-2}{3} - 3 \cdot \frac{3-x}{2} &= -x - \frac{16+2x}{2} + \frac{3x-5}{2} + \frac{4}{6} \\ -6 - \frac{(6x-2)}{3} - 3 \cdot \frac{(3-x)}{2} &= -x - \frac{(16+2x)}{2} + \frac{(3x-5)}{2} + \frac{4}{6} \quad / \cdot 6 \\ -36 - 2(6x-2) - 9(3-x) &= -6x - 3(2x+16) + 3(3x-5) + 4 \\ -3x - 59 &= -3x - 59 \\ 0 &= 0 \\ \text{(Azonosság. True for all } x\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3(x-3)}{4} - 2 \cdot \frac{3-x}{5} &= \frac{9-3x}{5} \\ \frac{3(x-3)}{4} - 2 \cdot \frac{(3-x)}{5} &= \frac{(9-3x)}{5} \quad / \cdot 20 \\ 15(x-3) - 8(3-x) &= 4(9-3x) \\ 23x - 69 &= -12x + 36 \\ 35x &= 105 \\ x &= 3 \\ \text{Vh} \checkmark \quad \underline{x = 3}\end{aligned}$$



4) Egyenletmegoldás szorzattá alakítással

a) Mondóka

„Másod v. magasabb fokú egyenleteket úgy oldunk meg, hogy egy oldalra rendezzük (nullára redukálunk), majd szorzattá alakítjuk.”

„Egy szorzat akkor és csak akkor (pontosan akkor) 0, ha valamelyik tényezője 0.”

b) Minta:

$$2x(2x-3)(x+2)=0$$

I.

$$2x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=3/2 \quad x_3=-2}$$

II.

$$2x-3=0$$

$$2x=3$$

$$x=3/2$$

III.

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

5) Oldd meg

a) Bevezetés

$$2x(3x-4)=0$$

I.

$$2x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=4/3}$$

II.

$$3x-4=0$$

$$x=4/3$$

$$(8-3x)(x+1)=0$$

I.

$$8-3x=0$$

$$x=8/3$$

Vh✓

$$\underline{x_1=8/3; x_2=-1}$$

II.

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$(3x-2)(-x+4)(2x-6)=0$$

I.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_1=2/3; x_2=4 \quad x_3=3}$$

II.

$$-x+4=0$$

$$x=4$$

III.

$$2x-6=0$$

$$x=3$$

$$-4x(2x+5)(3x-1)=0$$

I.

$$-4x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_2=-5/2 \quad x_3=1/3}$$

II.

$$2x+5=0$$

$$x=-5/2$$

III.

$$3x-1=0$$

$$x=1/3$$

$$(3x-2)(3x-2)=0$$

I.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=2/3}$$

II.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

$$(3x-2)^2=0$$

I-II.

$$3x-2=0$$

$$x=2/3$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=2/3}$$

b) Már nincs rendezve, szorzattá alakítva

Mintaegyenlet

$$3x^2=5x \quad / \text{Másod v. magasabb fokú...}$$

$$3x^2-5x=0 \quad / \text{... majd szorzattá alakítunk.}$$

$$x(3x-5)=0 \quad / \text{„Egy szorzat akkor és csak akkor...”}$$

I.	II.
$x=0$	$3x-5=0$
	$3x=5$
	$x=5/3$

VH✓
 $x_1=0; x_2=5/3$

Oldd meg az egyenleteket (Másod v. magasabb fokú egyenleteket úgy... . Egy szorzat...)

$2x^3 = -3x^2$	$x^2 = 2-x$
$2x^3+3x^2=0$	$x^2+x-2=0$
$x^2(2x+3)=0$	$(x+2)(x-1)=0$
I. II.	I. II.
$x^2=0$	$2x+3=0$
$x_{1,2}=0$	$x_3=-3/2$
<u>VH✓ $x_{1,2}=0; x_3=-3/2$</u>	<u>VH✓ $x_1=-2; x_2=1$</u>

Minta

$-12x^3 = -27x$	/Másod v. magasabb..	
$-12x^3+27x=0$	egy oldalra rendezünk	
$-3x(4x^2-9)=0$	/mindent kiemelünk	
$-3x(2x-3)(2x+3)=0$	és a főegyüttható pozitív legyen!	
I. II. III.	/ szorzattá alakítunk	
$-3x=0$	$2x-3=0$	$2x+3=0$
$x=0$	$x=3/2$	$x=-3/2$
	<u>VH✓ $x_1=0; x_2=3/2; x_3=-3/2$</u>	

Oldd meg az egyenleteket

$x^2 = 4$	$-3x^2 = -75 /:(-3)$
$x^2-4=0$	$x^2 = 25$
$(x+2)(x-2)=0$	$x^2-25=0$
$x_1=2; x_2=-2$	$(x+5)(x-5)=0$
<u>VH✓ $x_1=2; x_2=-2$</u>	$x_1=-5; x_2=5$
	<u>VH✓ $x_1=-5; x_2=5$</u>

$$18x^3 = 32x$$

$$18x^3 - 32x = 0$$

$$2x(9x^2 - 16) = 0$$

$$2x(3x-4)(3x+4) = 0$$

I.

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Vh✓

$$\underline{x_1 = 0; x_2 = 4/3; x_3 = -4/3}$$

II.

$$3x - 4 = 0$$

$$x = 4/3$$

III

$$3x + 4 = 0$$

$$x = -4/3$$

$$5x^2 = 10x - 5$$

$$5x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$5(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$5(x-1)^2 = 0$$

I-II.

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2} = 1}$$

Minta

$$(2x-3)^2 = 16 \quad / \text{egy oldalra rendezünk}$$

$$(2x-3)^2 - 16 = 0 \quad / \text{felfedezzük az } a^2 - b^2 \text{ alakot}$$

$$(2x-3)^2 - 4^2 = 0 \quad / \text{szorzattá alakítunk}$$

$$(2x-3+4)(2x-3-4) = 0$$

$$(2x+1)(2x-7) \quad / \text{„Egy szorzat akkor és...}$$

I.

$$2x+1=0$$

$$x = -1/2$$

VH✓

$$x_1 = -1/2; x_2 = 7/2$$

II.

$$2x-7=0$$

$$x = 7/2$$

c) Gyakorlás

$$(x+2)^2 = 16$$

$$(x+2)^2 - 16 = 0$$

$$(x+2+4)(x+2-4) = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = -6$$

$$\text{VH✓ } \underline{x_1 = 2; x_2 = -6}$$

$$2(x+5)^2 = 8$$

$$(x+5)^2 - 4 = 0$$

$$(x+5+2)(x+5-2) = 0$$

$$(x+7)(x+3) = 0$$

$$x_1 = -7; x_2 = -3$$

$$\text{VH✓ } \underline{x_1 = -7; x_2 = -3}$$

$$5(x+3)^2 = 45$$

$$(x+3)^2 - 9 = 0$$

$$x(x+6) = 0$$

I.

$$x = 0$$

$$x = 0$$

Vh✓

$$\underline{x_1 = 0; x_2 = -6}$$

II.

$$x+6=0$$

$$x = -6$$

$$-2x^2 = 32 - 16x \quad (x_{1,2} = 4)$$

$$0 = 2x^2 - 16x + 32$$

$$0 = 2(x-4)^2$$

I-II.

$$x-4=0$$

$$x=4$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2} = 4}$$

$$8x^4=3x^3$$

$$8x^4-3x^3=0$$

$$x^3(8x-3)=0$$

I-II-III.

$$x^3=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2,3}=0; x_4=3/8}$$

IV.

$$8x-3=0$$

$$x=3/8$$

$$4x^3=24x^2-36x$$

$$4x^3-24x^2+36x=0$$

$$4x(x^2-6x+9)=0$$

$$4x(x-3)^2=0$$

I.

$$4x=0$$

$$x=0$$

Vh✓

$$\underline{x_1=0; x_{2,3}=3}$$

II-III.

$$(x-3)^2=0$$

$$x=3$$

$$(x-3)(x+5)=x^2$$

$$x^2+2x-15=x^2$$

$$2x=15$$

$$x=15/2$$

Vh✓

$$\underline{x=15/2}$$

$$3x^2+12=12x$$

$$3(x^2-4x+4)=0$$

$$3(x-2)^2=0$$

I-II.

$$x=2$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=2}$$

$$3x^2=30x-75$$

$$3(x^2-10x+25)=0$$

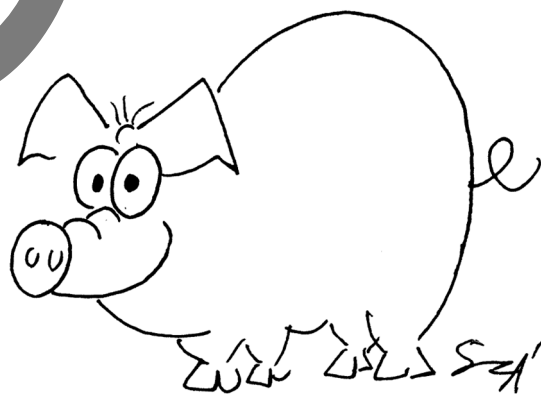
$$3(x-5)^2=0$$

I-II.

$$x=5$$

Vh✓

$$\underline{x_{1,2}=5}$$



V) Algebrai törtek

1) Definíció

Algebrai törteknek hívjuk azokat a törteket, amelyek számlálója is és nevezője is egy polinom.

2) Kezelésük

$$\frac{ax^2}{a^2x} = \frac{x}{a}$$

$$\frac{-5x^2y^3}{125x^3y^2} = -\frac{y}{25x}$$

Nem köt.: $\frac{168x^2y^3z^4}{24x^2y^2z^4} = 7y$

$$\frac{121a^2}{33ax} = \frac{11a}{3x}$$

$$\frac{169a^2y^3}{13ay} = 13ay^2$$

Nem köt.: $\frac{160x^3yz^6}{64x^2y^2z^2} = \frac{5xz^4}{2y}$

Egyszerűsíts, de előtte a számláló és a nevező is egy tag – több tényező legyen!

$$\frac{14a^5b^3 - 42a^3b^2 + 28a^3b^3}{98a^3b^3} = \frac{a^2b + 2b - 3}{7b}$$

$$\frac{-12x^3y^2 + 8x^4y^3 - 20x^4y^2}{16x^4y^2} = \frac{2xy - 5x - 3}{4x}$$

Írd le az algebrai törtek egyszerűsítésének mondókáját:

Mondóka: (Algebrai) törtet csak akkor egyszerűsíthetünk, ha már a számláló is és a nevező is egy tagú. Csak ezután egyszerűsíthetünk a közös tényezőkkel. Vagyis a számlálót is és a nevezőt is szorzattá kell alakítani.

$$\frac{(a-b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)} a-b$$

$$\frac{(2x+y)^2}{2x+y} = \frac{(2x+y)^2}{(2x+y)} = 2x+y$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} a+b$$

$$\frac{x^2 - 1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = x-1$$

$$\frac{2x^2 - 6x}{5x - 15} = \frac{2x(x-3)}{5(x-3)} = \frac{2x}{5}$$

Nem köt.: $\frac{15x - 12x^2}{8x^3 - 10x^2} = -\frac{3}{2x}$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{x-3}{x+3}$$

$$\frac{9 + 4x^2 - 12x}{6 - 4x} = -\frac{2x-3}{2}$$

Ne köt.: $\frac{-81x^2 + 4}{18x + 4} = -\frac{9x-2}{2}$

$$\frac{121 - x^2}{5x + 55} = -\frac{x^2 - 121}{5(x+11)} = -\frac{(x-11)(x+11)}{5(x+11)} = -\frac{x-11}{5}$$

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{6 + 12x} = \frac{2x+1}{6}$$

$$\frac{xy + 3y + x + 3}{2xy + x + 6y + 3} = \frac{y(x+3) + (x+3)}{2y(x+3) + (x+3)} = \frac{(x+3)(y+1)}{(x+3)(2y+1)} = \frac{y+1}{2y+1}$$

! $\frac{a^2 - b}{a} = \text{NEM LEHET!}$

3) Add meg a következő kifejezések ÉT-át, majd egyszerűsíts – ahol lehet

$$\frac{18x-3-27x^2}{5-45x^2} = \frac{3(3x-1)}{5(3x+1)}$$

ÉT: $45x^2-5 \neq 0$

$(3x-1)(3x+1) \neq 0$

ÉT: $x \neq 1/3$ és $x \neq -1/3$ (vagyis: $x \neq \pm 1/3$) ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/3\}$

$$\frac{60x-20x^2-45}{12x^2-27} = -\frac{5(2x-3)}{3(2x+3)}$$

ÉT: $12x^2-27 \neq 0$

$3(2x-3)(2x+3) \neq 0$

ÉT: $x \neq 3/2$ és $x \neq -3/2$ (vagyis: $x \neq \pm 3/2$) ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3/2\}$

$$\frac{x^2-14x+49}{98-2x^2} = -\frac{(x-7)^2}{(x+7)(x-7)} = -\frac{x-7}{2(x+7)}$$

ÉT: $98-2x^2 \neq 0$

$-2(x-7)(x+7) \neq 0$

ÉT: $x \neq 7$ és $x \neq -7$ (vagyis: $x \neq \pm 7$) ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 7\}$

$$\frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)}$$

NEM LEHET egyszerűsíteni! $\frac{x^4-1}{x^2-1} = x^2+1$

ÉT: $x-1 \neq 0$

ÉT: $x \neq 1$

ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

ÉT: $x^2-1 \neq 0$

$(x+1)(x-1) \neq 0$

ÉT: $x \neq 1$ és $x \neq -1$ (vagyis: $x \neq \pm 1$) ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

$$\frac{5-5x^2}{-4x-4} = \frac{5(x-1)}{4}$$

ÉT: $-4x-4 \neq 0$

ÉT: $x \neq -1$ ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = x+1$$

ÉT: $x-2 \neq 0$

ÉT: $x \neq 2$ ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{2x^2-5x-3}{-4x^2-2x} = -\frac{(2x+1)(x-3)}{2x(2x+1)} = -\frac{x-3}{2x}$$

ÉT: $-4x^2-2x \neq 0$

$-2x(2x+1) \neq 0$

ÉT: $x \neq 0$ és $x \neq -1/2$ ÉT: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1/2\}$

4) Egyszerűsíts!

$$\frac{a^2 - b^2}{2b - 2a} = -\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{5x^2 + 5x^3}{3 - 3x^2} = -\frac{5x^2}{3(x-1)}$$

$$\frac{5a^2 - 5b^2}{2b^2 - 4ab + 2a^2} = \frac{5(a+b)}{2(a-b)}$$

$$\frac{x^4 - 1}{x+1} = (x^2+1)(x-1)$$

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{25 - x^2} = -\frac{x-5}{x+5}$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{-2x^2 - 8x - 8} = \frac{(x-3)(x+2)}{-2(x+2)^2} = -\frac{x-3}{2(x+2)}$$

$$\frac{3x - 2x^2 + 9}{18 - 2x^2} = \frac{2x^2 - 3x - 9}{2(x-3)(x+3)} = \frac{(2x+3)(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \frac{2x+3}{2(x+3)}$$



Oldd meg a következő egyenletet. **Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!**

$$\frac{4(2-3x)}{10} + \frac{6x-4}{4} = -\frac{4x+4}{20} + \frac{45x-9}{15}$$

$$\frac{2(2-3x)}{5} + \frac{2(3x-2)}{4} = -\frac{4(x+1)}{20} + \frac{9(5x-1)}{15}$$

$$\frac{2(2-3x)}{5} + \frac{(3x-2)}{2} = -\frac{(x+1)}{5} + \frac{3(5x-1)}{5}$$

$$4(2-3x)+5(3x-2) = -2(x+1)+6(5x-1)$$

$$3x-2 = 28x-8$$

$$6 = 25x$$

$$x = 6/25$$

$$\text{Vh } \checkmark \underline{x=6/25}$$

5) Add meg az ÉT-t, majd egyszerűsíts

$$\frac{x-3}{(x-3)(5x+2)} = \frac{(x-3)}{(x-3)(5x+2)} =$$

$$= \frac{1}{(5x+2)}$$

$$\text{ÉT: } x \neq 3; -2/5$$

$$\text{Ét: } x \in \mathbf{R} \setminus \{3; -2/5\}$$

$$\frac{5a}{2a^2-3a} = \frac{5a}{a(2a-3)} =$$

$$\frac{5}{(2a-3)} =$$

$$\text{ÉT: } a \neq 0; 3/2$$

$$\text{Ét: } x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 3/2\}$$

$$\frac{20-5b^2}{3b^2-12b+12} = \frac{-5(b+2)(b-2)}{3(b-2)^2} =$$

$$= -\frac{5(b+2)}{3(b-2)}$$

$$\text{ÉT: } b \neq 2$$

$$\text{Ét: } b \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)} = x-1$$

$$\text{ÉT: } x \neq 2$$

$$\text{Ét: } x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{x-2}{x^2+3x} = \frac{(x-2)}{x(x+3)}$$

Nem lehet egyszerűsíteni

$$\text{ÉT: } x \neq 0; -3$$

$$\text{Ét: } b \in \mathbf{R} \setminus \{0; -3\}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x^2+1)} = x^2-1$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1, \text{ vagyis a nevező sose } 0$$

$$\text{Ét: } x \in \mathbf{R}$$



Oldd meg a következő egyenletet. **Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!**

$$\frac{8x-8}{14} - \frac{5x+10}{15} = \frac{16x-4}{6} - \frac{6x+4}{14}$$

$$\frac{8(x-1)}{14} - \frac{5(x+2)}{15} = \frac{4(4x-1)}{6} - \frac{2(3x+2)}{14}$$

$$\frac{4(x-1)}{7} - \frac{(x+2)}{3} = \frac{2(4x-1)}{3} - \frac{(3x+2)}{7} \quad / \cdot 21$$

$$12(x-1) - 7(x+2) = 14(4x-1) - 3(3x+2)$$

$$5x - 26 = 47x - 20$$

$$-6 = 42x$$

$$x = -1/7$$

Vh ✓ $x = -1/7$

6) Törtek összevonása – szorzattá alakítása

Ha nem megy, nézd meg az órai füzetben!

$$\frac{2}{5p} - \frac{4}{3} = \frac{-20p+6}{15p}$$

$$5 + \frac{3}{p} = \frac{5p+3}{p}$$

$$\frac{5}{2p} - \frac{2}{p-3} = \frac{p-15}{2p(p-3)}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{3p^2} = \frac{3p+2}{3p^2}$$

$$x - \frac{2}{x-3} = \frac{x(x-3)}{(x-3)} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{x^2-3x-2}{x-3} =$$

$$4 - \frac{2p+1}{p} = \frac{4p}{p} - \frac{(2p+1)}{p} = \frac{4p-(2p+1)}{p} = \frac{2p-1}{p}$$

$$\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2-5p} = \frac{4}{p} - \frac{3}{p(p-5)} = \frac{4(p-5)}{p(p-5)} - \frac{3}{p(p-5)} = \frac{4p-23}{p(p-5)}$$

$$\frac{7p-3}{4-3p} - 2 = \frac{(7p-3)}{(4-3p)} - \frac{2(4-3p)}{(4-3p)} = \frac{(7p-3)-2(4-3p)}{(4-3p)} = \frac{13p-11}{4-3p} = -\frac{13p-11}{3p-4}$$

$$* \frac{3x-5}{6x^2-3x} - \frac{5}{4x^2-1} = \frac{3x-5}{3x(2x-1)} - \frac{5}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{6x^2-22x-5}{3x(2x-1)(2x+1)}$$

$$\frac{3-2x^2}{4x-3} - x - 4 = \frac{3-2x^2}{4x-3} - \frac{x(4x-3)}{(4x-3)} - \frac{4(4x-3)}{(4x-3)} = \frac{-6x^2-13x+15}{4x-3}$$

Oldd meg a következő egyenleteket. Figyelj arra, hogy alakíts szorzattá, majd egyszerűsíts!

$$\frac{12x-6}{30} - \frac{6(x+2)}{10} + \frac{12-3x}{9} = \frac{35x-10}{25} - \frac{16x+20}{12}$$

$$\frac{6(2x-1)}{30} - \frac{6(x+2)}{10} + \frac{3(4-x)}{9} = \frac{5(7x-2)}{25} - \frac{4(4x+5)}{12}$$

$$\frac{(2x-1)}{5} - \frac{3(x+2)}{5} + \frac{(4-x)}{3} = \frac{(7x-2)}{5} - \frac{(4x+5)}{3} \quad / \cdot 15$$

$$-3(2x-1) - 9(x+2) + 5(4-x) = 3(7x-2) - 5(4x+5)$$

$$-20x + 5 = x - 31$$

$$36 = 21x$$

$$x = 12/7$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=12/7}$$

$$\frac{-6x+6}{15} - \frac{9x+18}{6} = -5 + x - \frac{12x-12}{10}$$

$$\frac{-6(x-1)}{15} - \frac{9(x+2)}{6} = -5 + x - \frac{12(x-1)}{10}$$

$$\frac{2(x-1)}{5} - \frac{3(x+2)}{2} = -5 + x - \frac{6(x-1)}{5} \quad / \cdot 10$$

$$4(x-1) - 15(x+2) = -50 + 10x - 12(x-1)$$

$$-11x - 34 = -2x - 38$$

$$4 = 9x$$

$$x = 4/9$$

$$\text{Vh} \checkmark \quad \underline{x=4/9}$$

VI) Szöveges egyenletek

Három menüt lehet választani. Aladár Béla és Cecil együtt 9360 Ft-ot fizetett. Cecil Aladárnál 200 Ft-tal többet fizetett. Béla menüjének csak a felét fizette Aladár. Mennyibe kerül a három menü külön-külön?

Mó.: Aladár: x Ekkor Cecil $x+200$ és Béla $2x$

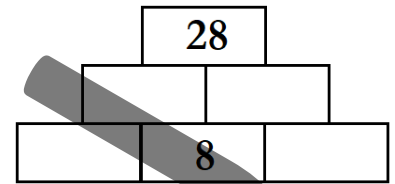
$$x + x + 200 + 2x = 9360$$

$$x = 2290 \quad \text{Vh} \checkmark$$

$$\text{Vh: } 2290 + 200 = 2490 \checkmark \quad 2 \cdot 2290 = 2580 \checkmark \quad 2290 + 2490 + 2580 = 9360 \checkmark$$

Aladár: 2290 C: 2490 B: 4580

Egy doboz tömege annyi, mint az alatta található két doboz együtt. A bal alsó két egységgel könnyebb, mint a jobb alsó. Mekkora tömegűek a dobozok?



Mo.: Alulra jobbra x -et tesztek, ezért baloldalon $x-2$ áll.

Középen balra: $x-2+8$ és jobbra $x+8$

Így az egyenlet: $(x-2+8) + (x+8)=28$ $2x=14$ $x=7$

Így a dobozok: (5 ; 8 ; 7) felette: (13 ; 15) Legfelül: 28 Vh✓ $x=7$

Egy szám ötödénél 4-gyel nagyobb a negyede. Melyik ez a szám?

$$\text{Mo.: } \frac{x}{5} + 4 = \frac{x}{4} \quad / \cdot 20$$

$$4x+80=5x$$

$$x=80 \text{ Vh✓ } \underline{x=80}$$

Egy útnak az első órában megtettem a felét, a második órában a negyedénél 2-vel többet, a harmadik órában a maradék 13 kilométert. Milyen hosszú volt az út?

$$\text{Mo.: } x/2 + (x/4+2) + 13 = x \quad / \cdot 4$$

$$2x+x+60=4x$$

$$x=60 \text{ Vh✓ } \underline{x=60}$$

Hány km a kirándulás, ha már a harmadánál már 10 km-rel többet tettünk ugyan meg, de még a felénél 2 km-rel több van hátra.

Mo.: Az út hossza legyen x .

$$(x/3+10) + (x/2+2) = x \quad / \cdot 6$$

$$2x+60+3x+12=6x$$

$$x=72 \text{ Vh✓ } \underline{x=72}$$

Egy üveg lekvár 150 Ft-tal kevesebbe kerül, mint egy üveg nutella. 3 lekvár és 2 nutella 10550 Ft-ba kerül. Mibe kerülnek külön-külön?

Mo.: Nutella legyen x , ezért a lekvár $x-150$

$$2x+3(x-150)=10550$$

$$5x-450=10550$$

$$x=2200$$

Vh: ✎✓ Nutella=2200 Ft, lekvár: 2050 Ft.

Béla 20 € -val kevesebbet keresett, mint Aladár, ugyanakkor ketten együtt is csak a felét keresték annak, amit Cecil keresett. Cecil keresete 320€-val több volt, mint Aladáré. Ki mennyit keresett?

Mo: Aladár: x Ekkor Béla $x-20$ Cecil pedig: $x+320$

$$\text{Így az egyenlet: } x+x-20 = (x+320)/2 \text{ Vh✓}$$

Aladár: 120 Béla: 100 Cecil:440

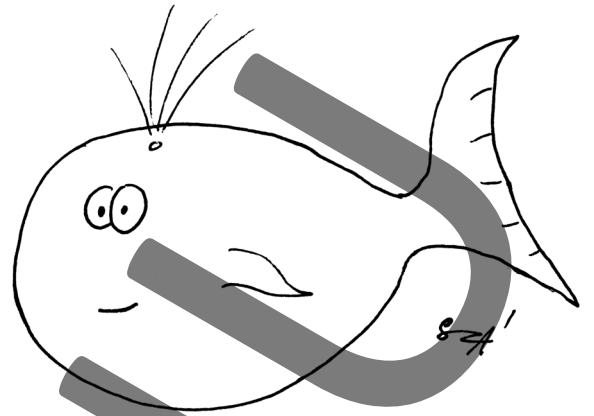
Egy horgásztól megkérdezték, hogy hány halat fogott. Ő így felelt „Azt reméltem, hogy húszat fogok, de ha háromszor annyit fogtam volna, mint amennyit fogtam, akkor is 2-vel kevesebbet fogtam volna, mint amennyit reméltem.” Hány halat fogott?

Mo.: x db-ot fogott.

$$3x+2=20$$

$$x=6$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=6}$$



Az osztályból néhányan almás lepényt eszegetnek. Koppány megette a lepények felét és rosszul lett. Szabolcs a maradék felénél 3-mal kevesebbet ugyan, de ő is rosszul lett. Botond a maradék kétharmadát pusztította el. Így a lányoknak 6 lepény maradt. Hány lepény volt eredetileg?

Mo.: Koppány után: $x/2$

$$\text{Szabolcs után: } \frac{x}{4} + 3$$

$$\text{Botond után: } \frac{1}{3} \left(\frac{x}{4} + 3 \right) = 6$$

$$\left(\frac{x}{4} + 3 \right) = 18$$

$$x=60$$

$$\text{Vh} \checkmark \underline{x=60}$$

Adott két szám. Ha az egyik végéről elhagyjuk a 0-t, akkor a másikat kapjuk. Az összegük 319. Melyik az eredeti két szám?

Mo.: az egyik végén 0 áll, ez a másiknak a $10 \times$ -ese:

$$x+10x=319$$

$$x=29.$$

$$\text{Vh.: } 29+290=319 \checkmark$$

Az egyik 29; a másik: 290.

Ha egy szám végéről elhagyom az 5-ös számjegyet és az így kapott számot kivonom az eredetiből, akkor 176-ot kapok. Mi az eredeti szám?

$$\text{Mo.: } x - \frac{x-5}{10} = 176$$

$$x=195$$

$$\text{Vh: } 195 - 19 = 176$$

$$\underline{x=195}$$

A farmon zsiráfok és baglyok élnek. 66 fejük van összesen és 194 lábuk. Melyikből mennyi van?

Mo.:

Zsiráfok: x db. Ezért bagoly $66-x$ db.

Lábuk: $4x+2(66-x)=194$ $x=31$ Vh✓

Így 31 zsiráf és 35 bagoly van.

Egy háromjegyű szám jegyeinek szorzata 0. Az első jegy 2-vel kisebb, mint a második. Ha az első jegyet hátrateszem, akkor a kapott szintén háromjegyű szám 153-mal nagyobb, mint az eredeti. Mi az eredeti szám?

Mo.:

A szorzat 0, ezért az egyik jegy 0.

Mivel háromjegyű, ezért az első jegy nem lehet 0.

(Hiszen a 007 nem háromjegyű, mert akkor ötjegyű is: 00007 :-))

A második sem lehet 0, mert akkor az első jegy negatív lenne...

Vagyis legyen a második helyen álló x , és a számom így néz ki: $\overline{x-2;x;0}$

Ez helyiértékesen van írva: $x-2$ áll a 100-asok helyén, x a 10-esek helyén.

A shiftelt szám: $\overline{x;0;x-2}$;

Vagyis az egyenlet: $100(x-2)+10x+0=100x+0\cdot 10+x-2 - 153$

$110x-200=101x-155$

$9x=45$ $x=5$

Vh: $350 = 503-153$ ✓. A szám: 350

Ha egy szám utolsó jegyét elhagynám, akkor az utolsó jegy ötszörösét kapnám. Ugyanakkor ez a szám az utolsó jegy negyvenszeresénél 99-cel nagyobb. Mi ez a szám?

Mo.:

Az utolsó jegy legyen x

Ekkor a szám értéke: $10\cdot 5x+x$

Egyenlet: $51x=40x+99$

$x=9$, $5\cdot 9=45$ ezért a szám: 459

Vh: $45=5\cdot 9$ és $40\cdot 9+99=459$ ✓ A szám: 459

